

摩擦性塑性体に関する速度場の理論

THEORIES ON A VELOCITY FIELD FOR PLASTIC SOILS

橋 口 公 一*
By Koichi Hashiguchi

1. 序 論

すべり線解法においては、一般に、まず応力境界条件を糸口にすべり線間に成り立つ諸特性に従うすべり線場を仮定するが、この仮定すべり線場の正解としての採否にあたり、1) 応力および速度に関する全境界条件を満たし、さらに2) 塑性仕事率正なる条件に抵触しない速度場の存在、3) 剛性域内において降伏条件を越えない応力分布の存在を論証せねばならない。

上記3条件を満たす完全解は数例を入手しうる実状にとどまり、近年の電算機の発展に伴う有限要素法に期待したいところであるが、1) および2) に関して内部摩擦角零なる塑性体に対しては金属塑性の分野において、速度場の諸論、ホドグラフ面の適用、さらに塑性仕事率正負に関する検証法などの所論により、一応の論理体系が確立されたといえる。

他方、摩擦性塑性体に関しては等方、膨張性の仮定下で、応力およびひずみ速度などの諸関係が山口柏樹博士、R.T. Shield, W. Prager, D.C. Drucger などにより、明らかにされ、また、過去において提案されたにもかからず、数学的処理の複雑さのゆえに放置されてきた等方、非圧縮性の仮定下で、近年ふたたび省察され、A.J.M. Spencer¹⁾, J. Mandel²⁾ などにより解明されつつあるが、ことに速度に関しては、いずれの場合にも境界値問題、不連続などにおける少なからぬ未解決事項を含むものと思われる。さらに、ホドグラフの適用はいまだに顧慮されない実状であるが、これにはホドグラフ使用の大きな一利点である塑性仕事率正なる検証法が明らかにされていない点にも一因を認められるものと思う。

ここに、筆者は等方、膨張性、無自重なる仮定下で、上記の諸点に関して一般的省察を行ない、さらに、支持力諸形態に対して数応用例を提示する次第である。

2. 準備事項

本編においては次編以降の説明上、不可欠と思われる事項を省察しておく。

粘着力を c 、内部摩擦角を ϕ として Coulomb の破壊条件 (以下、引張を正とする)。

$$f = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - c \cos \phi$$

$$+ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \phi = 0 \dots \dots \dots (2.1)$$

を塑性ポテンシャルとするとひずみ速度は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{\lambda}{2} \left(\sin \phi + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2T} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \{ \sin \phi - \sin(2\theta + \phi) \} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{\lambda}{2} \left(\sin \phi - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2T} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \{ \sin \phi + \sin(2\theta + \phi) \} \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\lambda}{2} \frac{\tau_{xy}}{T} \\ &= \frac{\lambda}{2} \cos(2\theta + \phi) \\ T &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.2)$$

で与えられる。なお、変形する塑性域内において $\lambda > 0$ $\dots \dots \dots (2.3)$

でなければならない (以上の諸式は R.T. Shield³⁾,⁴⁾ による)。式 (2.2) より λ を消去すると

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 2 \dot{\gamma}_{xy} \frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)},$$

$$\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x = 2 \dot{\gamma}_{xy} \tan(2\theta + \phi) \dots \dots \dots (2.4)$$

なる膨張性および等方性条件式を得る。これらを式 (2.2) における u_x, u_y で示すと

* 正会員 九州大学助手 農学部農業機械研究室

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)} \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ - \frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tan(2\theta + \phi) \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ + \tan(2\theta + \phi) \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

なる一階連立の双曲型偏微分方程式を得る。本式の特性曲線は

$$\left| \begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)}, -\frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)} \frac{dy}{dx} - 1 \\ \frac{dy}{dx} - \tan(2\theta + \phi), \tan(2\theta + \phi) \frac{dy}{dx} + 1 \end{aligned} \right| \\ = \frac{\sin(2\theta + \phi) + \sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)} \left(\frac{dy}{dx} - \tan \theta \right) \\ \times \left(\frac{dy}{dx} + \cot(\theta + \phi) \right) = 0$$

これより

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\cot(\theta + \phi) \dots\dots\dots(2.6)$$

が得られ、速度の特性曲線も応力の特性曲線に恒同で、すべり線に一致することになる(文献5)参照。

また、特性曲線に沿っての微分関係は

$$\left| \begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)}, -\frac{du_x}{dx} + \frac{\sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)} \frac{du_y}{dx} \\ \frac{dy}{dx} - \tan(2\theta + \phi), -\frac{du_x}{dx} - \tan(2\theta + \phi) \frac{du_y}{dx} \end{aligned} \right| \\ = -\frac{\sin(2\theta + \phi) + \sin \phi}{\cos(2\theta + \phi)} \left(\frac{dy}{dx} \frac{du_y}{dx} + \frac{du_x}{dx} \right) = 0$$

これより

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \tan \theta \text{ に対して } (\alpha \text{ 線に沿って}) \\ \frac{du_y}{du_x} = -\cot \theta \\ \frac{dy}{dx} = -\cot(\theta + \phi) \text{ に対して } (\beta \text{ 線に沿って}) \\ \frac{du_y}{du_x} = \tan(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

を得る。しかるに、 α, β 線方向の速度 u, v は図-1を参照して

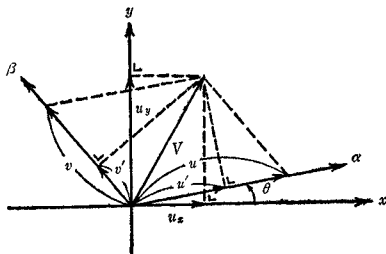


図-1 $u, v; u', v'; u_x, u_y$ の関係

$$\left. \begin{aligned} u_x = u \cos \theta - v \sin(\theta + \phi) \\ u_y = u \sin \theta + v \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

であるから、式(2.7)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} - \sin \phi \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} - v \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} (= \dot{\epsilon}_\alpha) = 0 \\ \sin \phi \frac{\partial u}{\partial S_\beta} - \frac{\partial v}{\partial S_\beta} - u \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} (= \dot{\epsilon}_\beta) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

なる Geiringer 相当式を得る。なお、式(2.9)の α, β 線に沿う縦ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_\alpha, \dot{\epsilon}_\beta$ を求めるに際しての変換式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \cos(\theta + \phi) \frac{\partial}{\partial S_\alpha} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial S_\beta} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\cos \phi} \left\{ \sin(\theta + \phi) \frac{\partial}{\partial S_\alpha} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial S_\beta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.10)$$

である。

また、式(2.9)は図-1の u', v' を用いて R.T. Shield⁹⁾ により、つぎのように与えられた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial S_\alpha} - (u' \tan \phi + v' \sec \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial S_\beta} + (u' \sec \phi + v' \tan \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9')$$

3. 速度場の境界値問題

あるすべり線場(既知であっても、または仮定したものであってもよい)に対して境界速度が与えられた場合の変形域内の速度分布を求める問題である。

直線すべり線場および対数らせんすべり線場に対する速度分布の解析解は山口博士⁸⁾ および R.T. Shield⁹⁾ により明らかにされているが、筆者は数値積分に関する一般論を述べる。なお、本編においては速度不連続はないものとし、これについては次編に詳述する。

図-2を参照して式(2.9)を差分化すると

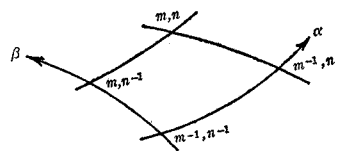


図-2 網目交点の座標

$$\left. \begin{aligned} u_{m,n} - u_{m,n-1} - (v_{m,n} - v_{m,n-1}) \sin \phi \\ - \frac{v_{m,n} + v_{m,n-1}}{2} \cos \phi \cdot \Delta \theta_\alpha = 0 \\ v_{m,n} - v_{m,n-1} - (u_{m,n} - u_{m,n-1}) \sin \phi \\ + \frac{u_{m,n} + u_{m,n-1}}{2} \cos \phi \cdot \Delta \theta_\beta = 0 \\ \theta_{m,n} - \theta_{m,n-1} = \Delta \theta_\alpha, \quad \theta_{m,n} - \theta_{m-1,n} = \Delta \theta_\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

となる。さらに、

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi + \frac{\Delta \theta_\alpha}{2} \cdot \cos \phi &= A, \quad \sin \phi - \frac{\Delta \theta_\alpha}{2} \cdot \cos \phi = A' \\ \sin \phi + \frac{\Delta \theta_\beta}{2} \cdot \cos \phi &= B, \quad \sin \phi - \frac{\Delta \theta_\beta}{2} \cdot \cos \phi = B' \end{aligned} \right\}$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} u_{m,n} &= \frac{u_{m,n-1} - u_{m-1,n} AB - v_{m,n-1} A' + v_{m-1,n} A}{1 - AB'} \\ v_{m,n} &= \frac{u_{m,n-1} B' - u_{m-1,n} B - v_{m,n-1} A' B' + v_{m-1,n}}{1 - AB'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

を得る。

また、式(2.9)'に対する差分化式は

$$\left. \begin{aligned} u'_{m,n} - u'_{m,n-1} - \frac{1}{2} \{ (u'_{m,n} + u'_{m,n-1}) \tan \phi \\ + (v'_{m,n} + v'_{m,n-1}) \sec \phi \} \Delta \theta_\alpha &= 0 \\ v'_{m,n} - v'_{m-1,n} + \frac{1}{2} \{ (u'_{m,n} + u'_{m-1,n}) \sec \phi \\ + (v'_{m,n} + v'_{m-1,n}) \tan \phi \} \Delta \theta_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)'$$

である。

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{\Delta \theta_\alpha}{2} \tan \phi &= C, \quad 1 - \frac{\Delta \theta_\alpha}{2} \tan \phi = D, \quad \frac{\Delta \theta_\alpha}{2} \sec \phi = E \\ 1 + \frac{\Delta \theta_\beta}{2} \tan \phi &= C', \quad 1 - \frac{\Delta \theta_\beta}{2} \tan \phi = D', \quad \frac{\Delta \theta_\beta}{2} \sec \phi = E' \end{aligned} \right\}$$

とにおいて

$$\left. \begin{aligned} u'_{m,n} &= \frac{CC' u_{m,n-1} - EE' u'_{m-1,n} + E(C' v'_{m,n-1} + D' v'_{m-1,n})}{DC' + EE'} \\ v'_{m,n} &= \frac{-E'(C u'_{m,n-1} + D u'_{m-1,n}) - EE' v'_{m,n-1} + DD' v'_{m-1,n}}{DC' + EE'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)'$$

となる。

(1) 第1種境界値問題：Riemann 問題

図-3 に示すように弧 \widehat{AB} および \widehat{AC} に沿って速度分布が与えられた場合に ABCD 内の速度分布を求める問題である。この際、これらの弧上で速度の両成分が与えられる要はなく、i) \widehat{AB} に沿って u , \widehat{AC} に沿って v あるいは ii) \widehat{AB} に沿って v , \widehat{AC} に沿って u が与えられればよいわけである。両場合とも、 \widehat{AB} および \widehat{AC} に沿っての未知成分は式(3.1)により決定される。

各網目交点の速度は式(3.2)を繰り返し用いて唯一に決まる。

なお、 u' v' が与えられる場合には式(3.1)'および

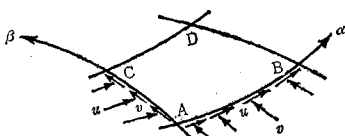


図-3 第1種境界値問題

式(3.2)'を用いることは自明である。

(2) 第2種境界値問題：Cauchy 問題

図-4 のようにすべり線とは一致しないある曲線上で速度両成分が与えられた場合、ABCD 内の速度分布を求める問題である。

各網目交点の速度は式(3.2) (u' , v' に対しては式(3.2)')により求められる。

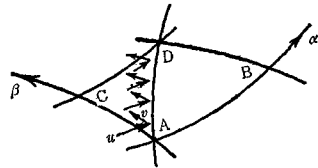


図-4 第2種境界値問題

(3) 混合境界値問題

図-5 のように一つのすべり線上の速度分布とこれと交わりすべり線と一致しないある曲線上で速度両成分の関数関係が与えられた場合である。この場合にも式(1)におけるとどのようにすべり線上の既知成分は一つよい。

各網目交点の速度は式(3.1), (3.2) および $f(u, v) = 0$ を解けば得られる。

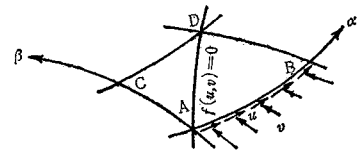


図-5 混合境界値問題

当問題の一例は \widehat{AD} が基礎底面に接している場合である(図-6)。基礎の下降速度を U とすると u, v あるいは u', v' の関数関係は

$$\begin{aligned} U &= u \cos \theta \\ &- v \sin(\theta + \phi) \\ &= \frac{1}{\cos \phi} \{ u' \cos(\theta + \phi) - v' \sin \theta \} \dots\dots\dots(3.3) \end{aligned}$$

である(次編参照)。

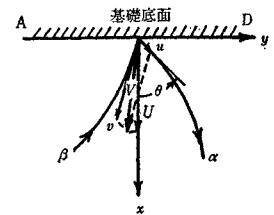


図-6 速度成分の関数関係が与えられる場合の1例

4. 速度の不連続

(1) 速度不連続線上の速度成分の関係

1) 速度不連続線はすべり線に一致せねばならない。

2) $\phi > 0$ では不連続線に垂直方向にも速度不連続が伴うことが D.C. Drucker & Prager⁷⁾, R.T. Shield³⁾, 山口博士⁵⁾ により示された。1) に関する証明は文献 5) にくわしい。筆者は 2) の事項について、さらに、考察を進めることにする。

さて、上記 2) に関しては上記諸者いずれも、ダイレタンシーの観点から論じているが、以下に述べるように、これはさきに示した Geiringer 相当式からただちに導びかれるものである。

さて、右手系の mn 直角座標を採用し、まず、図-7 のように、 m 軸を α 線に一致せしめてみる。同図より、 $u_y = v_m \sin \theta + v_n \cos \theta$ であるから、式 (2.10) を用いて、

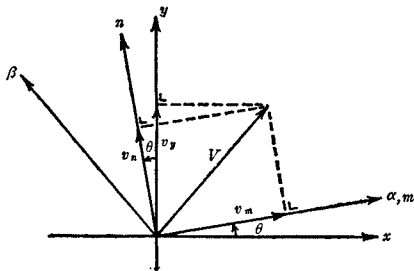


図-7 $\dot{\epsilon}_\beta(v_m, v_n, \theta) = 0$ を求める図

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\cos \phi} \left[\sin(\theta + \phi) \left\{ \sin \theta \frac{\partial v_m}{\partial S_\alpha} + v_m \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \theta \frac{\partial v_n}{\partial S_\alpha} - v_n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} \right\} + \cos \theta \right. \\ &\quad \times \left\{ \sin \theta \frac{\partial v_m}{\partial S_\beta} + v_m \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} + \cos \theta \frac{\partial v_n}{\partial S_\beta} \right. \\ &\quad \left. \left. - v_n \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \right\} \right] \end{aligned}$$

しかるに、 $\dot{\epsilon}_\beta = [\dot{\epsilon}_y]_{\theta=\pi/2} = 0$ であるから

$$\begin{aligned} -\sin \phi \cdot \frac{\partial v_m}{\partial S_\beta} + \cos \phi \frac{\partial v_n}{\partial S_\beta} \\ + (v_m \cos \phi + v_n \sin \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} = 0 \end{aligned}$$

を得る。ところで、文献 5) に「すべり線は応力不連続線とはなりえない」ことが論証されているが、このことと、前記 1) を考え合わせて、結局「速度不連続線上では応力は連続である」ことになり、速度不連続線上で θ が急変することはない。したがって、いま α 線が速度不連続線であるとする、 $dS_\beta \rightarrow 0$ に応じて、 $|\partial v_m / \partial S_\beta| \gg |\partial \theta / \partial S_\beta| = 0$ である。したがって、上式より、

$$\frac{\partial v_n}{\partial S_\beta} = \tan \phi \cdot \frac{\partial v_m}{\partial S_\beta} \quad (\alpha S_\beta \rightarrow 0) \dots \dots (4.1)$$

を得る。 β 線が不連続である場合には n 軸を β 線に一致せしめて、 $u_y = v_m \sin(\theta + \phi) + v_n \cos(\theta +$

$\phi)$ となり、また、 $\dot{\epsilon}_\alpha = [\dot{\epsilon}_y]_{\theta=\pi/2} = 0$ であるから、上と同様にして、

$$\frac{\partial v_m}{\partial S_\alpha} = \tan \phi \cdot \frac{\partial v_n}{\partial S_\alpha} \quad (dS_\alpha \rightarrow 0) \dots \dots (4.1)'$$

が得られる。

なお、式 (4.1) および式 (4.1)' の導出に際して、速度不連続線を仮定して $\partial \theta / \partial S_\alpha$, $\partial \theta / \partial S_\beta$ の項を無視したが、逆に、連続であっても、上記 2 式は $dS_\alpha \rightarrow 0$ あるいは $dS_\beta \rightarrow 0$ に応じて $dv_m \rightarrow 0$, $dv_n \rightarrow 0$ なる連続条件に抵触しない。したがって、これら 2 式は $dS_\alpha \rightarrow 0$, $dS_\beta \rightarrow 0$ に対する Geiringer 相当式にほかならない。あるいは滑らかなすべり線上で $dS_\alpha \rightarrow 0$, $dS_\beta \rightarrow 0$ ならば、 $\partial \theta / \partial S_\alpha$, $\partial \theta / \partial S_\beta$ なる項は Geiringer 式において無視しうることになる。

以上により、式 (4.1) および式 (4.1)' は θ を無考慮のまま、図-8 を参照して

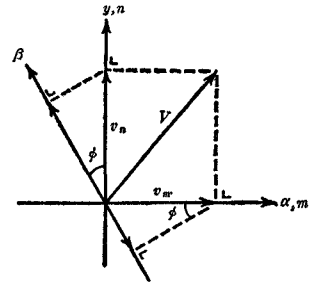


図-8 $dS_\beta \rightarrow 0$ に応ずる $\dot{\epsilon}_\beta(v_m, v_n) = 0$ を求める図

$$\dot{\epsilon}_\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial S_\beta} = \frac{\partial (v_n \cos \phi - v_m \sin \phi)}{\partial S_\beta} = 0 \quad (dS_\beta \rightarrow 0)$$

としても、同等の結果が得られる。

つぎに、 u, v によって表現するには式 (2.9) において $\partial \theta / \partial S_\alpha$ および $\partial \theta / \partial S_\beta$ の項を省略して

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} &= \sin \phi \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} \quad (dS_\alpha \rightarrow 0), \\ \frac{\partial v}{\partial S_\beta} &= \sin \phi \frac{\partial u}{\partial S_\beta} \quad (dS_\beta \rightarrow 0) \dots \dots (4.2) \end{aligned}$$

を得る。

また、 u', v' を用いると式 (2.9)' より

$$\frac{\partial u'}{\partial S_\alpha} = 0 \quad (dS_\alpha \rightarrow 0), \quad \frac{\partial v'}{\partial S_\beta} = 0 \quad (dS_\beta \rightarrow 0) \dots (4.3)$$

となり、非常にすっきりした形をとる。

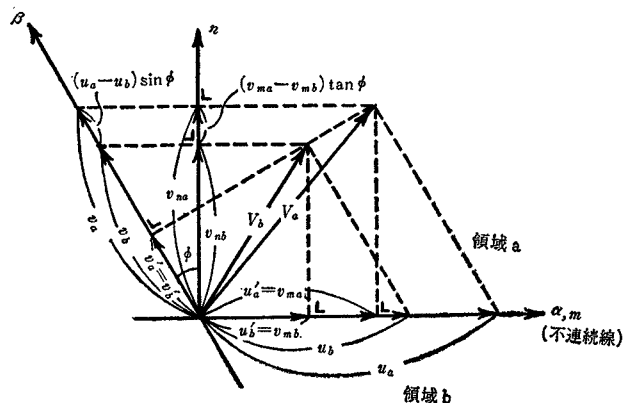


図-9 不連続線上の各速度成分の関係

以上に導いた $u, v; u', v'; v_m, v_n$ の3通りの不連続線上の関係を図示すると図-9のごとくである。

なお、すべり線上に作用する接線応力の方向は α 線に対しては時計まわり、 β 線に対しては反時計まわりであり、後編に詳述するが、速度不連続に関しても、これと矛盾しない、すなわち、塑性仕事率正なる条件を満たすものでなければならない。したがって、速度不連続は図-10に示す4種の状態に限られる(いずれも接線方向の不連続のみを示す)。しかし、上に導いた諸式にはこの条件は考慮されていない。これは Geiringer 相当式が式(2.2)から式(2.3)の $\lambda > 0$ なる条件を無視して、これを消去して得られる宿命によるものである。

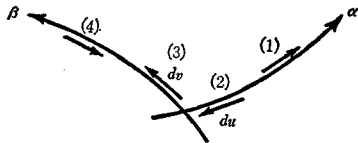


図-10 不連続線上の接線不連続の状態

(2) 速度不連続線が交差する場合について

実際問題にしばしば現われ、また、次章に関連するので、あらかじめ考察しておく。

α, β 不連続線の交点を原点として、その第1, 2, 3および4象限にある各速度成分におおのサフィックス1, 2, 3および4を付する。いま、 α, β 軸の負側の速度成分 u_3, v_3, u_2, v_2 を既知として、正側の成分 u_1, v_1, u_4, v_4 を導くと、式(4.2)を用いて

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_2 + (v_4 - v_3) \sin \phi, & v_1 &= v_4 + (u_2 - u_3) \sin \phi \\ v_2 &= v_3 + (u_2 - u_3) \sin \phi, & u_4 &= u_3 + (v_4 - v_3) \sin \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.4)$$

を得る。これより

$$u_1 - u_4 = u_2 - u_3, \quad v_1 - v_4 = v_2 - v_3 \dots\dots\dots(4.5)$$

となる。したがって、不連続線が交差を受けても不連続量は影響を受けないことになる。

(3) 速度不連続の伝播

(1) および (2) において速度不連続線を横切つての速度成分間の関係を論じたが、本章では不連続線に沿って進むときの不連続成分の状況を明らかにする。

さて、不連続線が α 線であるとして、その α 線のごく近傍の片側の帯状領域を a 、他側のそれを b とすると式(9)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_a}{\partial S_\alpha} - \sin \phi \frac{\partial v_a}{\partial S_\alpha} - v_a \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial u_b}{\partial S_\alpha} - \sin \phi \frac{\partial v_b}{\partial S_\alpha} - v_b \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

が成立する。上下、差し引きすると

$$\frac{\partial(u_a - u_b)}{\partial S_\alpha} - \sin \phi \frac{\partial(v_a - v_b)}{\partial S_\alpha}$$

$$-(v_a - v_b) \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} = 0$$

となる。これに式(4.2)より得られる $v_a - v_b = \sin \phi (u_a - u_b)$ なる関係を代入し、また、 $u_a - u_b = u_D$ とおくと

$$\alpha \text{ 線に沿って } u_D = u_{D0} e^{\theta \tan \phi}$$

を得る。ただし、 u_{D0} は $\theta = 0$ における u_D 値である。

β 線が不連続線である場合についても、同様に行ない、不連続線に沿つての関係式

$$u_D = u_{D0} e^{\pm \theta \tan \phi}, \quad v_D = v_{D0} e^{\pm \theta \tan \phi} \dots\dots\dots(4.6)$$

を得る。上式において、+は α 線、-は β 線に相応する。

なお、前章に述べたごとく、不連続線の交差を受けても、この関係は維持される。

以上に、明らかにされたように、 $\phi = 0$ では速度不連続線に沿って、速度不連続量は一定であるが、 $\phi > 0$ では指数関数的に推移する。

(4) 速度不連続の反射

$\phi = 0$ については速度不連続は剛体面で反射することが知られているが、つぎに $\phi \geq 0$ に対して進考する。

なお、本章の問題は土工学においては後編の例題で取り扱う岩盤上の堆積土の支持力問題や帯状基礎の干渉問題などにしばしば発生する。

さて、図-11において剛体面が α 線あるいは β 線の包絡線となる状態で解の自然境界となるので $-\phi \leq \theta \leq \pi/2$ であるが、剛体面に作用する接線応力の方向から推して $-\phi \leq \theta \leq \pi/4 - \phi/2$ は同図の左側から流動してくる場合に相当し、 $\pi/4 - \phi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ は右方から流動してくる場合に相応する。いずれの場合についても同等の所論が成り立つが、ここでは後者の場合について α 線が速度不連続線であるとして β 線へどのように反射されるかについて詳説する。なお、速度不連続に関しては式(4.3)より推して u, v よりむしろ u', v' を用いる方が簡明であるので、これに従って説明する。

図-12を参照して(δ の正方向は θ の場合と同様)

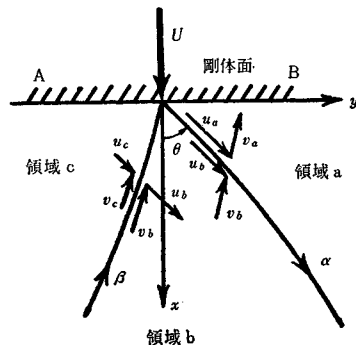


図-11 剛体面における速度不連続の反射

$$\begin{aligned}
 V &= u' / \cos(\theta - \delta) \\
 &= v' / \sin(\delta - \theta - \phi) \dots\dots\dots(4.7)
 \end{aligned}$$

ゆえに、 V の剛体面に垂直方向の速度成分 U_0 は

$$\begin{aligned}
 U_0 &= V \cos \delta \\
 &= u' \cos \delta / \cos(\delta - \theta) \\
 &= u' (\cos \theta - \tan(\delta - \theta) \times \sin \theta) \dots\dots\dots(4.8)
 \end{aligned}$$

一方、式 (4.7) より

$$\tan(\delta - \theta) = \frac{v' / u' + \sin \phi}{\cos \phi}$$

であるから

$$U_0 = \frac{1}{\cos \phi} (u' \cos(\theta + \phi) - v' \sin \phi) \dots\dots(4.9)$$

となる。

ここで、領域 a, b および c の剛体面に垂直方向の速度成分をそれぞれ $U_a = lU, U_b = mU, U_c = nU$ とおく (ただし、 U は剛体面のその面に垂直方向の速度成分)。ここで、領域 a および c については $U_a \geq U, U_c \geq U$ でなければならないので、 $l \geq 1, n \geq 1$ である。なお、上流側速度 $U_a > U$ なる場合は以下の a) 節の所論により明らかになるが、その上流側ですでに同節に述べる不連続線の交差を受け剛体面との間に空げきを生じた場合に起こる (図-13)。

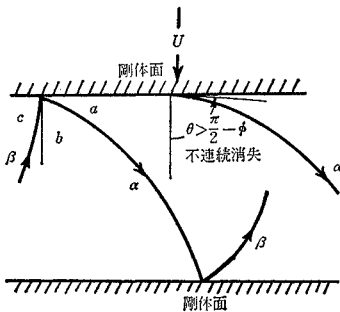


図-13 $U_a > U$ なる場合の1例

さて、式 (4.9) より領域 a, c について

$$\begin{aligned}
 U \cos \phi &= \frac{1}{l} (u_a' \cos(\theta + \phi) - v_a' \sin \theta) \\
 &= \frac{1}{n} (u_c' \cos(\theta + \phi) - v_c' \sin \theta) \dots\dots(4.10)
 \end{aligned}$$

を得る。他方、式 (4.3) より

$$v_a' = v_b', u_b' = u_c' \dots\dots\dots(4.11)$$

でなければならないので

$$\left(\frac{u_a'}{l} - \frac{u_b'}{n} \right) \cos(\theta + \phi) - \left(\frac{v_b'}{l} - \frac{v_c'}{n} \right) \sin \theta = 0 \dots\dots\dots(4.12)$$

なる速度不連続反射式を得る。なお、本式は u, v を用いると

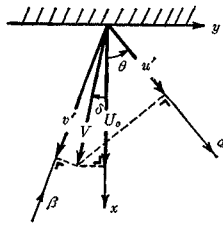


図-12 U_0 と u', v' の関係

$$u' = u - v \sin \phi, v' = v - u \sin \phi \dots\dots\dots(4.13)$$

を考慮して

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{u_a}{l} - \frac{u_b}{n} \right) \{ \sin \phi \sin(\theta + \phi) - \cos \theta \} \\
 &+ \left(\frac{v_b}{l} - \frac{v_c}{n} \right) \sin \theta \cos \phi = 0 \dots\dots\dots(4.14)
 \end{aligned}$$

となる。

式 (4.12) または式 (4.14) および本編 (1) 章の終りに述べた塑性仕事率正なる条件に適合する 図-10 の速度不連続の方向を吟味して l, m, n および θ の各値について以下の本章の問題を詳察する。

a) $-\phi \leq \theta < 0$ または $\pi/2 - \phi < \theta \leq \pi/2$ の場合

前述にしたがい、右方から流動してくる場合、すなわち、 $\pi/2 - \phi < \theta \leq \pi/2$ について説明する。

図-14 において $\theta - (\pi/2 - \phi) > 0$ 、さらに、図-10 より推して V_b は直線 \overline{GI} 上になければならないので、 $U_b > U_a$ である。また、 V_c は \overline{LJ} 上になければならないが、変形は最小塑性仕事率にしたがう (当然のことながら速度不連続も正なる塑性仕事を行なう) ので可能な最小値として L 点に決まる。すなわち、 $V_c = V_b$ となり速度不連続は反射されることがわかる。

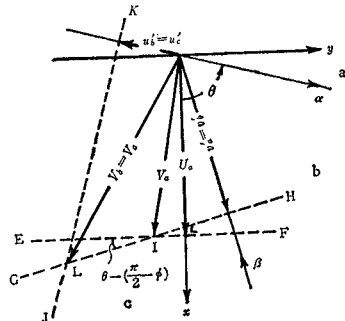


図-14 $\frac{2}{\pi} - \phi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における速度不連続の反射

なお、 $U_c > U$ となるので、瞬間的に剛体面との間に空げきが生じることになる。

以上の事項は $-\phi \leq \theta < 0$ に対してもまったく同等に論証しうる。

b) $\theta = 0$ または $\pi/2 - \phi$ の場合

図-14 において $\theta - (\pi/2 - \phi) = 0$ となり、 \overline{GH} が \overline{EF} に一致する場合であるが、この場合にも a) と同等の所論により速度不連続が消失することがわかるが、本場合には $U_a = U_b = U_c$ となるので、空げきは生じない。

c) $0 < \theta < \pi/4 - \phi/2$ または $\pi/4 - \phi/2 < \theta < \pi/2 - \phi$ の場合

後者の場合について説明する。図-15 において $\theta - (\pi/2 - \phi) < 0$ さらに V_b は \overline{GI} 上になければならないので $U_b < U_a$ である。

④ $U_b < U$ の場合：図-15 において V_c は \overline{LJ} 上

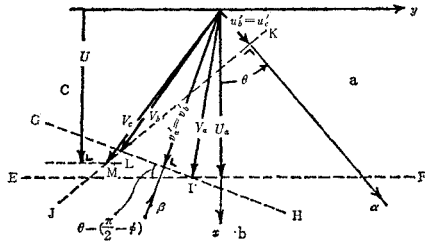


図-15 $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2} - \phi$ における速度不連続の反射

になければならないが、さらに $U_c \geq U$ であるので最小塑性仕事率の原則にしたがい、 M 点をとる。不連続の反射量については $U_c = U$ より $n=1$ を式 (4.12) または式 (4.14) に代入して得られる。

② $U_b \geq U$ の場合：図-15 において $V_c = V_b$ となるので不連続は消失する。

d) $\theta = \frac{\pi}{4} - \phi/2$ の場合

この場合には x 軸に関して α, β 線が対称となるが、剛体面が完全滑で左右いずれからも流動しうる境界状態である。 $U_a > U$ の場合には c) とまったく同等の結果となる。なお、 $U_a = U$ なる場合には図-15 より推して $U_c = U$ となり式 (4.12) または式 (4.14) に $l=n=1$ を代入することにより、速度不連続量がそのまま反射されることがわかる。

5. 速度場とホドグラフ (Hodograph)

物理平面 (xy 面) 上の各点 (x, y) の速度 (u_x, u_y) を u_x, u_y を座標軸とする平面に表示することは A.P. Green⁹⁾ によって提案されたのに始まり、W. Prager⁹⁾ によりホドグラフと称されたが摩擦性体に対してはいまだにその適用に至っていない。これは序論に述べたごとき理由によるものと思われる。

図-16 において、 P 点の速度を V とすれば、 P 点はホドグラフ面上で V を束縛ベクトルとする P' 点に写像

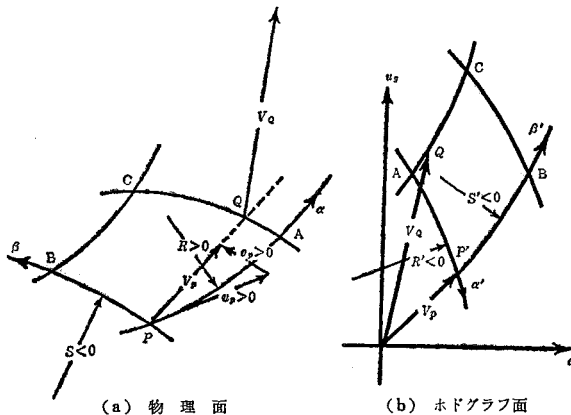


図-16 物理面上の点の速度のホドグラフ面への写像

される。さらに、物理面上の α および β 線上の各点の速度がそれぞれホドグラフ面上の曲線 α' および β' に写像されるとすると式 (2.7) より α と α' あるいは β と β' はたがいに直交し、 α' および β' 線もまた $\pi/2 \pm \phi$ なる等角網目を形成する。この特性を用いれば、3. に述べた数値積分の代りに作図法により、物理面上の各点の速度をホドグラフ面上に求めることができる。なお、 α' および β' は右手系に選び α' の方向は α 曲線に対して時計まわりに $\pi/2$ の方向にとるものと約束する。

なお、速度不連続はホドグラフ面上では、つぎのように表われる。図-17 (a) において、 α 線が速度不連続線であるとする。ある β 線とこれとの交点 P における領域 a 側の速度を u_a, v_a 、また、 b 側のそれを u_b, v_b とすると同図 (b) に示すように不連続速度 V_D の方向は P 点における β 線に垂直、あるいは β' 線の接線方向となる。したがって、物理面上で β 線に沿って進み、 P 点で α 不連続線を横切る際、ホドグラフ面上では β' 線はその接線方向に P_b から P_a へ飛躍する。この飛躍量が速度不連続線に沿って指数関数的に変化することは前編 (3) より明らかである。

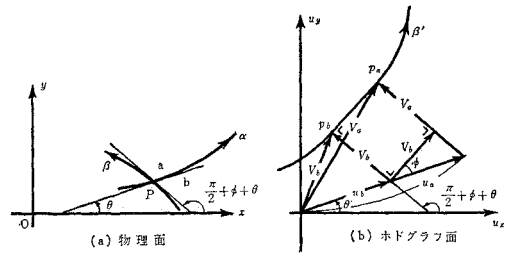


図-17 速度不連続線上における不連続

なお、すべり線解法においては、正確な速度場を把握せねばならないことはむしろ、まれで、一般に、剛体面との相対運動の有無ないしはその方向、速度不連続線の剛塑性境界との交差の有無、塑性仕事率正なることの検証などの大まかな速度場が把握しえればよい場合が多く、したがって、3. に述べた面倒な数値計算を実施しなくとも、 α, β 線と α', β' 線の直交関係という特性にしたがい大まかなホドグラフを描く手法は有効な便法であろう。

6. 塑性仕事率正なる検証法

速度場を求めるには 3. で述べた Geiringer 相当式の数値積分による方法および前編のホドグラフ法の二通りがあるが、いずれも、根源において、 $\lambda > 0$ なる条件を無視して式 (2.2) から得られる特性にしたがうものである。したがって、全境界条件を満たす速度場が得られたら、最後に、変形域内の全要素について $\lambda > 0$ なる条件に抵触しないものであるか否かを検証し

ておかねばならない。もし、この条件を満たす速度場が見出されないならば、その仮定すべり線場は正解として採用しえないことになる。なお、この $\lambda > 0$ なる条件は応力とひずみ速度の符号が一致すべき条件、すなわち、つぎに示すように塑性仕事率正なる条件なのである。

式 (2.2) および $\dot{\gamma}_{sn}$ (すべり線の接線、法線方向に関するせん断ひずみ速度) を考慮して、単位容積当たりの塑性仕事率 \dot{W} は

$$\dot{W} = \sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + 2\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} = \lambda \cos \phi \dots \dots \dots (6.1)$$

$$= 2c \dot{\gamma}_{sn} \dots \dots \dots (6.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{\cos \phi} \left[\{ \sin(\theta + \phi) \cos \theta + \cos(\theta + \phi) \sin \phi \} \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} + \{ \cos^2(\theta + \phi) - \sin^2(\theta + \phi) \} \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} \right. \\ \left. + \{ u \cos(2\theta + \phi) - v \sin(2\theta + \phi) \} \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial u}{\partial S_\beta} - \sin(2\theta + \phi) \frac{\partial v}{\partial S_\beta} \right. \\ \left. - \{ u \sin 2\theta + v \cos(2\theta + \phi) \} \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \right] \dots \dots \dots (6.3) \end{aligned}$$

を得る。これより

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{sn} = [\dot{\gamma}_{xy}]_{\theta=0} = \frac{1}{\cos \phi} \left[\sin \phi \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} + (u \cos \phi - v \sin 2\phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial S_\beta} - \sin \phi \frac{\partial v}{\partial S_\beta} - v \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \right] \end{aligned}$$

となる。これに、式 (2.9) を考慮すると

$$\dot{\gamma}_{sn} = \cos \phi \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} + (u - v \sin \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} + \cos \phi \frac{\partial u}{\partial S_\beta} + (u \sin \phi - v) \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \dots \dots \dots (6.4)$$

と変換される。

(1) 流線速度法

これは $\phi = 0$ に対して、W. Prager が提案した方法である。

式 (6.4) において、さらに式 (2.9) を考慮して $\partial \theta / \partial S_\alpha, \partial \theta / \partial S_\beta$ を消去すると

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{sn} = \frac{1}{v \cos \phi} \left[(u - v \sin \phi) \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} + (v - u \sin \phi) \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} \right] \\ + \frac{1}{u \cos \phi} \left[(u - v \sin \phi) \frac{\partial u}{\partial S_\beta} \right. \\ \left. + (v - u \sin \phi) \frac{\partial v}{\partial S_\beta} \right] \dots \dots \dots (6.5) \end{aligned}$$

となる。しかるに、

$$V = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \sin \phi}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S_\alpha} = \frac{1}{V} \left\{ (u - v \sin \phi) \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} + (v - u \sin \phi) \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} \right\} \\ \frac{\partial V}{\partial S_\beta} = \frac{1}{V} \left\{ (u - v \sin \phi) \frac{\partial u}{\partial S_\beta} + (v - u \sin \phi) \frac{\partial v}{\partial S_\beta} \right\} \end{aligned} \dots \dots \dots (6.6)$$

を得る。これを式 (6.5) に代入すると

$$\dot{\gamma}_{sn} = \frac{V}{uv \cos \phi} \left(u \frac{\partial V}{\partial S_\alpha} + v \frac{\partial V}{\partial S_\alpha} \right) \dots \dots \dots (6.7)$$

となる。一方、 V 方向の線素長を S とすると

$$\frac{dV}{dS} = \frac{\partial V}{\partial S_\alpha} \cdot \frac{dS_\alpha}{dS} + \frac{\partial V}{\partial S_\beta} \frac{dS_\beta}{dS}$$

で表わされる。これにより $\dot{W} > 0$ は $\lambda > 0$ あるいは $\dot{\gamma}_{sn} > 0$ に相通することになる。

$\phi = 0$ に対しては W. Prager¹⁰⁾ および A.P. Green¹¹⁾ が、工学上の最大せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ の符号をチェックしたのに対して、筆者は $\phi \geq 0$ に対して、以下に述べるように、 $\dot{\gamma}_{sn} (= 2\dot{\gamma}_{sn})$ を調らべる手法を考察した。当然のことながら $\phi = 0$ ならば $\dot{\gamma}_{sn} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ である (以下工学上のせん断ひずみ速度を太文字で示す)。

さて、 $\dot{\gamma}_{xy} = \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x$ に式 (2.8) および式 (2.10) を用いると

$$= \frac{\partial V}{\partial S_\alpha} \cdot \frac{u}{V} + \frac{\partial V}{\partial S_\beta} \cdot \frac{v}{V}$$

であるから、結局、次式を得る。

$$\dot{\gamma}_{sn} = \frac{V^2}{uv \cos \phi} \left(\frac{dV}{dS} \right) \dots \dots \dots (6.8)$$

これは W. Prager 式に $\cos \phi$ が付加された形であるが、彼の方法とまったく同様に検証しうる。すなわち、 u, v および dV/dS の正負が知れば、 $\dot{\gamma}_{sn}$ の符号がただちに判明する。図-16 においては u_P, v_P はともに正である。また、 dV/dS の正負については V_Q またはその延長線上の近傍点 $Q(u, v$ の正負が変化しないことが要求されるから、描かれたもっとも近いすべり線との交点を用いればよい) の合速度 V_Q と V_P の差 $V_Q - V_P$ の正負と同等であるから、図-16 の場合には正である。結局、同図では $\dot{\gamma}_{sn}$ は正、すなわち、塑性仕事率正なる条件を満たしていることになる。

なお、 $\dot{\gamma}_{sn}$ の分母 u または v が零なる場合には Prager の提案にしたがって、剛体的平行運動を重ね合わせればよい。

(2) 曲率半径法

$\phi = 0$ に対する A.P. Green の提案によるものである。

まず、式 (6.4) より

$$\dot{\gamma}_{sn} = \frac{\cos \phi \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + u - \sin \phi \cdot v}{\frac{\partial S_\alpha}{\partial \theta}} + \frac{\cos \phi \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi - v}{\frac{\partial S_\beta}{\partial \theta}} \dots\dots(6.9)$$

となる。ここで、物理面上の α および β 線の曲率半径をそれぞれ R および S とすれば（その正負は β 線および α 線の正方向に曲率中心があるときに正と約束する）、

$$R = \frac{\partial S_\alpha}{\partial \theta}, S = -\frac{\partial S_\beta}{\partial \theta} \dots\dots(6.10)$$

である。同様に、 α' および β' 線に対して R' および S' とすれば、

$$R' = \frac{\partial S_\alpha'}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\alpha'}{\partial u_x} \frac{du_x}{d\theta} + \frac{\partial S_\alpha'}{\partial u_y} \frac{du_y}{d\theta} \\ = \sin \theta \frac{du_x}{d\theta} - \cos \theta \frac{du_y}{d\theta} \\ = -\cos \phi \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} - u + \sin \phi \cdot v \dots\dots(6.11)$$

同様に、

$$-S' = \frac{\partial S_\beta'}{\partial \theta} = \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \phi \cdot u - v \dots(6.12)$$

となる。

以上の式(6.10)、(6.11)および式(6.12)を式(6.9)に用いると

$$\dot{\gamma}_{sn} = -\frac{R'}{R} + \frac{S'}{S} \dots\dots(6.13)$$

を得る。本式は A.P. Green が $\phi=0$ に対して導いた式とまったく同一で、右辺2項の符号が同一の場合には非常に容易に $\dot{\gamma}_{sn}$ の正負を知りうる。とくに、 u または v が零である場合には本法が前法より有利なことは自明であろう。図-16の場合、 $R>0, S<0; R'<0, S'<0$ であるから、 $\dot{\gamma}_{sn}>0$ である。

式(6.13)の右辺2項 $-R'/R$ と S'/S の符号がたがいに異なる場合について、Greenは剛体的回転運動の重ね合わせを提案したが、つぎにこれについて考察を進める。

図-18のごとく物理面上の任意点 O を中心に時計ま

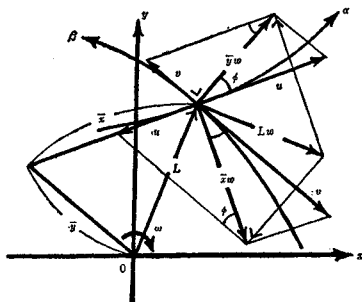


図-18 剛体的回転運動の重ね合わせ

わりに角速度 ω の剛体的回転運動を重ね合わせ、この回転運動により、 α, β 線方向の速度がそれぞれ u_R, v_R になるとすれば、

$$u_R = u + (\bar{y} - \bar{x} \sin \phi)\omega / \cos \phi, \\ v_R = v + (\bar{y} \sin \phi - \bar{x})\omega / \cos \phi \dots\dots(6.14)$$

である。ここに、 \bar{x}, \bar{y} はMikhlin座標である。同様に、 R', S' に対して R_R', S_R' を定義し、式(6.11)および式(6.12)において、 u, v の代りに式(6.14)の u_R, v_R を用いると

$$\left. \begin{aligned} R_R' &= R' + \omega \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} + \bar{x} \tan \phi - \frac{\bar{y}}{\cos \phi} + \sin \phi \right. \\ &\quad \left. \times \left(-\frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} - \frac{\bar{x}}{\cos \phi} + \bar{y} \tan \phi \right) \right] \\ S_R' &= S' + \omega \left[-\frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} - \frac{\bar{x}}{\cos \phi} + \bar{y} \tan \phi + \sin \phi \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} + \bar{x} \tan \phi - \frac{\bar{y}}{\cos \phi} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(6.15)$$

を得る。

他方、

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin (\theta + \phi) \\ y &= \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos (\theta + \phi) \end{aligned} \right\}$$

であるから、

$$R = \frac{\partial S_\alpha}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial S_\alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ = \frac{\cos (\theta + \phi)}{\cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\sin (\theta + \phi)}{\cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \theta} + \bar{x} \tan \phi - \frac{\bar{y}}{\cos \phi} \dots\dots(6.16)$$

$$-S = \frac{\partial S_\beta}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\beta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial S_\beta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ = -\frac{\sin \theta}{\cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} + \frac{\bar{x}}{\cos \phi} - \bar{y} \tan \phi \dots\dots(6.17)$$

となる。これにより、式(6.15)は

$$R_R' = R' + \omega(R + S \sin \phi), \\ S_R' = S' + \omega(S + R \sin \phi) \dots\dots(6.18)$$

となり、式(6.13)に対して、 $R' \rightarrow R_R', S' \rightarrow S_R'$ を施すと剛体的回転運動を与えた場合の検証式

$$\dot{\gamma}_{sn} = -\frac{R' + \omega(R + S \sin \phi)}{R} + \frac{S' + \omega(S + R \sin \phi)}{S} \dots\dots(6.19)$$

を得る。

上式はGreen式に $S \sin \phi$ および $R \sin \phi$ が付加された形であるが、 ϕ が大きくなると角速度 ω の選択が多少、容易さを欠くので、 $-R'/R$ と S'/S の符号が異なる場合には、流線速度法にしたがうのが順当であろう。

以上、本編においては $\phi \geq 0$ なる場合に対する塑性仕

事率正なる検証法を明らかにしたが、結果的に、 $-R'/R$ と S'/S の符号が異なる場合を除いて、 ϕ 値によらず、Prager および Green 法がそのまま適用しうることが把握しえた。

7. 応用例解

例解一 1 : 底面の滑らかな帯状基礎支持力に対する初期の解

速度分布の解析解については山口博士⁶⁾ および R.T. Shield³⁾ が与えている。ここでは hodograph を描き、それにより $\dot{\gamma}_{sn} > 0$ を調べてみる。

さて、図-19(a) の左半部 ABODC について考える。

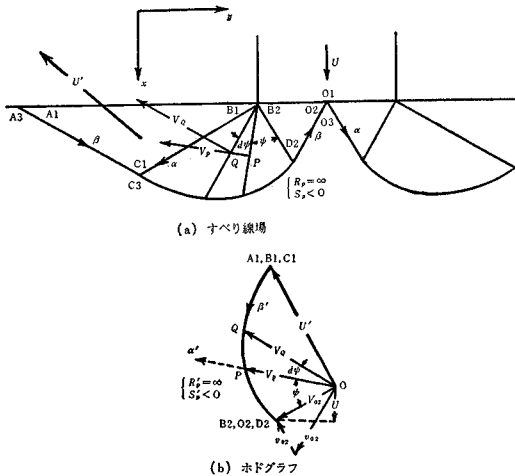


図-19 底面滑帯状基礎支持力に対する初期の解

02 部分は 4. (4) d) の $U_a = U_b = U$ なる領域 c に相当し、式 (3.3) より

$$U = u_{02} \cos(\pi/4 - \phi/2) - v_{02} \sin(\pi/4 + \phi/2) \dots\dots\dots(7.1)$$

でなければならない。また、式 (4.2) より

$$u_{02} - u_{03} = (v_{02} - v_{03}) \sin \phi \dots\dots\dots(7.2)$$

ここで、 $u_{03} = v_{03} = 0$ であるから、式 (7.1)、(7.2) より

$$u_{02} = -\frac{U \tan \phi}{\sin(\pi/4 - \phi/2)},$$

$$v_{02} = -\frac{U}{\sin(\pi/4 - \pi/2) \cos \phi} \dots\dots\dots(7.3)$$

を得る。なお、基礎底面 BO 下の速度分布の仮定の仕方種々の速度解が得られ、解は唯一ではないが、ここでは式 (7.3) で与えられる一定値をとるものとする。したがって、BOD 内は直線すべり線場であるから、式 (2.9) より推して、この一定速度をとることになる。

BOD 内の速度が定まれば、以後は 5. に述べた物理面上の α, β 曲線と hodograph 面の α', β' 曲線の直交関係により、図-19 (b) のごとく全変形域内の速度が図

解的に決定される。なお、ODCA は速度不連続線であるから、4. (3) の所論により式 (4.6) からただちに解析解が得られることは自明である。

塑性仕事率の符号に関しては、実際には変形全域について検討せねばならないが、ここでは点 P について説明する。

a) 流線速度法

点 P においては $u_P < 0, v_P < 0$ である。また、点 P の近傍点 Q (もちろん、 $u_Q < 0, v_Q < 0$ である) の合速度 V_Q は V_P より大であるので、6. に述べたごとく、 $\dot{\gamma}_{sn} > 0$ となる。ここにおいて始めて、図-16 が正解 (ただし、剛性域内の非破壊応力分布については未知であるので不完全解である) であることが論証されたわけである。

b) 曲率・半径法

同図より $R_P = \infty, S_P < 0, R'_P = 0$ である。また、 α' 線は一点となり、長さは零であるが、その方向は図示の通りであるから $S'_P < 0$ である。式 (6.13) より $\dot{\gamma}_{sn} > 0$ となる。

例解一 2 : L. Prandtl の支持力解 (図-20)

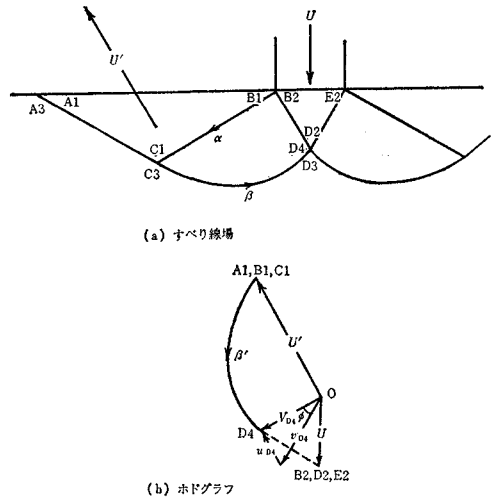


図-20 L. Prandtl の支持力解

本場合にも基礎底面 BE 下の速度分布の仮定の仕方種々の速度解が得られるが、ここでは一定値 U をとるものとする。すなわち、基礎底面下に相対運動がない場合に相当する。したがって、BDE 内の速度は一定値 U である。そこでの u, v を u_0, v_0 とすると

$$u_0 = -v_0 = \frac{U}{2 \cos(\pi/4 - \phi/2)}$$

である。また、BD, DE はそれぞれ α, β 速度不連続線であるから、式 (4.4) の下 2 式から

$$v_0 = v_{D4} + (u_0 - u_{D4}) \sin \phi, u_{D4} = v_{D4} \sin \phi$$

を得る。これと前式より

$$u_{D_4} = -\frac{U \tan \phi}{2 \sin(\pi/4 - \phi/2)}$$

$$v_{D_4} = -\frac{U}{2 \cos \phi \sin(\pi/4 - \phi/2)} \dots \dots \dots (7.4)$$

となる。これより、図-16のごとくホドグラフが描かれる。塑性仕事率については前題とまったく同様に行なえるので、説明は省略する。

例解-3: 干渉状態にある帯状基礎の支持力解

当問題において、基礎底面が完全滑または完全粗なる場合に対するすべり線場は J. Mandel^{(12), (13)} が与えているが、基礎底面が中間の粗度で荷重間隔に比し荷重幅があまり大きくない場合には図-21(a)のすべり線場が仮定しうる。同図において、 r は基礎底面と土との付着力および摩擦角が与えられれば、唯一に決まる角度である。実線で描かれたすべり線は速度不連続線である。

さて、 $D_4 \sim C_3$ の速度は前2例と同様に求められる。 $\pi/4 + \phi/2 - r < \phi$ とし、速度不連続反射の状況は 4. (4) の所論により解析的に求められようが、図解的には図示のごとく決定される。以下、 α, β 線と α', β' 線の直交関係により、全ホドグラフ線図が決定しうる。図-21

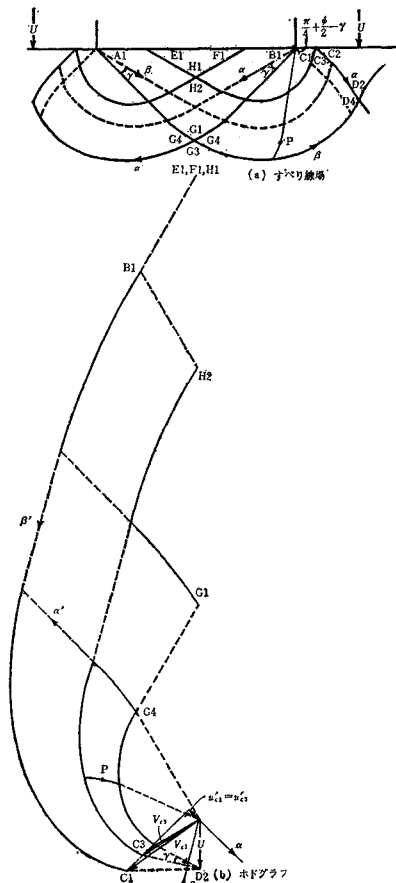


図-21 干渉状態の帯状荷重の支持力解

(b) にその半部を示しているが、物理面とホドグラフでは左右が入れ変わる。なお、ホドグラフ線上、点線は速度不連続による飛躍である。

塑性仕事率に関しては、たとえば(a)図のP点についてみれば、 $R < 0, S < 0$ および $R' > 0, S' < 0$ であるから明らかに塑性仕事率正なる条件を満たしている。ほかの点についても同様に、正なることを検証しうる。なお、速度不連続線上については剛塑性境界 $D \sim C, D \sim G$ においては問題ないが、C点で反射される不連続線上では $v_{c3} > v_{c1}$ なることおよびこの不連続量が式(4.6)より符号を変えないで指数的に変化するため、この線上いずれの個所においても塑性仕事率正なる条件を満たしている。

例解-4: 粗い岩盤上の堆積土の支持力解

基礎底面および岩盤面がともに完全粗で、かつ、基礎幅を W 、堆積土厚を D とするとき、 $D \geq W \cos \phi \cdot \exp$

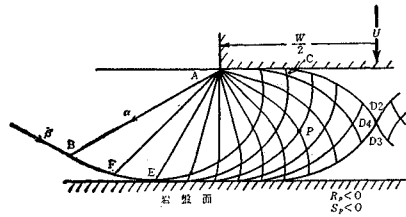


図-22(a) すべり線場

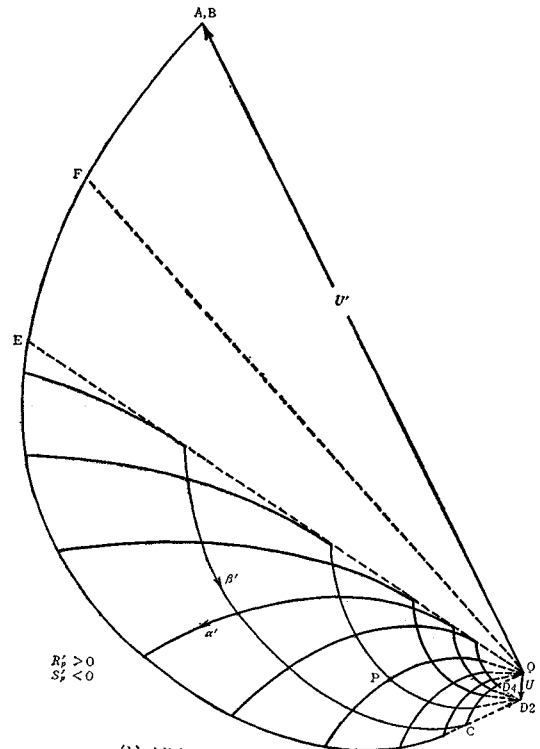


図-22(b) 粗岩盤上の堆積土の支持力解

$\{(\pi/4+\phi/2)\cdot\tan\phi\}/\{2\cos(\pi/4+\phi/2)\}$ なる場合は 図—22 (a) のすべり線場が仮定しうる¹⁴⁾。

\widehat{DC} は速度不連続線であるが、点 C では $\theta=\pi/2$ であるので速度不連続は反射されない。

ホドグラフは前数例と同様にして 図—22 (b) のごとくなり 4.(4) a) 節で述べたように剛体面下の要素の鉛直速度は U より大となり、瞬間的に空げきを生ずることになる。

なお、塑性仕事率に関しては、たとえば点 P について、 $R_p<0, S_p<0; R_p'>0, S_p'<0$ であるので $\dot{\gamma}_{sn}>0$ なる条件を満たしている。

8. 結 言

以上、摩擦性塑性体に対するすべり線解法における仮定すべり線場の正解としての裏付けとなる速度場の求め方を一応の体系として示し得たと思う。ただし、本論は速度の特性曲線がすべり線に一致すべき条件、すなわち、等方、膨張性なる仮定下におけるもので、一般土壌の実状がどの程度、本仮定に適合しうるかについては、多少の不安を感じる。

今後は一般摩擦性材料の実状を検討しつつ、上記条件にとらわれない速度場の諸問題を明らかにしてゆきたいと思う次第である。

本論文に関しては、数書簡を通じて東工大教授山口柏樹博士より幾多のご教示とご示唆を仰いだ。ここに記して厚く謝意を表したい。

参 考 文 献

1) Spencer, A.J.M.: "A Theory of the Kinematics of Ideal Soils under Plane Strain Conditions", J. Mech. Phys. Solids, 1964, Vol. 12, pp. 337-351.

- 2) Mandel, J.: Sur les Equations D'ecoulement des Sols Ideaux en Deformation Plane et le Concept du Double Glissement", J. Mech. Phys. Solids, 1966, Vol. 14, pp. 303-308.
- 3) R.T. Shield: "Mixed Boundary Value Problems in Soil Mechanics", Q. Appl. Math., 1953, Vol. 11, pp. 61-75.
- 4) R.T. Shield: "Stress and Velocity fields in Soil Mechanics", J. Math. Phys., 1954, Vol. 33, pp. 144-156.
- 5) 山口柏樹: "土の塑性力学における応力と速度の不連続性について", 東工大論文報告集, 1967, pp. 1-9.
- 6) 山口柏樹: "塑性流動における速度場の理論", 土木学会論文集, 1959, 63号, pp. 8-16.
- 7) Drucker, D.C. & Prager, W.: "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", Q. Appl. Math., 1952, Vol. 10, pp. 157-165.
- 8) Green, A.P.: "A Theoretical Investigation of the Compression of a Ductile Material between Smooth Flat Dies", Phil. Mag., 1951, Vol. 42, pp. 900-918.
- 9) Green, A.P.: "On the Use of Hodograph in Problems of Plane Plastic Flow", J. Mech. Phys. Solids, 1954, Vol. 2, pp. 73-80.
- 10) Prager, W.: "The Sign of Plastic Power in the Graphical treatment of Problems of Plane Plastic Flow", Quart. Appl. Math., 1955, Vol. 13, pp. 333-335.
- 11) Green, A.P.: "The Plastic Yielding of Notched Bars due to Bending", Mech. Appl. Math., 1953, Vol. 2, pp. 223-239.
- 12) Mandel, J.: "Interference Plastique de Foundations Superficielles", Pro. internationale Conference on Soil Mechanics (Budapest), Akademiai Kiado, 1963, pp. 267-280.
- 13) Mandel, J.: "Interference Plastique de Semelles Filantes", Pro. of the 6th International Conference on soil Mechanics and Foundation Engineering, 1965, Vol. 2, pp. 127-131.
- 14) 橋口公一: "粗い岩盤上の堆積土の支持力に関する塑性論的研究", 土と基礎 (土質工学会誌), 1969, Vol. 17, No. 5.

(1969. 5. 9・受付)