

隅角部の角度と隅角部付近の応力分布との関係

THE STRESS DISTRIBUTION IN TWO-DIMENSIONAL ELASTIC BODY WHICH HAS A SHARP CORNER

岡 林 稔*

By Minoru Okabayashi

1. 緒 言

ある平面領域の境界曲線が鋭い隅角を持っているとき、その隅角部付近の応力分布については、E. Sternberg, W.T. Koiter¹⁾; Von C. Weber²⁾, および多谷虎男³⁾の諸氏の研究が発表されているが、そのいずれもが隅角の内角が 180° より大きい場合のみに注目して議論されている。しかしながら、内角が 180° より小なる場合にも応力分布の状態が顕著な変化を示す角度（以後これを遷移角と呼ぶことにする）が存在することが簡単な考察によってわかる。応力分布のとくに顕著な変化を示す遷移角は大略 146°18' と 257°30' の2つであって著者はそのような角度の隅角を持つ平面領域について、実際に数値を与えて計算した結果を示し、応力分布状態の変化の有様を説明する。

2. 隅角部付近の応力の理論解（隅角の頂点自身は除く）

隅角部の付近には外力の分布はなく、隅角部から離れた所に外力分布があるものとする。この場合の隅角部付近の弾性応力解についての著者の考え方は多谷氏の研究とほとんど全く同じであるので簡単に説明する。

図-1 において隅角A付近の応力状態を表わす応力関数 ϕ は、

$$\phi = U + r^2 V \dots\dots\dots (1)$$

{ U およびは V 平面調和関数
r は原点Aから領域内の任意点までの距離

で表わすことができるから式(1)および $\partial\phi/\partial\theta$ (以後極座標を用いる)の値が

$$\theta = \pm \frac{\alpha}{2}$$

でともに0となる場合を考えればよい。

(A付近の境界上には外力分布がない)

隅角部付近だけに注目すれば

$$U = \sum_k A_k r^{k+1} \sin(k+1)\theta + \sum_l B_l r^{l+1} \cos(l+1)\theta$$

$$V = \sum_m C_m r^{m-1} \sin(m-1)\theta + \sum_n D_n r^{n-1} \cos(n-1)\theta$$

のように表わすことができるであろう。しかし、

$$\theta = \pm \frac{\alpha}{2} \text{ で } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0$$

なる条件を満足するためには、

$$k=m, l=n$$

の場合を除いては、係数がごとごとく零になる。

よって記号 Σ を省略して

$$U = Ar^{m+1} \sin(m+1)\theta + Br^{n+1} \cos(n+1)\theta$$

$$V = Cr^{m-1} \sin(m-1)\theta + Dr^{n-1} \cos(n-1)\theta$$

を考える。さらに後にわかる通り m と n とを区別してもあまり意味がないので以下では

$$\left. \begin{aligned} U &= Ar^{n+1} \sin(n+1)\theta + Br^{n+1} \cos(n+1)\theta \\ V &= Cr^{n-1} \sin(n-1)\theta + Dr^{n-1} \cos(n-1)\theta \end{aligned} \right\} (2)$$

を考える。なお $n=0$ の場合は式(2)を式(1)に代入して結局無応力の状態が得られ、 $n < 0$ の場合は隅角の頂点に無限大の大きさのなんらかの荷重がある場合になるので、これらを除き以後は、

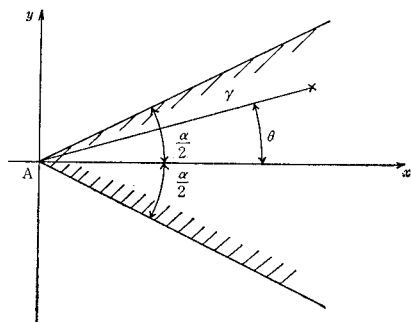


図-1

* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 土木工学科

$$n > 0$$

であるとする。式(2)を式(1)に代入して

$$\phi = r^{n+1} \{ A \sin(n+1)\theta + B \cos(n+1)\theta + C \sin(n-1)\theta + D \cos(n-1)\theta \} \dots\dots\dots(3)$$

を得る。さらに θ で微分して

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r^{n+1} \{ A(n+1) \cos(n+1)\theta - B(n+1) \sin(n+1)\theta + C(n-1) \cos(n-1)\theta - D(n-1) \sin(n-1)\theta \} \dots\dots\dots(4)$$

を得る。この両式が

$$\theta = \pm \alpha/2$$

とともに零とならなければならない。そしてその条件を満足するようにことごとくは零とならない A, B, C および D の存在を確かめればよい。式(3)にこの条件を用いて次式を得る。

$$A \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} + C \sin \frac{(n-1)\alpha}{2} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$B \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + D \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

式(4)にこの条件を用いて次式を得る。

$$A(n+1) \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} + C(n-1) \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$B(n+1) \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} + D(n-1) \sin \frac{(n-1)\alpha}{2} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

式(5)と式(7)とが同時に成立するためには、

$$(n-1) \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} = (n+1) \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{(n-1)\alpha}{2} \dots\dots\dots(9)$$

したがって、 $n \sin \alpha = \sin n\alpha$ (9) を満足する n の場合に限り零ならざる A, C が存在し(このとき $B=D=0$ でなければならない)

$$\frac{A}{C} = - \frac{\sin \frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2}} = - \frac{(n-1) \cos \frac{(n-1)\alpha}{2}}{(n+1) \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}} \dots\dots\dots(10)$$

となる。式(6)と式(8)とが同時に成立するためには

$$(n-1) \sin \frac{(n-1)\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} = (n+1) \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \dots\dots\dots(11)$$

したがって $-n \sin \alpha = \sin n\alpha$ (11) を満足する n の場合に限り0ならざる B, D が存在し(このとき $A=C=0$ でなければならない)

$$\frac{B}{D} = - \frac{\cos \frac{(n-1)\alpha}{2}}{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2}} = - \frac{(n-1) \sin \frac{(n-1)\alpha}{2}}{(n+1) \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}} \dots\dots\dots(12)$$

となる。以上を総合するとつぎのようになる。

i) $\sin n\alpha = n \sin \alpha$ ($n > 0$)

を満足する n に対しては

$$A = K \sin \frac{(n-1)\alpha}{2}, C = -K \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}, B = D = 0$$

なる応力状態は可能である。すなわち

$$\phi = Kr^{n+1} \left\{ \sin \frac{(n-1)\alpha}{2} \sin(n+1)\theta - \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin(n-1)\theta \right\} \dots\dots\dots(13)$$

なる応力関数が考えられる。この関数は θ に関して奇関数である。

ii) $\sin n\alpha = -n \sin \alpha$ ($n > 0$)

を満足する n に対しては

$$B = L \cos \frac{(n-1)\alpha}{2}, D = -L \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}, A = C = 0$$

なる応力状態は可能である。すなわち

$$\phi = Lr^{n+1} \left\{ \cos \frac{(n-1)\alpha}{2} \cos(n+1)\theta - \cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos(n-1)\theta \right\} \dots\dots\dots(14)$$

なる応力関数が考えられる。この関数は θ に関して偶関数である。

iii) 外力が隅角部付近に θ に関して対称な応力状態を生ぜしめるようなものであるときは式(14)の状態が生ずる可能性があり、 θ に関して逆対称な応力状態を生ぜしめるようなものであるときは式(13)の状態が生ずる可能性がある。一般には両者がともに生ずる可能性がある。式(9)および式(11)を満足する n を求めるため横軸に n 、縦軸に y をとって

$$y = \sin n\alpha, y = \pm n \sin \alpha$$

の表わす曲線を描きその交点を求めてみる ($\alpha = \pi$ は隅角といえないから除く)、(α を度で表わしたものを以後 φ と書く。 $\varphi = 180\alpha/\pi$ 。)

i) α が比較的小さいとき

この場合は、図-2のごとく $n=1$ にのみ交点がある。この交点は α の値いかにかわからず、必ず存

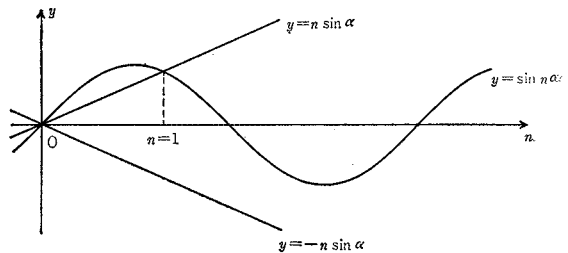


図-2

在し、式 (13) に代入してみるとわかる通り $\phi=0$ となって無応力の状態を表わす。よって以後は $n=1$ には注目しないことにする。 α が小さければこれ以外に交点はないから隅角部付近は無応力の状態にある。

ii) α が比較的大きいが π より小さいとき
この場合はまず

$$y = -n \sin \alpha \quad \text{と} \quad y = \sin n \alpha$$

とが交わるようになる。この両者が始めて交わる(接する)ときの α が1つの遷移角であるが、これは

$$\sin n \alpha + n \sin \alpha = 0$$

が n について重根を持つときの最小の n の場合を求めればよいから、これとこれを n で微分した

$$\alpha \cos n \alpha + \sin \alpha = 0$$

とを連立させて解けば求められる。そのときの α を α_1 と書けば計算の結果

$$\alpha_1 \doteq 2.5535658 (\varphi_1 = 146^\circ 18' 31'') \quad (n \doteq 1.76)$$

である。 α が α_1 より大きくなれば両者は交わるから隅角部付近で θ に関して対称な応力が生じ得る。このときの n は

$$2 > n > 1$$

であり、式 (14) のカッコ内の係数

$$\cos \frac{(n-1)\alpha}{2} \quad \text{および} \quad \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}$$

はいずれも零とはならず応力度は r^{n-1} 程度の大きさの値を持つ。したがって α_1 を境にしてかなり顕著な応力状態の変化が起こるものと考えられる。たとえばラーメンの隅角部で隅角の2等分線上の垂直応力度は α が α_1 より小さければ図-3のような分布、 α が α_1 より大きければ図-4のような分布が生じ得ることが推定される。 α がもっと大きくなれば、 $y = \sin n \alpha$ と $y = n \sin \alpha$ が交わるようになる。これらが初めて接するときは

$$\sin n \alpha - n \sin \alpha = 0, \quad \alpha \cos n \alpha - \sin \alpha = 0$$

を連立させて解き、 n の最小の場合をとればよい。
($\varphi \doteq 159^\circ 53' 8.5''$, $n \doteq 2.78$)

これも1つの遷移形であって、 φ がこの角度を越えると θ に関して逆対称な応力状態が生じ得る。し

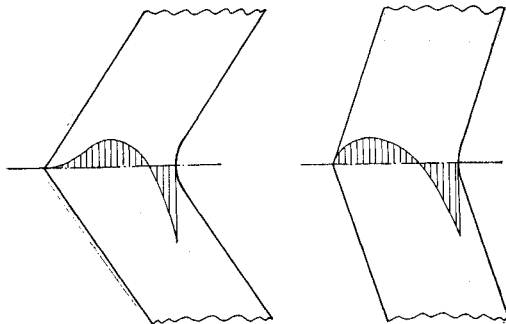


図-3

図-4

かしこのときは、

$$n-1 > 1$$

であるからこの角度を境にしては余り顕著な変化が起こるとは考えられない。

iii) α が π より大きいとき

α が π より少し大きい程度なら図-5が得られる。

n_1 は1より小であるから $n_1-1 < 0$ となって隅角部(小さな曲線が挿入されているものとする)には大きな応力集中が起こる。 n_2 は1より大であるから n_1 にくらべればそれによる応力はあまり問題にならない。この n_1 に対する応力状態は θ に関して対称な応力状態である。 α がさらに大きくなると図-6が得られる。この場合は n_2 も1より小さくなるから問題である。 n_2 が1より小さくなる限界の角度も一つの遷移角であるがそれは $n=1$ で $y = n \sin \alpha$ と $y = \sin n \alpha$ が接する場合で計算すると

$$\alpha = \tan \alpha$$

が成立するときであることがわかる。このときの α を α_2 と書けば

$$\alpha_2 \doteq 4.4934095 (\varphi_2 \doteq 257^\circ 27' 12'')$$

である。 α が α_2 より大きくなると隅角部付近に θ に関して逆対称の大きな応力状態が生ずる。ただしこのときの応力関数 ϕ は式 (13) であって、ちょうど $n=1$ なら $\phi=0$ となって無応力状態であり、そうでなくても n が1に非常に近ければ式 (13) 右辺のカッコ内の値はきわめて小さい。応力度は r^{n-1} の程度であって r が小さければ r^{n-1} は大きくなるが、係数が小さくなるため応力度はあまり大きくならないということが考えられる。さらに ϕ が θ に関して奇関数であるから隅角の2等分線上

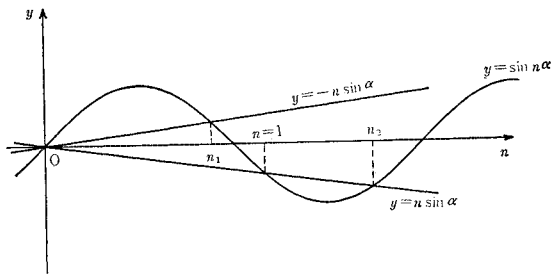


図-5

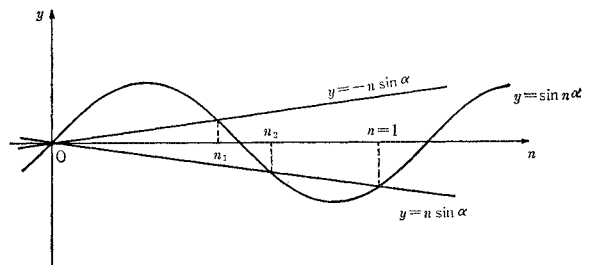


図-6

の応力度はせん断応力度 τ のみが0でない応力度であって、隅角の尖端に曲線が挿入されていれば、そこでの τ は0に低下させられる(鋭い隅角であれば、理論上は無限大になるべきもの)のでこれも応力度をあまり大きくさせない原因となる。

隅角部付近に対称な応力状態のみを起こさせるような外力分布であれば応力集中は内角が大きくなるにしたがって漸増するだけで、途中に顕著な変化は起こらない。しかし逆対称な応力状態を起こさせるようなもの(一般には両者を含んでいる)であれば α_2 を境にしてやや顕著な変化が起こる。

3. 内角が 146° 前後の隅角を有する領域の例題

領域が無限に拡がるくさび状なら Mellin 変換を用いれば応力計算ができるが、この計算はかなり面倒であるのと、隅角を持つくさび以外の領域に対しては応用できないので、近似有理型関数を用いて文献 4) にしたがって計算する。そのためにまず近似有理型関数の求め方を説明する。

a) $Z(x+iy)$ 平面の領域を ζ 平面の単位円の内部に等角に写像する関数を

$$Z=F(\zeta)$$

としこれを ζ について展開したものを

$$Z=a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\dots \dots \dots (15)$$

とする。ただし a_0 は図形を平行移動させるだけであるから以後は無視する。各係数の絶対値が比較的早く0に収束するならば(Z 平面内の領域が隅角を持たずまたあまり細長くないとき)つぎのようにおく。

$$Z=\sum_n \frac{A_n}{1-r_n\zeta} \dots \dots \dots (16)$$

いまたとえ $n=5$ とすれば式(15)の各係数を用いて

$$a_i x_1 + a_{i+1} x_2 + a_{i+2} x_3 + a_{i+3} x_4 + a_{i+4} x_5 + a_{i+5} = 0 \quad (i=1,2,3,4,5) \dots \dots \dots (17)$$

なる連立方程式を作りこれを解いて x_1, x_2, \dots を定める。

つぎに

$$\lambda^5 + x_5 \lambda^4 + x_4 \lambda^3 + x_3 \lambda^2 + x_2 \lambda + x_1 = 0$$

を解いて5個の根(複素数の場合もある)を求めたらそれらが r_1, r_2, \dots である。ただし、それらの絶対値が1を越えてはならないので、もし1を越えるものがあれば n の値を変えて同じ計算を試みる。 $r_n(n=1,2,\dots)$ が定まれば

$$r_1^k A_1 + r_2^k A_2 + r_3^k A_3 + r_4^k A_4 + r_5^k A_5 = a_k \quad (k=1,2,3,4,5)$$

より $A_n(n=1,2,\dots)$ が定まる。よって式(16)が定まるが、式(16)を ζ に関して展開したものは、 ζ の $2n$ 次の項の係数までは式(15)のそれと一致し、それ以上

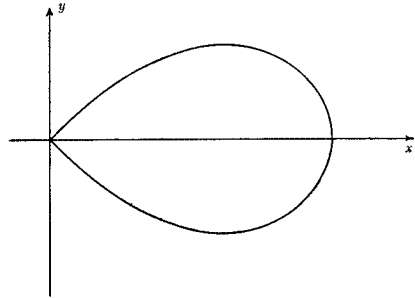


図-7

の項の係数についても誤差は少ない。

b) つぎに内角が 146° 前後の隅角を有する領域について考える。このときはそのような角度の無限に広いくさび状領域は内角が 180° 以下であるため、文献 4) のようには簡単に近似関数を求めることはできない。よって簡単のため

$$Z=(1-\zeta)^\beta \dots \dots \dots (18)$$

(隅角部の内角 φ を度で表わしたとき $\beta=\frac{\varphi}{180}$ である)

で表わされる領域を考える。これは図-7に示すような Lemniscate 型の領域を表わし式(18)を展開した。

$$Z=a_0+a_1\zeta+\dots$$

の係数は急速には0に収束しない。

それは

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \beta(1-\zeta)^{\beta-1}$$

が $\zeta=1$ で無限大になるためである。

そこでつぎのようなことを考える。式(18)の展開係数は相当高次の項でも Γ 関数を用いれば容易に求められるから、つぎの3群の係数を求める。

$$\{8^m \times (1+m) - 1\} \text{ 次}$$

の項の係数をとり

第1群 $\dots n=0, m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

第2群 $\dots n=1, m=1, 2, 3, 4$

第3群 $\dots n=2, m=1, 2, 3, 4$

とする。

(第1群だけ8個とったのは低次のところでとくに精度をよくするためである)

第3群の4個の係数に対して

$$\frac{A_1}{1-r_1\zeta} + \frac{A_2}{1-r_2\zeta} \dots \dots \dots (19)$$

を考え

$$\delta_1=r_1^{64}, \delta_2=r_2^{64}$$

とおけば、a)の場合とほとんど同様にして δ_1, δ_2 、したがって r_1, r_2 および A_1, A_2 が定まる。

これによって任意の k に対する ζ^k の項の係数を計算することができるから第1群および第2群の係数から

それらを差引いて第1群および第2群の係数を修正し、第2群の係数について同様の操作を行ない、

$$\frac{A_3}{1-r_3\zeta} + \frac{A_4}{1-r_4\zeta} \dots\dots\dots(20)$$

を定める。さらに同様の手続きを進めて第1群の係数に対して

$$\frac{A_5}{1-r_5\zeta} + \frac{A_6}{1-r_6\zeta} + \frac{A_7}{1-r_7\zeta} + \frac{A_8}{1-r_8\zeta} \dots\dots\dots(21)$$

を定める。

この式(21)は第2群、第3群に若干の影響をおよぼし、式(20)は第3群に若干の影響をおよぼすからそれを考慮してくり返し計算を行なう。数回の繰返し計算を行なえばほぼ満足すべき結果が得られる。実際にはこれを拡張し

$$n=0, 1, 2, 3, 4$$

の5群をとって計算した。最後に

$$\zeta = -\frac{W-i}{W+i}$$

とにおいて、Z平面の領域をW平面の半平面に写像しさらに5iを乗じて図形を拡大し、かつy軸に関して対称になるように回転させた。結果はつぎのごとくである。

$$Z = \sum_{n=1}^{12} \frac{A_n}{W+i\tau_n} \dots\dots\dots(22)$$

に対し、表-1 および 表-2 のごとくである。これに

表-1

φ	140°	145°	150°
A ₁	4.818610031	5.305483392	5.831690890
A ₂	1.278437672	1.218473341	1.136173997
A ₃	4.205830906 × 10 ⁻¹	3.841128469 × 10 ⁻¹	3.430164038 × 10 ⁻¹
A ₄	1.178497445 × 10 ⁻¹	1.043405848 × 10 ⁻¹	9.029737715 × 10 ⁻²
A ₅	2.634593008 × 10 ⁻²	2.271658651 × 10 ⁻²	1.914210174 × 10 ⁻²
A ₆	4.807326183 × 10 ⁻³	4.035730149 × 10 ⁻³	3.310998578 × 10 ⁻³
A ₇	6.805903591 × 10 ⁻⁴	5.534058742 × 10 ⁻⁴	4.397298939 × 10 ⁻⁴
A ₈	1.173401975 × 10 ⁻⁴	9.287873514 × 10 ⁻⁵	7.184338762 × 10 ⁻⁵
A ₉	1.641576659 × 10 ⁻⁵	1.258984961 × 10 ⁻⁵	9.435483478 × 10 ⁻⁶
A ₁₀	2.793365615 × 10 ⁻⁶	2.085531433 × 10 ⁻⁶	1.521663817 × 10 ⁻⁶
A ₁₁	3.631941783 × 10 ⁻⁷	2.624640855 × 10 ⁻⁷	1.853643111 × 10 ⁻⁷
A ₁₂	4.586155571 × 10 ⁻⁸	3.219185043 × 10 ⁻⁸	2.20889022 × 10 ⁻⁸

表-2

φ	140°	145°	150°
τ_1	0.9840026627	0.9860052823	0.9880157791
τ_2	0.7555046100	0.7583526948	0.7613254137
τ_3	0.4523748035	0.4541036710	0.4559090186
τ_4	0.2233410217	0.2243276089	0.2253310658
τ_5	0.936945348 × 10 ⁻¹	0.942406093 × 10 ⁻¹	0.947898476 × 10 ⁻¹
τ_6	0.343556585 × 10 ⁻¹	0.345845848 × 10 ⁻¹	0.348148797 × 10 ⁻¹
τ_7	0.120251887 × 10 ⁻¹	0.120985437 × 10 ⁻¹	0.121720563 × 10 ⁻¹
τ_8	0.427432424 × 10 ⁻²	0.430316201 × 10 ⁻²	0.433211815 × 10 ⁻²
τ_9	0.147467832 × 10 ⁻²	0.148410179 × 10 ⁻²	0.149353557 × 10 ⁻²
τ_{10}	0.509369025 × 10 ⁻³	0.513297890 × 10 ⁻³	0.517236846 × 10 ⁻³
τ_{11}	0.158724940 × 10 ⁻³	0.160181654 × 10 ⁻³	0.161637322 × 10 ⁻³
τ_{12}	0.379143374 × 10 ⁻⁴	0.385948395 × 10 ⁻⁴	0.392769426 × 10 ⁻⁴

よって $W(=X+iY)$ 平面上の X 軸を境界とする上部の半平面は $Z(=x+iy)$ 平面上の 図-8 のごとき領域に対応する。

近似写像であるから隅角部Cは曲線であってCでの曲率半径 ρ はほぼ $\rho \approx 0.004$ ($\overline{CB} \approx 8.5 \sim 9$) である。W 平面上の $X = \pm 0.4, Y = 0$ に対応する点AおよびA'に

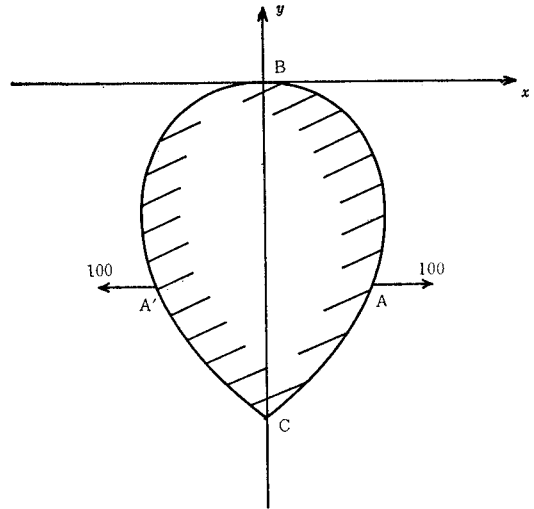


図-8

表-3

y_0	$\varphi = 140^\circ$		$\varphi = 145^\circ$		$\varphi = 150^\circ$	
	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
0	-0.013	0	0.039	0	0.195	0
0.005	0.063	0	0.379	-0.040	1.023	-0.114
0.010	0.166	-0.008	0.633	-0.068	1.480	-0.166
0.015	0.274	-0.017	0.856	-0.093	1.842	-0.209
0.02	0.384	-0.028	1.060	-0.117	2.153	-0.246
0.04	0.823	-0.075	1.772	-0.205	3.154	-0.372
0.06	1.255	-0.127	2.395	-0.289	3.960	-0.485
0.08	1.680	-0.184	2.967	-0.372	4.667	-0.592
0.1	2.097	-0.244	3.506	-0.456	5.312	-0.699
0.2	4.119	-0.592	5.932	-0.911	8.072	-1.256
0.4	8.067	-1.550	10.321	-2.078	12.801	-2.637
0.6	12.116	-2.892	14.646	-3.643	17.331	-4.430
0.8	16.379	-4.647	19.104	-5.628	21.929	-6.644
1.0	20.891	-6.828	23.743	-8.029	26.644	-9.254
3.0	57.892	-34.871	57.587	-34.823	57.180	-34.662
5.0	38.516	-28.588	37.199	-27.515	35.970	-26.497

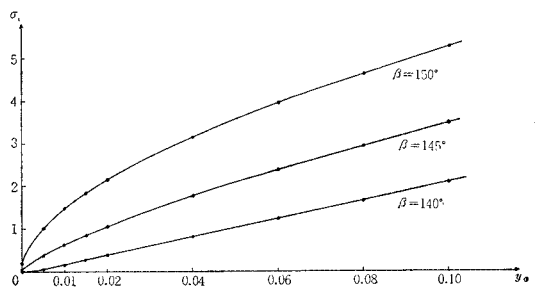


図-9

図-8 のごとき外力を加えた場合の応力計算を文献 4) に示したと同様の方法で計算した。その結果 CB 線上の応力度を表-3 に示す。C から上向きに測った距離を y_c で示す。隅角部のごく近くでの σ_x の分布を図示すれば図-9 のごとくになって 146° 前後で分布の有様が急変することがわかる。ただし全体の応力分布におよぼすその影響はわずかである。それは領域の形状および外力の状態によるのであって、曲げを受けるラーメンの隅角部（現在計算中）などでは全体の応力分布にもかなり影響するのではないと思われる。

4. 内角が 257° 前後の隅角を有する領域の例題

この場合は隅角の内角が 180° より大きいから、そのような角度の無限に広いくさび状領域に対して文献 4) の方法と同様にして近似関数を求めることができる。その結果を、

$$Z = kW + \sum_{n=1}^6 \frac{A_n}{W + ir_n} \dots\dots\dots(23)$$

に対して表-4 より表-6 までに示す。

以上によって W 平面上の X 軸を境界とする上部の半平面は Z 平面上の図-10 の領域に対応する。C 部は曲線で C における曲率半径 ρ は、

$$\rho = 0.01$$

になるようにしてある。外力は図-10 に示すような逆対称のものを考える。ここに A, A' は、

$$X = \pm 2, Y = 0$$

に対応し、B, B' は、

$$X = \pm 1, Y = 0$$

に対応させてある。外力が逆対称である場合の応力解析は文献 5) によればつぎのごとく行なえばよい。応力関数 ϕ を

$$\phi = U + yV$$

とおき

$$Z = kW + \sum_{n=1}^6 \frac{A_n}{W + ir_n}$$

に対して上記の外力の場合はまず

$$B_n \left(k + \sum_{m=1}^6 \frac{A_m}{(r_m + r_n)^2} - \sum_{m=1}^6 B_m \frac{A_n}{(r_m + r_n)^2} \right) = \frac{2 A_n}{\pi} \left(\frac{r_n}{r_n^2 + 1} - \frac{r_n}{r_n^2 + 4} \right) \quad (n=1, 2, \dots, 6)$$

を解いて $B_n (n=1, 2, \dots, 6)$ を求める。それを用いて

$$\frac{dT}{dW} = \frac{i}{\pi} \left(\frac{2W}{W^2 - 1} - \frac{2W}{W^2 - 4} \right) - \sum_{n=1}^6 \frac{B_n}{(W + ir_n)^2}$$

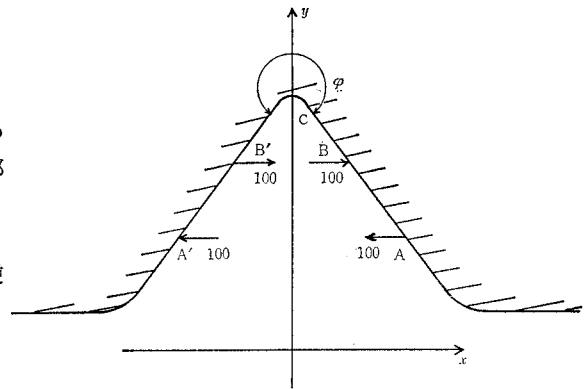


図-10

表-4

φ	245°	250°	255°	260°	265°	270°
k	5.490731755	7.835727511	11.206748169	16.082670087	23.192725220	33.640423306

表-5

φ	245°	250°	255°	260°	265°	270°
$-A_1 \times 10^3$	1.932745384	2.449547451	3.079018584	3.844056886	4.774010779	5.902661219
$-A_2 \times 10^2$	2.266440302	2.945416433	3.796053123	4.858913757	6.186353315	7.841077529
$-A_3 \times 10$	1.672722109	2.228500824	2.944414606	3.863880051	5.043790954	6.554792623
$-A_4$	1.321083543	1.811585192	2.464077491	3.329397947	4.475796213	5.991491633
$-A_5 \times 10^{-1}$	1.774664161	2.540535670	3.608967381	5.095154962	7.160578561	10.02642606
$-A_6 \times 10^{-2}$	1.857931506	3.125177020	5.263162026	8.894937271	15.12324240	25.91741899

表-6

φ	245°	250°	255°	260°	265°	270°
$r_1 \times 10^2$	8.831657411	8.994892624	9.159765187	9.326290112	9.494482645	9.664358258
$r_2 \times 10$	3.050358803	3.090197950	3.130422061	3.171037142	3.212049307	3.253464756
$r_3 \times 10$	7.617660446	7.707506174	7.798415135	7.890410790	7.983517458	8.077760193
r_4	1.799649610	1.822820016	1.846366422	1.870300049	1.894632946	1.919377944
r_5	4.841552728	4.927990749	5.016656266	5.107634295	5.201021199	5.296925381
$r_6 \times 10^{-1}$	2.392412472	2.519124336	2.659361091	2.815169022	2.989026540	3.183964488

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dW} &= \frac{2iW}{\pi(W^2-1)} \sum_{n=1}^6 \frac{A_n r_n}{r_n^2+1} \\ &\quad - \frac{2iW}{\pi(W^2-4)} \sum_{n=1}^6 \frac{A_n r_n}{r_n^2+4} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 \left\{ \frac{i(A_m B_n + A_n B_m)}{(W+i r_m)^2 (W+i r_n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-A_m B_n + A_n B_m}{r_m + r_n} \cdot \frac{1}{(W+i r_m)^2} \right\} \end{aligned}$$

表-7 τ_{xy} の表

φ	245°	250°	255°	260°	265°	270°
0	0	0	0	0	0	-
0.005	-0.3427	-0.4395	-0.5469	-0.6627	-0.7823	-0.9010
0.010	-0.4103	-0.5192	-0.6386	-0.7661	-0.8966	-1.0249
0.015	-0.4392	-0.5491	-0.6682	-0.7942	-0.9216	-1.0457
0.020	-0.4564	-0.5647	-0.6810	-0.8027	-0.9246	-1.0420
0.025	-0.4686	-0.5748	-0.6876	-0.8046	-0.9207	-1.0314
0.030	-0.4781	-0.5821	-0.6915	-0.8040	-0.9146	-1.0192
0.1	-0.5417	-0.6250	-0.7054	-0.7813	-0.8490	-0.9060
0.2	-0.5806	-0.6486	-0.7095	-0.7625	-0.8045	-0.8342
0.3	-0.6023	-0.6595	-0.7077	-0.7462	-0.7727	-0.7866
0.4	-0.6157	-0.6641	-0.7021	-0.7295	-0.7445	-0.7470
0.45	-	-0.6648	-	-	-	-
0.5	-0.6240	-0.6645	-0.6938	-0.7120	-0.7178	-0.7113
0.6	-0.6285	-	-	-	-	-
0.7	-0.6302	-	-	-	-	-
0.8	-0.6295	-	-	-	-	-
0.9	-0.6269	-	-	-	-	-

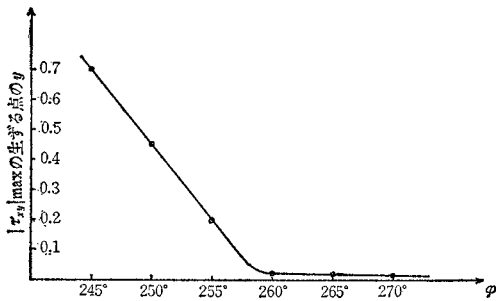


図-11

ただし、 $T=V+i\bar{V}$, $S=U+i\bar{U}$ を定める。これらが定まれば

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

で応力度が求められる。 y 軸上の応力分布を計算した結果を表-7に示す。図-10のCより上に測った距離を y_0 とする。 $(\sigma_x = \sigma_y = 0)$

これで見ると φ の値が 257° 前後で顕著な変化を見せるのは、 τ_{xy} の絶対値が最大になる点の y_0 の値で、これを図示すれば 図-11 のようになる。

5. 結 語

隅角部の内角が 180° より小なる場合は 146° 付近を境にして、応力分布の状態が急変するので、種々の構造、種々の荷重に対して調べてみる価値がありそうである。内角が 180° より大なる場合は、隅角部に曲線が挿入されているとすれば、問題になる隅角部のごく近くの応力分布のみに注目すれば、それは内角が大きくなるにしたがって漸増するが、とくに 257° 付近を境にして応力状態が急変することはない。

参 考 文 献

- 1) Eli Sternberg, W.T. Koiter: "The Wedge Under a Concentrated Couple, A Paradox in the Two-Dimensional Theory of Elasticity", J.A.M. 1958. 10.
- 2) Von C. Weber; "Innenecken bei Scheiben ohne und mit Abrundungen", Z.A.M.M. 45 (1965).
- 3) 多谷虎男: "構造物隅角部の特異点 近傍における 応力集中に関する研究", 第 23 回年次学術講演会(昭和 43.10).
- 4) 岡林 稔: "領域が有理関数によって直線境界の半平面に等角写像される場合の二次元弾性問題の解法およびくさび状の裂目を有する無限薄板へのその応用", 土木学会論文集第 119 号 (昭和 40.7).
- 5) 岡林 稔: "尖端に丸味を有する切欠材の応力集中", 名古屋工業大学々報 18 号 (昭和 42.3).

(1969.4.7・受付)