

# 塔状構造物の固有周期の自乗和を最小ならしめる 断面変化に関する二、三の考察

DESIGN OF A CANTILEVER BEAM SECTION UNDER  
MINIMIZING THE SQUARE SUM OF NATURAL PERIODES

中川 建治\*  
By Kenji Nakagawa

**要 旨** 構造部材の総体積を一定量に保ちつつ、塔状構造物、あるいは、高層ラーメンの固有周期の自乗和を最小にするような設計法を導いた。塔やラーメンの高さは任意である。

このような設計法は、それぞれの固有周期に近い周波数成分のみより成るパワー スペクトルをほぼ等しい大ききさで含むランダム外力に対する応答の運動エネルギーの平均を最小化する設計法で、剛な構造物の設計方法である。

## 1. ま え が き

本文で論ずる塔状構造物の固有周期  $T_i (i=1,2,\dots)$  の自乗和  $\Gamma = \sum T_i^2$  を最小にする断面変化の決定法は、外力に対する応答と許容応力度に基づく従来の構造物の設計方法に比較すれば、特異な考え方であって、構造物の設計にただちに役立つものとは思われない。なぜならば、この設計法は、片持ばりのような塔状構造物や高層ラーメンにおいて、高さをあらかじめ決めておき、一定量の構造材料を用いて、許容応力度とは関係なく  $\Gamma$  を最小にするような断面設計を目的としたものである。片持ばりでは、 $\Gamma$  (以下において、固有周期の自乗和を  $\Gamma$  と略記する) の中における基本周期  $T_1$  の占める比率が大きいので、 $\Gamma$  を小さくすることは、近似的に  $T_1$  を小さくすることになる。したがって、なんらかの必要性から、基本周期を小さくして最も剛な構造物 (たとえば高さの大きな橋脚) を設計しようとする場合には、本文に示した 2, 3 の結果は参考になるものと思う。はりの断面変化と固有値の逆数和の変化の関係については、著者がすでに文献 1) で報告したが、引き続き本文を報告するのは、特殊な構造物設計においては、本文のような考え方もなんらかの参考資料になるのではなかろうかと思

うからである。

構造物を有限  $N$  自由度の構造物とみなして、Flexibility matrix を  $F=[f_{ij}]$ , 各格点の集中質量を  $m_j$  とすれば、固有周期の自乗和は、

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N T_j^2 = 4\pi^2 \sum_{j=1}^N m_j f_{jj} \dots\dots\dots (1.1)$$

として与えられる。構造物を無限自由度系の連続体とみなして、単位荷重による載荷方向たわみを  $w(x)$ , 単位長さ当りの質量を  $\rho(x)$  とすれば、

$$\Gamma = 4\pi^2 \int \rho(x)w(x)dx \dots\dots\dots (1.2)$$

となる (文献 1) 参照)。積分は構造物全体にわたり、すべての自由度方向に行なう。

高層ラーメンと塔状構造物を対象にして、構成材料の総体積を一定に保ちながら  $\Gamma$  を最小にする断面変化を示し、最後に  $\Gamma$  をいかに解釈し得るか、パワー スペクトルとの関連はどのようになるかなどを示す。

## 2. 高層ラーメン

図-1 に示すような高層ラーメンにおいて、柱の部分の総体積  $V$  を一定に保ちつつ  $\Gamma$  を最小にするような柱の断面を決定しよう。ラーメンに対してつぎのような仮定を設けるが、一般の建築物に対する仮定としても、十分許容し得るものである。

(1) 各層の床部分の質量は既知

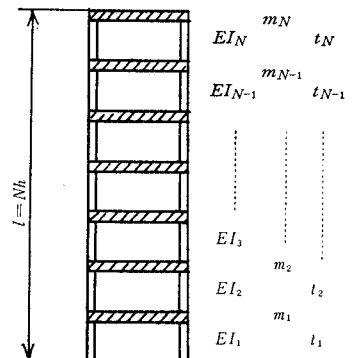


図-1

\* 正会員 工修 山口大学助教授 工学部土木工学教室

部分の質量も各床部分へ集中させる。したがって床部分の質量を  $m_1, m_2, \dots, m_N$  とし、柱の質量を 0 とする。

(2) 各層間の柱の断面はそれぞれ等断面であって、各層間で階段状に変化している。

(3) 各層の相対変位は柱の曲げ変形によってのみ生ずるものとして、各層の回転振動は無視する。柱の曲げ剛さを  $EI_j (j=1, 2, \dots, N)$  とする。せん断変形の場合については後述する。

(4) 各層の高さを  $h_j$ 、柱部分の総体積を  $V$  とする。

さて、柱の断面を表わす変数を  $t_j$  とすると、各層の相対変位を与える断面曲げ剛さと柱の部分の総体積  $V$  は、

$$EI_j = \beta_j t_j^\zeta \quad (\zeta \geq 2) \dots \dots \dots (2.1)$$

$$V = \sum_{j=1}^N r_j h_j t_j^\theta \dots \dots \dots (2.2)$$

となる。ここに、パラメーター  $\beta_j, r_j, \zeta, \theta$  は柱の断面形状（円形、あるいは、長方形）と各層に含まれる柱の本数などによって決定するものである。

単位の水平力によって各層に現われる相対変位を  $d_k$  とすれば、パラメーター  $\delta_k$  と  $d_k$  の関係は  $d_k = \delta_k / \beta_k t_k^\zeta$  として表わされる。これらの値より  $\Gamma$  を求めて、 $\Gamma$  を最小にするような  $t_k$  を決定すればよい。式 (1.1) における  $f_{ii}$  は  $f_{jj} = \sum_{k=1}^j d_k$  であるから、 $\Gamma$  はつぎのようになる。

$$\Gamma = 4\pi^2 \sum_{j=1}^N \frac{\delta_j \alpha(j)}{\beta_j t_j^\zeta}$$

$$\alpha(j) = \sum_{k=j}^N m_k$$

ここで、拘束条件式 (2.2) のもとに  $\Gamma$  を最小にするような  $t_j$  を求めるにはパラメーター  $\varepsilon$  を用いて Lagrange の未定係数法を用いればよい。結果を式 (2.3)、式 (2.4) に示す。

$$g = \sum_{j=1}^N r_j h_j t_j^\theta - V = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t_j} (\Gamma + \varepsilon g) = -\frac{4\pi^2 \zeta \delta_j \alpha(j)}{\beta_j t_j^{\zeta+1}} + \theta r_j h_j t_j^{\theta-1} \varepsilon = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} t_j &= \{\alpha'(j)\}^{1/(\zeta+\theta)} \cdot C' \\ \alpha'(j) &= \frac{\delta_j}{\beta_j r_j h_j} \sum_{k=j}^N m_k \\ C' &= V^{1/\theta} \left[ \sum_{k=1}^N r_k h_k \{\alpha'(k)\}^{\theta/(\zeta+\theta)} \right]^{-1/\theta} \\ \Gamma &= 4\pi^2 V^{-\zeta/\theta} \left[ \sum_{k=1}^N r_k h_k \left\{ \frac{\delta_k \alpha(k)}{h_k \beta_k r_k} \right\}^{\theta/(\zeta+\theta)} \right]^{-(\zeta+\theta)/\theta} \end{aligned} \right\} \dots (2.3)$$

$$\dots \dots \dots (2.4)$$

ラーメンにおける水平変位は、曲げ変形以外にせん断変形による場合もある。せん断変形の影響を考慮する場合には、パラメーター  $\beta_k, \delta_k, \zeta$  を適当に定めることによって上記の結果をそのまま適用し得ることは明らかで

ある。なお、図-1 では 1 スパン ラーメンを仮定したが、柱の数には制限はないので、高層多スパン ラーメンでも適用可能である。

式 (2.3) より実際の断面形状  $t_j$  を求めるには、繰り返し計算によらなければならない。簡単に計算順序を示す。

- (1) 設計条件より総体積  $V$ 、その他のパラメーター  $\beta_j, r_j, \zeta, \theta$  を決定する。
- (2) 断面形状  $t_{j0}$  を仮定する。
- (3) パラメーター  $\delta_k$  を計算する。
- (4) 自重にもとづく  $m_k$  を計算し、 $\alpha'(j)$  を決定する。
- (5) 式 (2.3) にこれらの結果を代入して  $t_j$  を求める。
- (6) 取れん誤差  $\varepsilon$  に対して  $|t_{j0} - t_j| \leq \varepsilon$  を満足しない場合は、 $t_j \rightarrow t_{j0}$  として (2) へ戻って計算を繰り返す。

(1)~(6) において  $k, j$  は、 $k, j=1, 2, \dots, N$  全体にわたって条件を満足するものとする。

この繰り返し計算の取れん性はきわめて良好である。計算例を後述する。

### 3. 有限自由度系としての塔の曲げ振動

煙突のように曲げ変形に基づく横振動を起こす構造物を有限自由度系とみなして解析する場合、曲げ剛さの配分をいかにしたら  $\Gamma$  を最小にし得るであろうか。

構造物を 図-2

に示すようなものと仮定する。

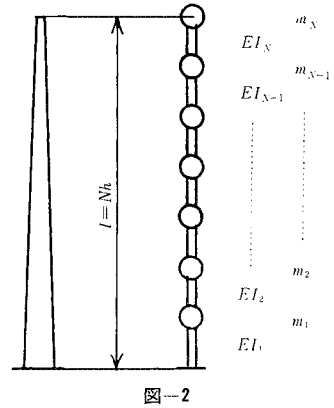
(1) 高さを  $N$  等分して分割点へ質量を集中させる。集中質量  $m_i$  は既知とする。

(2) 曲げ剛さ  $EI_i$  は各区間で一定で、階段状に変化している。区間の長さを  $h$  とする。

(3) 曲げ変形による横振動のみを考えて、回転振動は無視する。

さて、式 (1.1) における  $f_{kk}$  は、単位荷重の載荷点載荷方向のたわみであるから、

$$f_{kk} = \int_0^{kh} \frac{(kh-x)^2}{EI(x)} dx$$



$$= \sum_{j=1}^k \frac{h^3}{EI_j} \left[ k^2 - \{j^2 - (j-1)^2\} k + \frac{1}{3} \{j^3 - (j-1)^3\} \right]$$

となる。断面形状を表わす変数を  $t_k$  として、パラメーターを  $\beta_j, \tau_j, \zeta, \theta$  とすれば、断面の曲げ剛さと総体積  $V$  は、

$$EI_j = \beta_j t_j^5$$

$$V = h \sum_{j=1}^N \tau_j t_j^\theta \dots \dots \dots (3.1)$$

となる。前節と全く同様にして、Lagrange の未定係数法によって、 $\Gamma$  を最小にする  $t_j$  が得られる。拘束条件式 (3.1) のもとに、

$$\Gamma = h^3 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\beta_j t_j^\zeta} \alpha(j)$$

$$\alpha(j) = \sum_{k=j}^N k^2 m_k - (2j-1) \sum_{k=j}^N k m_k + \frac{1}{3} (3j^2 - 3j + 1) \sum_{k=j}^N m_k$$

を最小にする結果のみを示すと、つぎようになる。

$$t_j = \left\{ \frac{\alpha(j)}{\beta_j \tau_j} \right\}^{1/(\zeta + \theta)}$$

$$\times \left[ \frac{V}{h \sum_{k=1}^N \tau_k \left\{ \frac{\alpha(k)}{\beta_k \tau_k} \right\}^{\theta/(\theta + \zeta)}} \right]^{1/\theta} \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\Gamma = 4 \pi^2 h^{\zeta + \theta} V^{-\zeta/\theta} \left[ \sum_{k=1}^N \tau_k \left\{ \frac{\alpha(k)}{\beta_k \tau_k} \right\}^{\theta/(\theta + \zeta)} \right]^{(\theta + \zeta)/\theta} \dots \dots \dots (3.3)$$

これらは前節の結果と同じ形式のものであることがわかる。実際の  $t_j$  を求めるには繰り返し計算によるなければならないが、前節に述べた計算法をそのまま適用すればよい。

#### 4. 無限自由度系の曲げ振動

有限自由度系における Lagrange の未定係数法による解法は、連続体（無限自由度系）における変分法に相当するものであって、連続体においても、前節と同様な関係式によって、 $\Gamma$  最小の断面（以下において  $\Gamma$  最小の断面を最適断面と仮称する）が決定される。

図-3 に示すような変断面ばりについて最適断面を求めよう。単位長さあたりの質量を  $\rho(x)$  として、曲げ剛さを  $EI(x)$  とする。 $A(x)$  を断面積として、 $\rho_0$  を単位体積質量とする。

$$\rho(x) = \rho_0 A(x)$$

$$EI = EI(x) \dots \dots \dots (4.1)$$

単位荷重による載荷点荷方向たわ

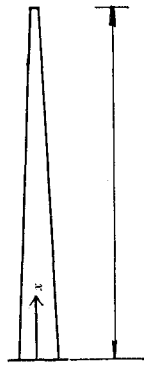


図-3

み  $w(x)$  を水平方向たわみのみにするならば、 $\Gamma$  はつぎようになる。

$$\Gamma = \frac{\rho_0}{E} \int_0^l A(x) \int_0^x \frac{(x-z)^2}{I(z)} dz dx$$

$$= \frac{\rho_0}{E} \int_0^l \frac{\alpha(z)}{I(z)} dz$$

$$\alpha(z) = \int_z^l A(x)(x-z)^2 dx \dots \dots \dots (4.2)$$

変断面ばりでは、 $I(x)$  が未知関数である限り  $A(x)$  も未知関数である。したがって、式 (4.2) における  $\alpha(x)$  も  $I(x)$  も同時に未知関数である。この難点を解決するために、 $I(x)$  の変化より  $A(x)$  の変化がゆるやかであることに着目して、 $A(x)$  を既知関数と仮定しよう。この仮定は、高層ラーメンの各層の質量は柱の曲げ剛性とは独立に既知であると仮定することに相当する。あるいは、つぎのように解釈してもよい。煙突のような構造物において、曲げ剛さとして有効な部材の断面積を  $A_1(x)$  として、ライニングなどのように曲げに抵抗しない部材の断面積を  $A_0(x)$  とするならば、 $A_0(x)$  は既知であって  $A_1(x)$  は未知であるが、 $\rho_0 A(x) = \rho_0 A_0(x) + \rho_1 A_1(x)$  として  $A(x)$  を仮定しても大過ない場合がある。

さて、このような場合においては、曲げに抵抗する部材の体積  $V$  を一定にしなければならないから、

$$V = \int_0^l A_1(x) dx \dots \dots \dots (4.3)$$

が拘束条件式である。 $\alpha(x)$  は仮定値  $A(x)$  を採用するので、式 (4.2) の未知関数は  $I(x)$  のみとなる。

未知断面  $A_1(x)$  を与える未知関数を  $y(x)$  として、パラメーター  $\beta, \tau, \zeta, \theta$  を、

$$A_1(x) = \tau y^\theta(x)$$

$$I(x) = \beta y^\zeta(x) \dots \dots \dots (4.4)$$

と定義する。ここに、 $y(x)$  はかならずしも直径や厚さなどのように具体的なものでなく、 $A_1(x)$  と  $I(x)$  との関係を与えるものであればよい。

式 (4.4) を式 (4.2)、式 (4.3) へ代入して、拘束条件式 (4.3) のもとに  $\Gamma$  を最小にすることは、変分法によって解決される。結果を示すとつぎようになる。

$$y(x) = C \cdot \alpha(x)^{1/(\zeta + \theta)}$$

$$C = \left\{ \frac{V}{\tau \int_0^l \{\alpha(x)\}^{\theta/(\theta + \zeta)} dx} \right\}^{1/\theta} \dots \dots \dots (4.5)$$

仮定した  $A(x)$  と式 (4.5) より得られる値とに差を生じた場合には、改めて計算を繰り返せばよい。

#### 5. 全断面が曲げに抵抗する無限自由度系

ライニングのような付加的断面が存在せず、全断面が曲げに抵抗する場合でも、前節に述べたように仮定した断面  $A(x)$  と式 (4.5) における  $y(x)$  より得る断面

$A_1(x)$  とが一致するまで繰り返し計算をすれば、解決される。しかし、特別な断面形状の場合には、理論解が得られる。これは著者の試算によって得られたもので、理論的な解析法によって導き得たものではないので、結果のみを簡単に示す。

(1) 角柱, あるいは円柱

角柱の1辺, あるいは, 円柱の直径を  $y(x)$  として,  $A(x)$  と  $I(x)$  を表わすと, 一般的には

$$\left. \begin{aligned} A(x) &= r y^2(x) \\ I(x) &= \beta y^4(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

となる。 $x$  は埋込端 (基礎部分) を原点にして自由端へ向う方向を正とする。高さを  $l$ , 総体積を  $V$  とする。

まず,  $y(x)$  をつぎのように仮定する。

$$y(x) = \sqrt{\frac{5V}{2rl}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{3/4} \dots\dots\dots (5.2)$$

式 (5.2) と式 (5.1) を式 (4.2) へ代入して,  $\alpha(x)$  を求めると,

$$\alpha(x) = \frac{8}{63} V l^{-5/2} (l-x)^{9/2} \dots\dots\dots (5.3)$$

を得る。式 (5.1) と式 (4.4) の対応より,  $\zeta=4, \theta=2$  を得るので, これらの関係を式 (4.5) へ代入して  $C$  を求めると, つぎのようになって, 最初に仮定した  $y(x)$  を得る。

$$\begin{aligned} C &= \left[ \frac{V}{r \int_0^l \left(\frac{8V}{63}\right)^{1/3} l^{-5/6} (l-x)^{3/2} dx} \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} l^{-5/4} \sqrt{\frac{V}{r} \left(\frac{63 l^{5/2}}{8 V}\right)^{1/6}} \\ \therefore y(x) &= \sqrt{\frac{V}{2rl}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{3/4} \end{aligned}$$

最後に,  $y(x)$  が総体積に関する条件式 (4.3) を満足することは,

$$V = \int_0^l A(x) dx = \frac{5V}{2l} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{3/2} dx = V$$

として示される。

ゆえに, 式 (5.2) に仮定した  $y(x)$  は最適断面変化を与えることがわかる。

(2) 中空断面

肉厚一定の中空断面で, 内径のみが変化する断面形状をもつ, 煙突のような構造物を仮定する。 $x$  座標は埋込み端を原点として, 上方を正とする。高さを  $l$ , 総体積を  $V$  とする。内径を  $y(x)$  とすれば,  $I(x)$  と  $A(x)$  の一般式は,

$$\left. \begin{aligned} I(x) &= \beta y^3 \\ A(x) &= r y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.4)$$

となる。最適断面を表わす  $y(x)$  を

$$y(x) = 2V(l-x)/r l^2 \dots\dots\dots (5.5)$$

と仮定し, 前節と同様にして  $\alpha(x)$  を求めると,

$$\alpha(x) = \frac{2V}{l^2} \int_x^l (l-z)(z-x)^2 dz = \frac{V}{6l^2} (l-x)^4$$

を得る。 $\zeta=3, \theta=1$  であるから, 式 (4.5) より  $y(x)$  を求めると,

$$r \int_0^l \{\alpha(z)\}^{1/4} dz = \frac{r l^2}{2} \left(\frac{V}{6l^2}\right)^{1/4}$$

となり,

$$y(x) = 2V(l-x)/r l^2$$

を得る。総体積が  $V$  になることは明らかであるから, すべての条件が満足されていることがわかる。

この結果より, 煙突のような中空断面の構造では, 直径が直線状に変化している場合に  $r$  が最も小さくなるという結論を得る。しかし, 実際の問題として頂部の直径が0ということはあり得ないので, 直接役立つ結果ではないが, 設計上の参考にはなるであろう。

6. 頂部に集中質量をもつ片持ばり

橋脚のように頂部に大きな集中質量 (上部構造) をもつ片持ばりでも, 有限自由度系とみなして質量分布が既知なものとするならば, すでに導いた式 (3.2) によって断面変化を決定し得る。しかし, 質量分布も未知であるとするならば, 繰り返し計算を行なわなければならない。この場合の取れん性は非常にすぐれているが, ごく簡単な計算例を用いて, 取れん性を検討し, あわせて, 実際の断面がどのようになるかを求めて図示した。

図-4 に示すように, 曲げ剛さ無限大の集中質量が頂部に存在するような片持ばりを対象にする。はりの部分は  $N$  等分して, それぞれの区間で断面が階段状に変化しているものとする。各区間の質量は断面の関数であって, 分割点に集中しているものとする。

頂部の質量とはりの質量の比重を等しく  $\rho$  とし,

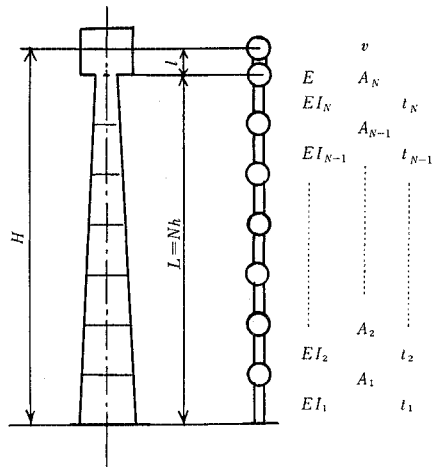


図-4

それぞれの換算体積を  $v, V$  とする。はりの部分の全断面が曲げに抵抗するものとして、曲げによる横振動のみを考える。はりの高さを  $L=Nh$  とし、はりの先端から頂部質量の重心までを  $l$  とする。

はりの部分の荷重点荷荷方向たわみ  $f_{kk}$  と、集中質量の重心における荷荷方向たわみ  $f_e$  は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 f_{kk} &= \int_0^{hh} \frac{(kh-x)^2}{EI(x)} dx \\
 &= \sum_{j=1}^h \frac{h^3}{EI_j} \left[ k^2 - \{j^2 - (j-1)^2\} k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \{j^3 - (j-1)^3\} \right] \\
 f_i &= \int_0^L \frac{(L+l-x)^2}{EI(x)} dx = \frac{1}{E} \left( \frac{L}{N} \right)^3 \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_2(j)}{I_j} \\
 \alpha_1(j) &= \sum_{i=j}^N A_i \left( i^2 + i + \frac{1}{3} \right) \\
 &\quad - j \sum_{i=j}^N A_i (2i+1) + j^2 \sum_{i=j}^N A_i \\
 \alpha_2(j) &= \frac{Nv}{L} \left\{ j^2 - j \left( 2N+1 + \frac{2Nl}{L} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( N+1 + \frac{Nl}{L} \right) \left( 1 + \frac{l}{L} \right) N + \frac{1}{3} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\therefore \Gamma = \frac{\rho}{E} \left( \frac{N}{L} \right)^4 \sum_{i=1}^N \{ \alpha_1(i) + \alpha_2(i) \} \frac{1}{I_i} \tag{6.2}$$

ここに、 $A_i, I_i$  は各点の断面積と断面 2 次モーメントである。それぞれ

$$\left. \begin{aligned}
 I_i &= \beta \cdot t_i^5 \\
 A_i &= \gamma t_i^\theta
 \end{aligned} \right\} \tag{6.3}$$

と仮定し、 $V=h \sum A_i$  という条件のもとに、 $\Gamma$  を最小にするような  $t_i$  を求めることになる。

しかるに、 $\alpha_1(j)$  は未知数であって理論的には解き得ないので、仮定断面  $A_i'$  によって  $\alpha_1(j)$  を定めてから、 $\Gamma$  を最小にするべく Lagrange の未定係数法を用いる。

$$t_i = \left( \frac{NV}{\gamma L} \right)^{1/\zeta} \frac{\{ \alpha_1(i) + \alpha_2(i) \}^{1/(\zeta+\theta)}}{\left[ \sum_{j=1}^N \alpha_1(j) + \alpha_2(j) \right]^{1/\theta}} \tag{6.4}$$

逐次計算は、仮定断面  $A_i'$  より  $\alpha_1(i), \alpha_2(i)$  を求めて、式 (6.4) より  $t_i$  を定め、これを式 (6.3) に代入して、 $A_i$  を求める。求めた  $A_i$  が仮定値  $A_i'$  と許容値以上の誤差を含むならば、 $A_i$  を仮定値として計算を繰り返す。

図-5 は分割数  $N$  の変化によって断面がどのように変化するかを考察するために、 $N=10, 20, 50$  について数値計算を行なった結果を示す。この例では、断面を角柱として、 $L=10, l=1, V=10, v=1, \beta=0.5, \zeta=4,$

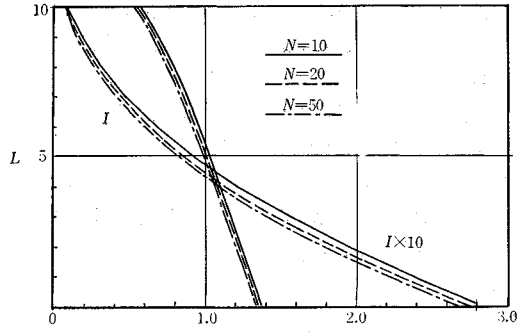


図-5

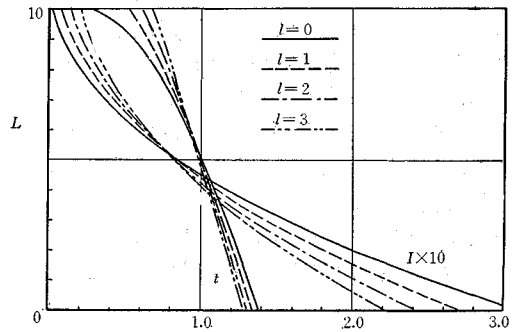


図-6

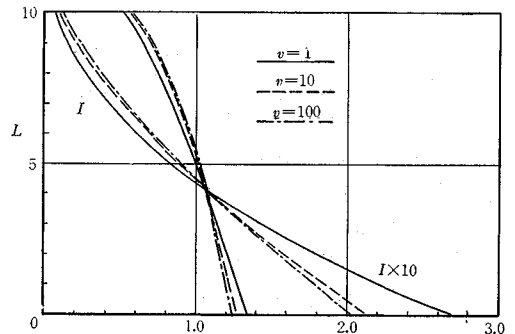


図-7

$r=1, \theta=2$  とした。収れん誤差を  $\epsilon = \sum |A_i' - A_i| / \sum A_i \leq 5 \times 10^{-6}$  としたが、すべての場合について、5回の繰り返して収れんしている。 $t_i, I_i$  が  $N$  の増加とともに減少しているのは、各区間を階段変化としたためである。

図-6 は、 $N=40, \beta=1/12, \zeta=4, r=1, \theta=2, L=10, V=10, v=1$  とし、集中質量の重心  $l$  のみを  $l=0, 1, 2, 3$  と変化させた断面変化を示す。

図-7 は、図-6 の条件で  $l=1$  とし、 $v$  を  $v=1, 10, 100$  と極端に変化させた場合のものである。

これらの計算例は簡単なものであって、実際の構造物に適したものではないが、 $\Gamma$  を最小にする断面変化の特性を探るために、モデル化して極端な条件を与えて計算

したものである。したがって、図-5~図-7には単位を示していない。 $t$ あるいは、 $I$ の相対的变化がどのようになるかを図示したものであるから、 $L$ ,  $t$ ,  $I$ のそれぞれの単位をどのように解釈してもよい。その結果  $V$ ,  $v$ ,  $\Gamma$ の単位が変化するのみである。図-5は  $N$ の増加による変化、図-6は、 $l/L$ の変化による断面形状の変化、図-7は  $v/V$ の比率の変化による断面形状の変化を示しているものである。

## 7. 動的応答と $\Gamma$ との関係

固有周期の自乗和の最小化ということは、物理的な意義はないように思われるので、本文はあくまでも、近似的に基本振動周期  $T_1$ を最小化する断面変化法と解釈されるべきものであろう。しかるに、動的応答と  $\Gamma$ を関連させようとするならば、つぎのように特定な構造系に特定な外力が作用した場合の「応答の平均運動エネルギー  $W$ 」と解釈される。

有限  $N$  自由度系の構造物を対象にする。

$[m]$ : 各点の換算集中質量  $m_i$  を対角要素とする対角行列。

$[S]$ : Stiffness matrix で、固有値行列  $[\lambda]$ , 固有ベクトル  $[\varphi]$  をもち、 $[\varphi]^T[S][\varphi]=[\lambda]$ ,  $[\varphi]^T[m][\varphi]=E$  を満足する。

$[C]$ : 減衰力を現わし、 $[\varphi]^T[C][\varphi]=2[\zeta\sqrt{\lambda}]$  を満足する。ここに、 $[\zeta\sqrt{\lambda}]$  は対角行列で、 $\zeta_j$  は各モードの減衰定数を意味する。

本節においてのみ  $i$  を虚数単位として、外力を  $[m][\varphi]\{a\zeta_k e^{i\sqrt{\lambda_k}t}\}$  という外力と仮定し、 $\{y\}=[\varphi]\{q(t)\}$  とすれば、この系の振動方程式は、

$$[m]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [S]\{y\} = [m][\varphi]\{a\zeta_k e^{i\sqrt{\lambda_k}t}\}$$

$$\ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k \sqrt{\lambda_k} \dot{q}_k(t) + \lambda_k q_k(t) = a \zeta_k e^{i\sqrt{\lambda_k}t}$$

となる。全体の運動エネルギー平均  $W$  は、

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k |\dot{y}_k|^2 = \frac{a^2}{8} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} = \frac{a^2}{32\pi^2} \Gamma$$

となることは明らかである。

$[C]$  に対する仮定は、構造物の減衰特性が解明されないと、可否を論じられない。外力の分布に関する上記のような仮定は、最も危険な周期成分の外力がほぼ等しいような振幅をもち、かつ、各モードに比例した振幅分布で作用した場合といえよう。

したがって、 $\Gamma$ を最小化するということは、あくまでも近似的な意味において、「それぞれの固有周期に近い周期成分のパワー スペクトルをほぼ等しい大きさで含むようなランダムな外力が作用した場合の構造物の応答の運動エネルギーを最小化する設計法」とみなし得よう。

構造物の基本周期を小さくすることは、上記のような観点からは応答の運動エネルギーを小さくすることに相当し、いずれにせよ、剛な構造物を設計することに相当する。

## 8. む す び

構造物の非常に特殊な設計法を、偶然、変分法によって解き得たので報告した。実用上の問題について、あるいは、物理的な意義について、さらにいろいろな検討を加えるべきであろう。著者の非力によって、このような結果しか得られていないが、このような問題に関心を持たれている方から、有意義なご討議やご指導をいただければ、幸甚に存する次第である。この研究において、終始適切なご指導を賜った名古屋大学の成岡教授には、心から深甚な感謝の意を表したい。

### 参 考 文 献

- 1) 中川建治: はりの固有値の逆数和に関する二、三の考察, 土木学会論文集第 150 号 (昭 43.2) pp. 1~7.

(1968. 11. 24・受付)