

有限変形を考慮した平面骨組構造の弾塑性解析法

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF PLANE FRAMEWORKS
WITH LARGE DEFORMATIONS

堀井 健一郎*・川原 睦人**

By Kenichiro Horii and Mututo Kawahara

1. 緒 言

材料の応力-ひずみ関係が弾性範囲内にあり、変形が微小であるとする仮定のもとでの骨組構造物の解析法は、近年その発達がめざましく、ほとんど完成の域に達している。材料は弾性範囲内にあるが、変形が大きくなり、微小変形の仮定が成立しない構造についても、吊橋・アーチ構造などに対する理論をはじめ、数多くの文献が発表されている。これには、吊橋・アーチ構造などのように、構造形式を定めて、その構造の特質を利用して、解式を定める試みがなされているものと^{18)~20)}、形式にとらわれずに、任意の形状をもつ骨組構造を対象にした理論とがある^{21)~30)}。これらの先駆的研究は、R.K. Livesley¹⁾、J.H. Argyris²⁾らによってなされたものであるが、J.A. Jennings³⁾が指摘するように、変形による影響として、

- 1) 部材自身の剛性の低下による影響
- 2) 節点変位が大きくなることによる形状の変化による影響
- 3) 曲げによる部材自身の材長の変化による影響

を考慮に入れることが行なわれなければならない。

これらの理論は、J.T. Orden⁴⁾、C. Oran⁵⁾らによって基礎的な理論が、S.A. Saafan⁷⁾、W. Marchant、P.M. Bratton⁹⁾、F.W. Williams²⁷⁾などにより骨組構造に対する解法が発展せしめられ、M.I.T.のJ.J. Conner、R.D. Logcher、S.C. Chang¹¹⁾によりSTRUDLに組込まれるまでに至っているが、これらの考え方は、変形による影響を考慮に入れて応力変形を求めるものと、これらの解式を線型化することにより、固有値問題にな

おして座屈荷重を算定しようとするものにわけられる。このような非線型問題を解くためには、数値計算上の多くの工夫が必要となるが、これらについては、T.J. Poskitt¹²⁾をはじめ、藤野・大坂¹³⁾、大地・舟木¹⁵⁾、堀井・川原¹⁶⁾などにより行なわれている。

材料が弾性範囲を越えた場合の骨組構造の解析法は、完全塑性体については、いわゆる塑性ヒンジの理論として理論展開がなされている。応力-ひずみ関係が非線型な関係式あるいはそれらを誤差の少ない近似式であらわして解式を組み立てる方法も数多くなされている。この場合当然変形による効果を考慮に入れるべきであるが、そのような解析法は少ない¹⁷⁾。

著者らは骨組構造を、ある区間に分割し、その分割区間について、平面保持則および補正仕事の定理を用いて部材端力と部材端変位との関係式に対して、塑性ひずみによる影響を部材の剛性を補正することによって取り入れ、変形による影響も、この補正された剛性を用いることにより近似的に、きわめて簡単に考慮することができることを示し、数値計算上の工夫と合わせて、平面骨組構造の場合について報告する。

2. 部材端力と部材端変位との関係

(1) 応力-ひずみ関係

応力 σ と全ひずみ ϵ との関係はつぎのごとくあらわされるものとする。

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p = R(\sigma) \dots \dots \dots (1)$$

$$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{弾性ひずみ}), \quad E: \text{弾性係数}$$

$$\epsilon_p = \rho(\sigma) \quad (\text{塑性ひずみ})$$

すなわち、全ひずみ ϵ は、弾性ひずみ ϵ_e と、塑性ひずみ ϵ_p との和であらわされ、塑性ひずみ ϵ_p は、応力

* 正会員 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
** 学生員 工修 早稲田大学大学院 理工学研究科 建設工学専攻

σ の関数として、たとえば Ramberg-Osgood 式のごとく、与えられるとする。

構造物の各断面について、平面保持則が成立するものとして、曲率 χ 、軸方向ひずみ ϵ_n を用いて、全ひずみ ϵ はつぎのごとくあらわされる。

$$\epsilon = \chi \cdot y + \epsilon_n \dots \dots \dots (2)$$

y は各断面について、重心軸よりの距離をあらわす。

式 (1), (2) より

$$\chi \cdot y + \epsilon_n = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_p \dots \dots \dots (3)$$

式 (3) を全断面について積分すれば、

$$\int \chi \cdot y \cdot dA + \int \epsilon_n \cdot dA = \int \frac{\sigma}{E} \cdot dA + \int \epsilon_p \cdot dA$$

式 (3) の両辺に y をかけて全断面について積分すれば、

$$\int \chi \cdot y^2 \cdot dA + \int \epsilon_n \cdot y \cdot dA = \int \frac{\sigma}{E} \cdot y \cdot dA + \int \epsilon_p \cdot y \cdot dA$$

y は重心軸からの距離であるので、

$$\int y \cdot dA = 0$$

断面積 A 、断面二次モーメント I 、軸力 N 、曲げモーメント M の定義によって、

$$\int dA = A, \quad \int y^2 dA = I$$

$$\int \frac{\sigma}{E} dA = \frac{N}{E}, \quad \int \frac{\sigma}{E} \cdot y \cdot dA = \frac{M}{E}$$

これより、 $N, M \neq 0$ であるとして、

$$\epsilon_n = \frac{N}{EA} + \frac{1}{A} \int \epsilon_p \cdot dA = \frac{N}{EA} (1 + \theta_N) \dots \dots (4)$$

$$\chi = \frac{M}{EI} + \frac{1}{I} \int \epsilon_p \cdot y \cdot dA = \frac{M}{EI} (1 + \theta_M) \dots (5)$$

$$\theta_N = \frac{E}{N} \int \epsilon_p \cdot dA$$

$$\theta_M = \frac{E}{M} \int \epsilon_p \cdot y \cdot dA$$

これを簡単に、

$$\{N\} = [e] \cdot \{n\} \dots \dots \dots (6)$$

ただし、

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}, \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \chi \end{Bmatrix},$$

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{(1+\theta_N)} & \\ & \frac{EI}{(1+\theta_M)} \end{bmatrix}$$

とあらわしておく。

(2) 部材端力と部材端変位との関係式

部材軸にそって軸ひずみ ϵ_n 、曲率 χ 、と部材端の変位との関係を、分割区間内において、近似的につぎのようにあらわされると仮定する。

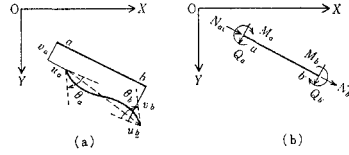


図-1

$$\epsilon_n = \frac{u_a - u_b}{l}$$

$$\chi = \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) (v_a - v_b) + \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \theta_a + \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \theta_b$$

これは、周知のごとく、分割区間内で、微小変形の仮定のもとに、軸力が一定、曲げモーメントが直線的に変化した場合の関係である。

これを簡単に

$$\{n\} = [a] \cdot \{u\} \dots \dots \dots (7)$$

$$\{u\}^T = \{u_a \mid u_b\}^T = \{u_a \ v_a \ \theta_a \mid u_b \ v_b \ \theta_b\}^T$$

ここに T は転置行列をあらわす。部材端変位は 図-1 (a) に示す方向を正とする。一方、部材端における換算部材力を 図-1 (b) のごとくとり、

$$\{F\}^T = \{F_a \mid F_b\}^T = \{N_a \ S_a \ M_a \mid N_b \ S_b \ M_b\}^T$$

とあらわすことにし、 $\{F\}$ による補正仕事は、

$$W_E = \{u\}^T \cdot \{F\}$$

で与えられ、内力による補正仕事は、

$$W_I = \int \{n\}^T \cdot \{N\} \cdot dx$$

$$= \{u\}^T \left[\int [a]^T \cdot [e] \cdot [a] \cdot dx \right] \cdot \{u\}$$

これより、

$$\{F\} = [k] \cdot \{u\} \dots \dots \dots (9)$$

$$[k] = \left[\int [a]^T \cdot [e] \cdot [a] \cdot dx \right]$$

式 (9) により、部材端力と部材端変位の関係すなわち部材に関する変形条件式が求まったわけであるが、式 (9) の係数 $[k]$ の中には θ_N, θ_M を含んでおり、このままでは積分することはきわめて困難である。そこで近似的に θ_N, θ_M は、部材軸にそって分割区間内で一定であるとする。逆にこの仮定は、構造部材を θ_N, θ_M が一定であるとみなし得る区間に細分割することにより解決される。

以上により、式 (9) の係数 $[k]$ は式 (10) のごとく与えられる。

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & \\ & C^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{Bmatrix} \{x\},$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

x, y, θ はそれぞれ節点変位の基準座標系方向成分の番号の順にならべたベクトルである。

式 (11), (12), (13) により、構造物の解式はつぎのごとくなる。

$$[\alpha \ \beta] \cdot \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{Bmatrix} \{x\} = \{P\}$$

\dots\dots\dots(14)

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \\ & C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L_a \\ L_b \end{Bmatrix} \cdot [d] \cdot [L_a^T \ L_b^T] \cdot \begin{bmatrix} C^T & \\ & C^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_a \\ C_b \end{bmatrix} \cdot [d] \cdot [C_a^T \ C_b^T]$$

$$[C_a] = [C] \cdot [L_a] = \begin{bmatrix} C_x & -C_x \\ C_y & C_x \\ & l \\ & 2 & E \end{bmatrix}$$

$$[C_b] = [C] \cdot [L_b] = \begin{bmatrix} -C_x & C_y \\ -C_y & -C_x \\ & l \\ & 2 & -E \end{bmatrix}$$

式 (14) を安定な支点条件のもとに解けば、節点の変位 $\{x\}$ を求めることができるが、係数行列に θ_N, θ_M を含んでおり、なんらかの形で、これらを仮定して、収束計算を行なう必要がある。式 (14) を簡単に

$$[K(x, \theta)] \{x\} = \{P\},$$

または $[L(x)] [d(\theta)] [L^T(x)] \{x\} = \{P\}$ \dots\dots\dots(15)

のごとくあらわしておく。 x は変位を、 θ は補正係数 θ_N, θ_M をあらわすものとする。

4. 有限変形の考慮

材料が弾性的でない状態では、変位は大きくなり、微小変形の仮定は適当でない。前項までの仮定により、構造物を部材内においても、細く分割しなければならぬことになり、このことを前提として、式 (14) の係数行列に対して変形後の状態で考えた部材長、方向余弦を用いて計算することによって、有限変形を考慮することができる。そして分割区間を細くすることにより、より誤差を少なくすることができる。

部材長、方向余弦を変形後の状態で考え、級数展開し、2次以上の項を省略すると、

$$C_x = C_x^d + C_x^l = \frac{x^0}{l_d} + \frac{y^0}{l_d^3} (x_b - x_a) - \frac{x^0 y^0}{l_d^3} (y_b - y_a)$$

$$C_y = C_y^d + C_y^l = \frac{y^0}{l_d} - \frac{x^0 y^0}{l_d^3} (x_b - x_a) + \frac{x^0}{l_d^3} (y_b - y_a)$$

$$l = l_d + l_l = l_d + \frac{x^0}{l_d} (x_b - x_a) + \frac{y^0}{l_d} (y_b - y_a)$$

ここに x^0, y^0 はそれぞれ変形前の状態での基準座標系方向への部材の投影長を、 l_d は部材長をあらわす。

$x_a, y_a, (x_b, y_b)$ はそれぞれ a 端 (b 端) の部材端の変位の基準座標系方向の成分をあらわす。これらを用いて解式 式 (14) を書きなおすと、

$$[\alpha \ \beta] \cdot \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{Bmatrix} \{x\} = \{P\}$$

\dots\dots\dots(16)

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a^d + C_a^l \\ C_b^d + C_b^l \end{bmatrix} \cdot [d] \cdot [C_a^d + C_a^l \ C_b^d + C_b^l]$$

$$[C_a^d + C_a^l] = \begin{bmatrix} C_{xd} & -C_{yd} \\ C_{yd} & C_{xd} \\ & l_d \\ & 2 & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xl} & -C_{yl} \\ C_{yl} & C_{xl} \\ & l_l \\ & 2 \end{bmatrix}$$

$$[C_b^d + C_b^l] = \begin{bmatrix} -C_{xd} & C_{yd} \\ -C_{yd} & -C_{xd} \\ & l_d \\ & 2 & -E \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -C_{xl} & C_{yl} \\ -C_{yl} & -C_{xl} \\ & l_l \\ & 2 \end{bmatrix}$$

式 (16) 中の $[d]$ に含まれる部材長は計算の都合上変形前の長さを用いることにする。式 (16) の係数行列を2次以上の項を省略して整頓すると、

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa}^d & K_{ab}^d \\ K_{ba}^d & K_{bb}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a^d \\ C_b^d \end{bmatrix} [d] [C_a^l \ C_b^l] + \begin{bmatrix} C_a^l \\ C_b^l \end{bmatrix} [d] [C_a^d \ C_b^d] \dots\dots\dots(17)$$

ここに、

$$\begin{bmatrix} K_{aa}^d & K_{ab}^d \\ K_{ba}^d & K_{bb}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & A' & B' & C' \\ B & D & E & B' & D' & E' \\ C' & E & F & C & E' & F' \\ A' & B' & C & A & B & C \\ B' & D' & E' & B & D & E' \\ C' & E & F' & C & E' & F \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= a \cdot C_{xd}^2 + b \cdot C_{yd}^2, & A' &= -a \cdot C_{xd}^2 - b \cdot C_{yd}^2 \\ B &= (a-b)C_{xd}C_{yd}, & B' &= -(a-b)C_{xd}C_{yd} \\ C &= C_{yd} \cdot b \cdot \frac{l_d}{2}, & C' &= -C_{yd} \cdot b \cdot \frac{l_d}{2} \\ D &= a \cdot C_{yd}^2 + b \cdot C_{xd}^2, & D' &= -a \cdot C_{yd}^2 - b \cdot C_{xd}^2 \\ E &= C_{xd} \cdot b \cdot \frac{l_d}{2}, & E' &= -C_{xd} \cdot b \cdot \frac{l_d}{2} \\ F &= 4 \cdot c, & F' &= 2c \\ a &= \frac{EA}{l_d(1+\theta_N)}, & b &= \frac{12EI}{l_d^3(1+\theta_M)} \\ c &= \frac{EI}{l_d^3(1+\theta_M)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_a^d \\ C_b^d \end{bmatrix} [d] [C_a^{dT} \ C_b^{dT}] = \begin{bmatrix} A & B & C & A' & B' & C' \\ D & E & F & D' & E' & F' \\ G' & H & I & G & H' & I \\ A' & B' & C & A & B & C \\ D' & E' & F' & D & E & F' \\ G' & H & I & G & H' & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_a^l \\ C_b^l \end{bmatrix} [d] [C_a^{dT} \ C_b^{dT}] = \begin{bmatrix} A & D & G' & A' & D' & G' \\ B & E & H & B' & E' & H \\ C' & F & I & C & F' & I \\ A' & D' & G & A & D & G \\ B' & E' & H' & B & E & H' \\ C' & F & I & C & F' & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= C_{xd} \cdot a \cdot C_{xl} + C_{yd} \cdot b \cdot C_{yl}, \\ A' &= -C_{xd} \cdot a \cdot C_{xl} - C_{yd} \cdot b \cdot C_{yl} \\ B &= C_{xd} \cdot a \cdot C_{yl} - C_{yd} \cdot b \cdot C_{xl}, \\ B' &= -C_{xd} \cdot a \cdot C_{yl} + C_{yd} \cdot b \cdot C_{xl} \\ C &= C_{yd} \cdot b \cdot \frac{l_l}{2}, & C' &= -C_{yd} \cdot b \cdot \frac{l_l}{2} \\ D &= C_{yd} \cdot a \cdot C_{xl} - C_{xd} \cdot b \cdot C_{yl}, \\ D' &= -C_{yd} \cdot a \cdot C_{xl} + C_{xd} \cdot b \cdot C_{yl} \\ E &= C_{yd} \cdot a \cdot C_{yl} + C_{xd} \cdot b \cdot C_{xl}, \\ E' &= -C_{yd} \cdot a \cdot C_{yl} - C_{xd} \cdot b \cdot C_{xl} \\ F &= C_{xd} \cdot b \cdot \frac{l_l}{2}, & F' &= -C_{xd} \cdot b \cdot \frac{l_l}{2} \\ G &= \frac{l_d}{2} \cdot b \cdot C_{yl}, & G' &= -\frac{l_d}{2} \cdot b \cdot C_{yl} \\ H &= \frac{l_d}{2} \cdot b \cdot C_{xl}, & H' &= -\frac{l_d}{2} \cdot b \cdot C_{xl}, \\ I &= \frac{l_d}{2} \cdot b \cdot \frac{l_l}{2} \end{aligned}$$

である。

以上によって、式 (16) はまたつぎのように書くことができる。

$$[L^d + L^l] \cdot [d] \cdot [L^d + L^l]^T \cdot \{x\} = \{P\} \dots (18)$$

$$[L^d + L^l] = [\alpha \ \beta] \cdot \begin{bmatrix} C_a^d + C_a^l \\ \dots \\ C_b^d + C_b^l \end{bmatrix}$$

5. 収束計算に対する数値計算法

本解法によれば、構造を細く分割する必要があるためかなり多くの元数をもつ多元連立一次方程式を解かねばならないが、この問題は、たとえば共役勾配法を用いるなどすれば解決することができる。しかし、未知数を係数行列に含む連立方程式系の解を求めることに帰着されるが、実際の数値計算にあたってはなんらかの形で収束計算を行なわねばならない。

以下実際に適用してみた方法を上げて、優劣を比較したい。

(1) くり返し試算法による計算方法

この方法は直接法とも呼ばれ、係数行列に含まれる θ_N, θ_M を適当に仮定して、与えられた荷重 $\{P\}$ に対する解を直接くり返し試算により求めようとするものである。

最も簡単には、式 (18) 係数行列に含まれる θ_N, θ_M を仮定して連立一次方程式を解き、変位を計算し、それより、それぞれ各分割区間における ε_p を計算してこれが一定値になるまで、くり返し計算をやりなおせばよい。しかしこの方法で、実際に、 ε_p が一定値に収束する場合は、荷重 $\{P\}$ が、あまり大きくない範囲に限られている。

より計算を簡単にするために、

$$\frac{1}{1+\theta_N} = 1 + k_N, \quad k_N = \frac{1}{1+\theta_N} - 1$$

$$\frac{1}{1+\theta_M} = 1 + k_M, \quad k_M = \frac{1}{1+\theta_M} - 1$$

と変形しておき、式 (18) の $[d]$ を書き変え、

$$[d] = [d_D] + [d_\theta] \dots (19)$$

としておき、 $[L^d + L^l]$ に対しては、式 (17) のごとくに変形すれば、結局

$$\{x\} = [K_D]^{-1} (\{P\} - \{P_\theta\} - \{P_R\} - \{P_L\}) \dots (20)$$

$$[K_D] = [\alpha \ \beta] \cdot \begin{bmatrix} C_a^d \\ \dots \\ C_b^d \end{bmatrix} \cdot [d_D] \cdot [C_a^d \ C_b^d] \cdot \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \dots \\ \beta^T \end{bmatrix}$$

$$\{P_\theta\} = [\alpha \ \beta] \cdot \begin{bmatrix} C_a^d \\ \dots \\ C_b^d \end{bmatrix}$$

$$\cdot [d_\theta] \cdot [C_a^{dT} \ C_b^{dT}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \dots \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x\}$$

$$\begin{aligned} \{P_R\} &= [\alpha \ \beta] \cdot \begin{bmatrix} C_a^l \\ C_b^l \end{bmatrix} \\ &\cdot [d] \cdot [C_a^{dT} \ C_b^{dT}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x\} \\ \{P_L\} &= [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} C_a^d \\ C_b^d \end{bmatrix} \\ &\cdot [d] \cdot [C_a^{dT} \ C_b^{dT}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x\} \end{aligned}$$

となるから、最初、 $\theta_N = \theta_M = \varepsilon_p = 0$ と仮定すれば、式(20)右辺は、荷重 $\{P\}$ のみになるので、これより第1回目の $\{x\}$ を計算し、続いて順次、各分割区間ごとに、

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{l}(u_a - u_b) \\ \chi &= \frac{1}{l}(\theta_a - \theta_b) \\ \varepsilon &= \varepsilon_n + \chi \cdot z \\ \sigma &= R^{-1}(\varepsilon), \quad \varepsilon_p = \rho(\sigma) \\ \bar{N} &= \int \sigma \cdot dA, \quad \bar{M} = \int \sigma \cdot z \cdot dA \\ \theta_N &= \frac{E}{\bar{N}} \int \varepsilon_p \cdot dA, \quad \theta_M = \frac{E}{\bar{M}} \int \varepsilon_p \cdot z \cdot dA \\ k_N &= \frac{1}{1 + \theta_N} - 1, \quad k_M = \frac{1}{1 + \theta_M} - 1 \end{aligned}$$

このように計算して、 ε_p が一定値に収束するまでくり返す。 $\sigma = R^{-1}(\varepsilon)$ の意味は ε を与えて、応力ひずみ関係を用いて応力 σ を計算することをあらわしており、くわしくは後述する。

この方法は、計算が簡単で、与えられた荷重に対して数回ないし数十回のくり返し演算回数で解が得られるため計算時間が短くてすむが、一定値に収束しない場合がある。これを解決するためには、解が収束するように収束係数を用いることが考えられる。しかし、このような収束計算では、収束の状態が一定でなく、構造形式、構造のもつ剛性、荷重などに左右されるため、収束係数もいろいろの場合があり、一般的に通用するものは決定しがたい。

しかし、いずれかの方法で、連立一次方程式を解く操作をくり返さねばならないが、式(20)のごとくに変形しておく、 $[K_D]$ の逆行列を1回計算しておけば、あとは、荷重項の修正の操作をくり返すだけで、収束計算を行なうことができる。一方、連立一次方程式を係数行列の零でない項のみを用いて解く方法は、Householder法、Steepest descent法、Congurate gradient法など、たくさん考案されており、これらを用いて、一回ずつ、係数行列をつくりなおして、解を求めることも良い。著者の経験では、この場合には、

$$\begin{aligned} ([K_D] + [K_\theta]) \{x\} &= \{P\} - \{P_R\} - \{P_L\} \\ [K_\theta] &= [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} C_a^d \\ C_b^d \end{bmatrix} \\ &\cdot [d_\theta] [C_a^{dT} \ C_b^{dT}] \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と変形しておいたほうが、計算時間が短いようである。また式(20)の収束計算に対して、上記の Steepest descent法などの、アルゴリズムは、右辺の ($\{P\} - \{P_\theta\} - \{P_L\} - \{P_R\}$) の変化が小さいときには、そのまま最適な勾配をあたえることがわかるので、これらを拡張応用することも考えられる。

(2) 荷重増加法による計算方法

くり返し試算法による場合は、荷重が大きい状態では、収束計算が発散して解が得られない場合があるので、荷重を少量ずつ増加させ、それに応じて変形、応力を計算していく方法を考える。

荷重増分 $\{dP\}$ によって式(18)は、

$$[L^d L^l] [d + d^l] [L^d + L^l] \{x + dx\} = \{P + dP\}$$

となるから、これを整理して、

$$[K_D] \{dx\} = \{dP\} - \{dP_\theta\} - \{dP_L\} - \{dP_R\}$$

$$\begin{aligned} [K_D] &= [L^d] [d^d] [L^{dT}] \\ &= [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} K_{aa}^d & K_{ba}^d \\ K_{ab}^d & K_{bb}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{dP_\theta\} &= [L^d] [d^l] [L^{dT}] \{x + dx\} \\ &= [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} C_a^d \\ C_b^d \end{bmatrix} \\ &\cdot [d^l] [C_a^d \ C_b^d] \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x + dx\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{dP_R\} &= [L^l] [d^d + d^l] [L^{dT}] \{x + dx\} \\ &= [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} C_a^l \\ C_b^l \end{bmatrix} \\ &\cdot [d^d + d^l] [C_a^d \ C_b^d] \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x + dx\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{dP_L\} &= [L^d] [d^d + d^l] [L^{dT}] \{x + dx\} \\ &= [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} C_a^d \\ C_b^d \end{bmatrix} \\ &\cdot [d^d + d^l] [C_a^l \ C_b^l] \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x + dx\} \end{aligned}$$

つづいて順番に、

$$d\varepsilon_n = \frac{1}{l}(du_a - du_b)$$

$$dx = \frac{1}{l}(d\theta_a - d\theta_b)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon_n + dx \cdot y$$

$$(\sigma + d\sigma) = R^{-1}(\varepsilon + d\varepsilon)$$

$$d\sigma = (\sigma + d\sigma) - \sigma, \quad d\varepsilon_c = d\varepsilon - d\varepsilon_e$$

$$d\bar{N} = \int d\sigma \cdot dA, \quad d\bar{M} = \int d\sigma \cdot y \cdot dA$$

$$d\theta_N = EN \int d\varepsilon_c \cdot dA - \frac{E}{N^2} \cdot d\bar{N} \cdot \int \varepsilon_c \cdot dA$$

$$d\theta_M = \frac{E}{M} \int d\varepsilon_c \cdot dA - \frac{E}{M^2} \cdot d\bar{M} \cdot \int \varepsilon_c \cdot y \cdot dA$$

このように計算して、 $d\varepsilon_c$ が一定値になるまで、計算をくり返し、収束したら、さらに荷重を増加させる。この方法では、確実に収束するように荷重増分を選ぶことができるから、かならず解を得ることができる反面、少しずつ荷重を増加させてゆかねばならないから、当然計算時間が増加し、また荷重段階が多くなると誤差を含む割合が多くなって来ことに注意しなければならない。

(3) 全ひずみ ε より応力 σ を求めること

前項の計算では、いずれも、全ひずみ ε が与えられ、これより応力 σ を計算する必要がある。応力 σ が ε の関数として与えられる場合は問題ないが、式(1)のごとくに、全ひずみ ε が応力 σ の関数として与えられる場合が一般的であるので、この場合にはつぎのようにして求めるとよい。

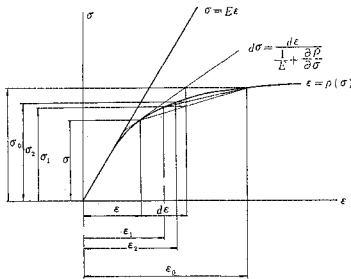


図-2

$\varepsilon + d\varepsilon$ が与えられたとして、図-2を参照して、まず、 (ε, σ) の状態における、応力-ひずみ関係式の接線勾配を、

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{E} + \left(\frac{\partial \rho(\sigma)}{\partial \sigma}\right)}$$

により求める。これを用いて、 $\varepsilon + d\varepsilon$ に対応する応力 σ_0 を求める。この応力 σ_0 より新たに式(1)より、 ε_0 を計算する。この点 $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ と基準の状態 (ε, σ) とを直線で結び、 $\varepsilon + d\varepsilon$ と交わる点を求めることにより、応力 σ_1 を求める。この応力 σ_1 より、式(1)によってひずみ ε_1 を計算して、この ε_1 が、 $\varepsilon + d\varepsilon$ に等しければよし、さもなければ、あらためて、 $(\varepsilon_1, \sigma_1)$ と $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ を直線で結んで、 $\varepsilon + d\varepsilon$ に対応する応力を求める。

以上の操作をくり返すことにより、 $\varepsilon + d\varepsilon$ に対応す

る応力 $\sigma + d\sigma$ を求めることができる。接線勾配を $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ の点で計算しなおす方法も考えられるが、この場合には、振動をはじめて、求める値が得られないことがあるので注意する必要がある。

6. 構造の安定・不安定の判別

構造にたくわえられるひずみエネルギー W は式(16)を用いて

$$W = \frac{1}{2} \{x\}^T [\alpha \ \beta] \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \end{bmatrix} \{x\}$$

であらわされるから、構造が安定であるためには、この2次形式が正でなければならない。このためには、

$$\Delta = \begin{vmatrix} [\alpha \ \beta] & \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C^T \\ \beta^T \end{bmatrix} & \end{vmatrix}$$

が正でなければならない。そこで荷重増加とともに、この Δ を計算しておき、これを構造が安定かどうかの指標とする。しかし、実際にこの Δ を計算すると、非常に大きな値となり、この Δ によって、構造が不安定になる荷重を計算することは困難である。この行列式より、構造が不安定になる荷重を求めることは、いわゆる座屈荷重の計算であり、実用上の意味も大きい。しかし本解法では、直接座屈荷重を求めることはできない。しかし構造の安定・不安定の判別には、このほかに、変位を指標として用いることもできるし、また、 θ_N, θ_M は、構造の剛性の低下をあらわすものであるから、これを指標として用いることもできる。

7. 計算例

図-3に示す門型ラーメンについて、荷重増加法により計算した結果を示す。応力とひずみとの関係は、

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{3 \times 10^5} + \left| \frac{\sigma}{700} \right|^5 \text{sgn}(\sigma) \quad \text{および}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{3 \times 10^5} + \left| \frac{\sigma}{220} \right|^{20} \text{sgn}(\sigma)$$

であるとしている (ただし $\text{sgn}(\sigma)$ は σ の符号を表わす)。収束計算は、変位について、

$$\left| \frac{u^{(i)} - u^{(i-1)}}{u^{(i-1)}} \right| < 0.001$$

また、ひずみについては、

$$\left| (\varepsilon_n^{(i)} + z \cdot x^{(i)}) - \left(\frac{\sigma^{(i)}}{E} + \varepsilon_p^{(i)} \right) \right| < 10^{-7}$$

としている。

計算結果の荷重-変位図 (図-3 (a)), 曲げモーメント図 (図-3 (b)), 断面内の応力分布図 (図-3 (c), (d)) を示す。

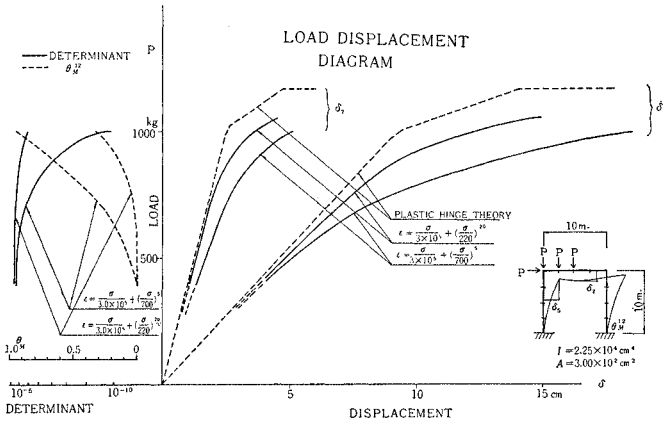


図-3 (a)

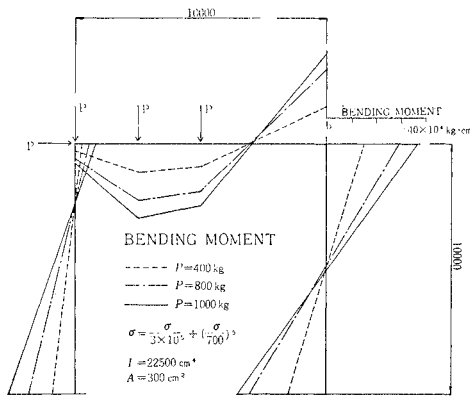


図-3 (b)

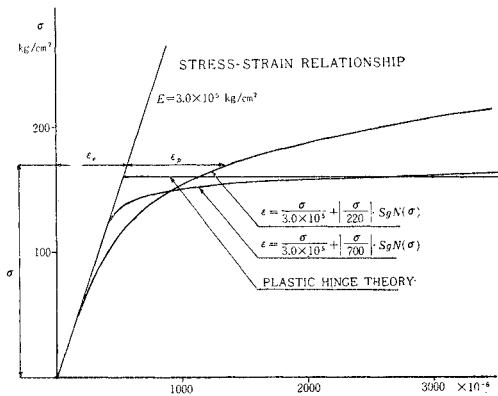


図-3 (e)

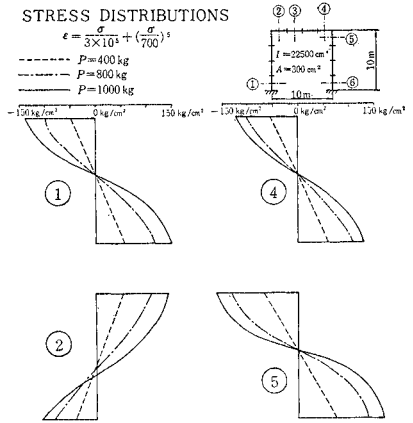


図-3 (c)

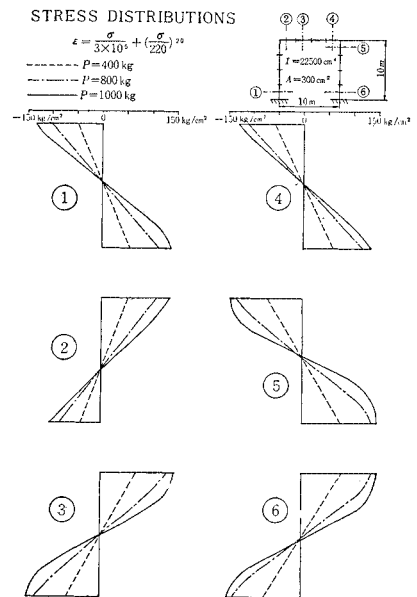


図-3 (d)

数値計算に用いた応力-ひずみ関係は 図-3 (e) のごとくである。降伏応力を 160 kg/cm² と考えた場合の plastic hinge 理論を用いて計算した変位を 図-3 (a) に併記した。

8. 結 言

応力とひずみの関係が、

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \rho(\sigma)$$

として与えられる材料より、構成される骨組構造の解析方法を分割区間を細くとり、その区間における剛性を修正することによって解析する方法ならびにそのアルゴリズムを作成した。塑性ひずみ ϵ_p は、一般に、応力の関数、または応力とひずみの関数として与えられるものであり、本解析法は、この関数が与えられれば、適用する

ことができる。

解式中の θ_N, θ_M は、剛性の低下をあらわす指数であり、これより弾性体と考えた場合より、どの程度、剛性が低下しているかがわかる。また、有限変形の影響を同様に、細く分割することを前提として、簡潔に取り入れることができる。

クリープによるひずみは、ひずみ速度一定などの条件の下には、

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \phi(l)\varphi(\sigma)$$

のごとくに与えられる場合が多いが、本解法では、この場合も、まったく同様に解析することができる。

しかし、分割区間を細かくとり、その間で成り立つ、近似式を用いており、分割数を多くとらねばならないが、連立一次方程式を解く方法は、計算時間はとにかく、小型の電子計算機でも、さほど問題ではない。収束計算を行なう手順は、このような計算の性質上、荷重をある量ずつ増加させて、変形・応力を逐次追跡する荷重増加法がよい。ただし、近似式であるため荷重増分が大きすぎると、荷重増分によって異なった値を得ることがあるため注意を要する。

また、直接に、構造が不安定になる荷重を求めることができない欠点がある。

数値計算は Burroughs B-5500 を用いた。数値計算上数々の助言をいただいた、日本電子計算(株)営業三課の諸氏に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Livesley, R.K.: "The Application of An Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis", Structural Engineer, 1956.
- 2) Argyris, J.H.: "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis", Pergamon Press, 1964.
- 3) Jennings, A.: "Frame Analysis Including Change of Geometry", Proc. ASCE, Vol. 94, ST 4, Mar. 1968.
- 4) Oden, J.T.: "Linear and non-linear analysis by conjugate analogy", Proc. ASCE, ST 4, Aug. 1967.
- 5) Oran, C.: "Complementary energy concept for Large deformations", Proc. ASCE, ST 1, Feb. 1967.
- 6) Oran, C.: "Complementary energy concept for buckling", Proc. ASCE, EM 1, Feb. 1967.
- 7) Saafan, S.A.: "Theoretical analysis suspension bridges", Proc. ASCE, Vol. 192, ST, Aug. 1966.
- 8) Saafan, S.A.: "Nonlinear behaviour of Structural Plane Frames", Proc. ASCE, Vol. 89, ST 4, Aug. 1963.
- 9) Merchant, W. and Bratton, P.M.: "A Generalized method of analysis of elastic plane frames", International Association for Bridge and Structural Engineering Symposium, Rio de Janeiro, Brazil, 1964.
- 10) Miller, M.A., Bratton, D.M. and Merchant, W.: "A Computer method for the analysis of non linear elastic plane frameworks", International Symposium on Use of Computers in Structural Engineering, Department of Civil Engineering, University of New-Castle, New-Castle, England, 1966.
- 11) Conner, J.J., Jr., Loggher, R.D. and Chang, S.C.: "Non-linear analysis of elastic frame structures", Proc. ASCE, ST 6, Jun. 1968.
- 12) Poskitt, T.J.: "Numerical solution of nonlinear structures", Proc. ASCE, ST 4, Aug. 1967.
- 13) 藤野 勉・大坂憲二: "有限変形による構造解析", 第21回土木学会年次学術講演会
- 14) 藤野 勉・大坂憲二: "構造物一般の弾性座屈解析法についての考察", 第22回土木学会年次学術講演会
- 15) 大地羊三・船木健二: "大変形理論の一考察", 第23回土木学会年次学術講演会
- 16) 堀井健一郎・川原睦人: "形状の変化を考慮した骨組構造の解法について", 第23回土木学会年次学術講演会
- 17) 山崎徳也・太田俊昭・後藤栄一: "有限変形を考慮したはりの弾塑性解析", 第23回土木学会年次学術講演会
- 18) 後藤茂夫: "不規則吊材を有する吊橋の解法", 橋梁構造工学研究発表会, 1964
- 19) 後藤茂夫: "有限変形法による吊橋の解法", 土木学会論文集, No. 156, 1968.
- 20) 後藤茂夫・今野光明・大槻 護・大西葦紀: "有限変形法による立体トラスの解法", 第23回土木学会年次学術講演会
- 21) Huddleston, J.U.: "Numerical technique for elastic problems", Proc. ASCE, EM 5, Oct. 1968.
- 22) Zarghamee, M.S., Shah, J.M.: "Stability of Spaceframes", Proc. ASCE, EM 8, April 1968.
- 23) Lee, S.L., Manual, F.S., Rassow, E.C.: "Large deflections and stability of elastic frames", Proc. ASCE, EM 2, April 1968.
- 24) Mallet, R.H., Marcal, P.V.: "Finite element analysis of nonlinear structures", Proc. ASCE, ST 9, 1968.
- 25) Halldorsson, O.P., Wang, C.K.: "Stability analysis of frameworks by matrix methods", Proc. ASCE ST 7, 1967.
- 26) Hensly, R.C., Azar, J.J.: "Computer analysis of nonlinear Truss structures", Proc. ASCE, ST 6, June 1968.
- 27) Williams, F.W.: "An approach to the nonlinear behavior of the members of a rigidly jointed plane frameworks with finite deformations", Quarterly Journal of mechanics and applied mathematics, Vol. 17, England, 1964.
- 28) Libove, C.: "Complementary energy method for finite deformation", Proc. ASCE, Vol. 90, EM 6, Dec. 1964.
- 29) Goldberg, J.E., Goldberg, R.M.: "Analysis of nonlinear structures", Proc. ASCE, ST 4, Aug. 1963.
- 30) Le-Wu, Lu: "Stability of Frames under primary bending moment", Proc. ASCE, ST 3, Vol. 89, 1963.
- 31) 大地羊三: "行列による骨組構造の解法", 土木学会論文集, No. 87

(1969. 3. 11・受付)