

充腹構造物の自励振動における空気力の特性*

THE CHARACTERISTICS OF THE AERODYNAMIC FORCES IN SELF-EXCITED OSCILLATIONS OF BLUFF STRUCTURES

田 中 宏**・伊 藤 学***
By Hiroshi Tanaka and Manabu Ito

1. ま え が き

つり橋の耐風性を究極的に支配する現象は、全橋模型に対する風洞実験の結果、横たわみ、横座屈、自励振動の3種に大別できることが知られている¹⁾。これらのうち、安全性の検討にもっとも大きな問題を残しているのは空気力の負減衰による自励振動現象であるが、それは、複雑多様な橋桁断面が振動する際に作用する空気力の特性、および振動の発生機構に不明の点が多いためと考えられる。

本研究は、橋桁として考えられる断面を理想化して平板およびこれに開床部を設けたものと、箱形、H形、Π形などの充腹桁断面を考え、風洞実験によって振動中の各断面に作用する非定常空気力(動的空気力)を測定し、断面特性と空気力との関連性、振動特性と空気力との関連性、測定空気力に基づく発振風速の計算値とフラッター実験による限界風速との比較検討などを行ない、自励振動現象における空気力特性の解明に寄与しようとするものである。

2. 非定常空気力の測定

(1) 非定常空気力の表示

二次元剛体が、円振動数 ω で曲げねじれの連成調和振動をしているとき、風速 V (水平風)によって作用する非定常揚力 L および空力モーメント M は近似的に次式で表わされる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \downarrow L &= \pi \rho b^3 \omega^2 \left[L_\eta \left(\frac{\eta}{b} \right) + L_\varphi \cdot \varphi \right] \\ \curvearrowright M &= \pi \rho b^4 \omega^2 \left[M_\eta \left(\frac{\eta}{b} \right) + M_\varphi \cdot \varphi \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここに、 η, φ は図-1に示す上下および回転変位量、空気力係数 $L_\eta, L_\varphi, M_\eta, M_\varphi$ は、ある特定の断面において、いずれも換算振動数

$$k = \frac{\omega b}{V} \dots\dots(2)$$

の関数であって、一般に作

用空気力は変位との間に位相差をもつのでつぎのように複素表示し、変位位相成分(実数部)と速度位相成分(虚数部)とに分けて考える。

$$\left. \begin{aligned} \text{上下振動} \left\{ \begin{array}{l} \text{揚力} : L_\eta = L_{\eta R} + i L_{\eta I} \\ \text{モーメント} : M_\eta = M_{\eta R} + i M_{\eta I} \end{array} \right. \dots\dots(3) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{回転振動} \left\{ \begin{array}{l} \text{揚力} : L_\varphi = L_{\varphi R} + i L_{\varphi I} \\ \text{モーメント} : M_\varphi = M_{\varphi R} + i M_{\varphi I} \end{array} \right. \end{aligned} \right\}$$

これら空気力成分に関しては、平板に対して Theodorsen の与えた理論値がよく知られており³⁾,

$$\left. \begin{aligned} L_\eta &= -\frac{2i}{k} C(k), L_\varphi = -\frac{2}{k^2} C(k) - \frac{i}{k} [1 + C(k)] \\ M_\eta &= \frac{i}{k} C(k), M_\varphi = \frac{1}{k^2} C(k) - \frac{i}{2k} [1 - C(k)] \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

ここに $C(k) = F(k) + iG(k)$ は Theodorsen 関数と呼ばれる複素関数である。F. Bleich はこの理論値を用いてつり橋の自励振動解析を行なったのであるが⁴⁾、この理論から求められるつり橋の限界風速は、一般に風洞実験から定められる発振風速よりかなり高い。その主な理由は、実際のつり構造部においては、気流が断面からはく離し、Theodorsen 理論の基本となっているポテンシャル流の仮定が崩れてしまっているため、作用空気力が式(4)の値とはかなり違っているためと考えられている。

しかしいまのところ、このような断面に対する非定常空気力は解析的に求めることが困難なため、実験によって知るほかはない。

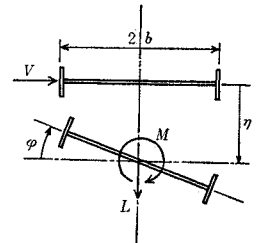


図-1 記号説明図

* 土木学会第23回年次学術講演会および東京大学工学部付属総合試験所年報第27巻(1968)に一部発表

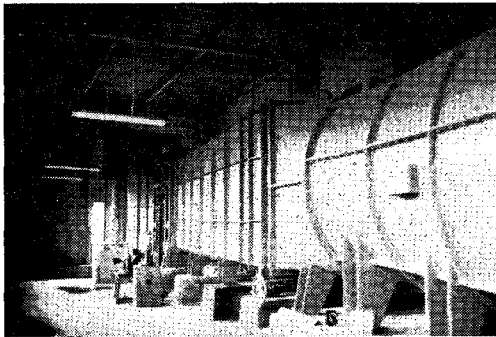
** 正会員 工博 東京大学助手 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科

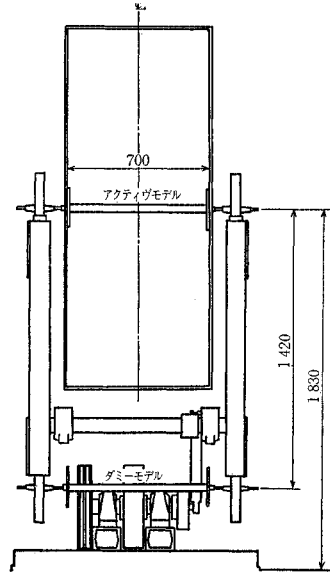
(2) 空気力の測定

測定実験は写真一1に示すような幅 0.7 m, 高さ 1.8 m の測定断面を有するエッフェル型空力弾性試験風洞(東京大学工学部土木工学科所属)において行なった。実験装置の概略は図一2~4に示すとおりである。すなわち、強制振動法とよばれる方法であって、風洞内の気流中に剛体模型をセットし、電動機によって一定の振幅、振動数の振動を与えて、空気力の反力を模型を支えるビームの曲げによって、ストレインゲージを用いて検出するのである。出力は振動波形とともにペン書きオシロに記録させ、振幅および強制変位との位相ずれを読みとる。模型の慣性力は、同じ形の模型を風洞外にダミーモデルとしてセットして、測定用模型と同時に振動させ、あらかじめ無風状態で両者が打ち消しあうようにしておく。振動形式は上下および回転振動とし、それぞれにつき揚力と空力モーメントを測定する。こうして測定した空気力の振幅および位相差から、式(3)のような8個の無次元空気力係数を k の関数として求めるのである。この方法は、九州大学の河島佑男らによって開発され⁹⁾、笠口展宏・坂田 弘らによってつり橋模型に対して応用されたものであるが⁹⁾、本実験ではダミーモデルの採用など若干の改良を施こした。

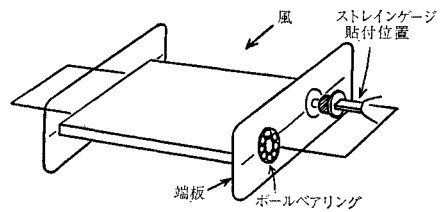
強制振動振幅は、上下方向片振幅 5~20 mm (回転方向片振幅で 2~7.5°) とし、水平風 (平均迎角 $\phi_i=0^\circ$) によって、 $k=0.1\sim 1.0$ の範囲で測定を行なった。実験



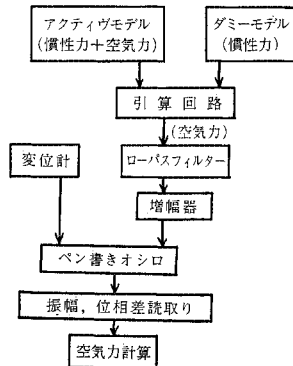
写真一1 空力弾性試験風洞



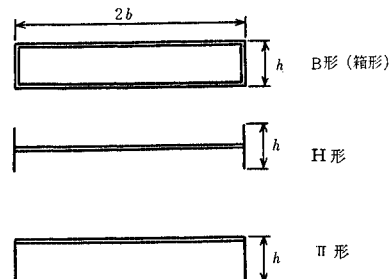
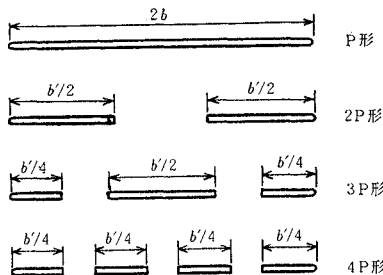
図一2 非定常空気力測定断面図



図一3 模型支持部



図一4 非定常空気力測定フローチャート



模型番号は、各形式記号の後に開床率 $\phi \times 100$ または桁高比 $(h/2b) \times 100$ を付記して示す

図一5 対象とした断面

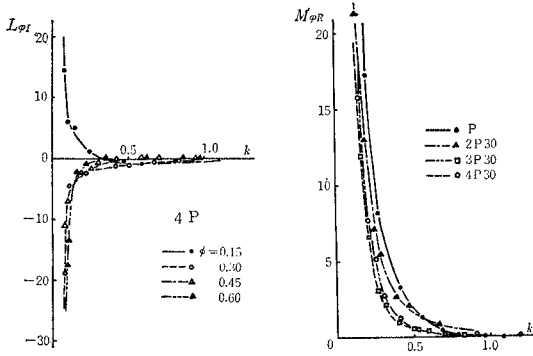


図-6 非定常空気力 (開床平板)

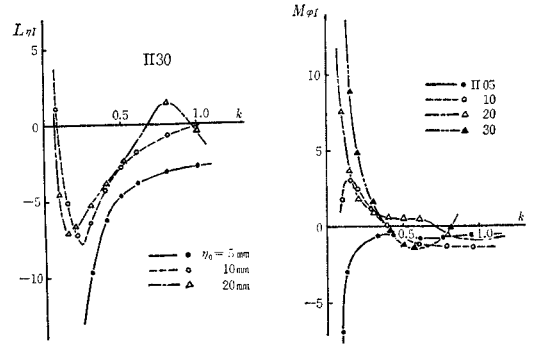


図-9 非定常空気力 (H形断面)

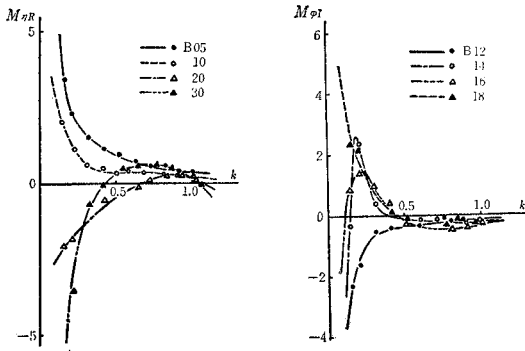


図-7 非定常空気力 (箱形断面)

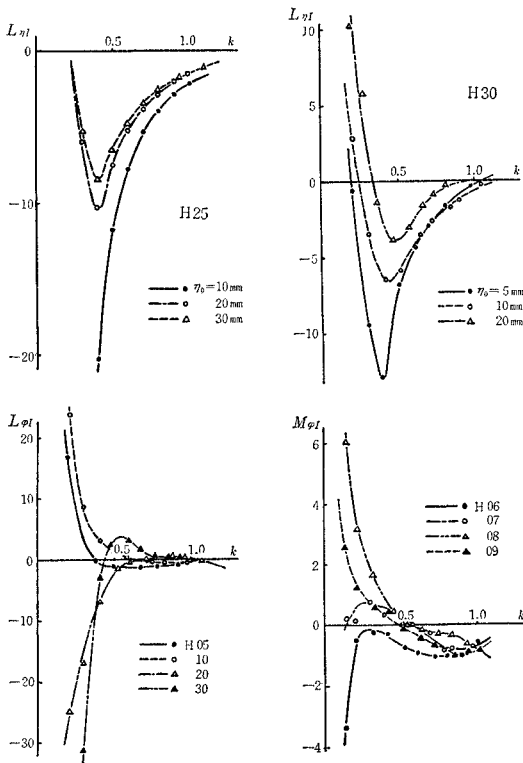


図-8 非定常空気力 (H形断面)

に用いた模型は 図-5 に示す各種である。主たる測定空気力を 図-6~9 に示す。これらの図で η_0 は片振幅、 ϕ は開床率である。

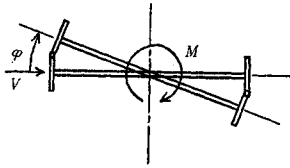
平板 P による測定値は、Theodorsen の理論値とよく一致した。このことは測定精度がかなり良いことを確認する一証拠といえよう。図-6~9 の測定空気力の特性については、4. で考察する。

なお、空気力は無次元表示してあるので、模型周辺の空気がポテンシャル流に保たれている限り、空気力に対する振動振幅の影響はないはずである。実際、平板理論値に近い値を示す断面ほど測定値に対する強制振動振幅の影響は小さく、無視できる。測定振幅 $\eta_0=5\sim 20$ mm ($\phi_0=2\sim 7.5^\circ$) で測定した限りでは、たとえば平板などにおいては、ほとんどその差は認められない。しかし、最大振幅が失速角をこえれば流れははく離し、変位に応じて離着をはじめるので、当然空気力も様相を異にして来る。したがって、充腹桁のように平板にくらべて前縁部ではく離流が形成されやすい断面においては、たとえば 図-8, 9 に示すように空気力において測定振幅による差異が顕著にあらわれて来ることになる。このことは、模型が平均迎角 ϕ_i をもった場合にもいえるわけで、平均迎角と振幅の和 $|\phi_i + \phi_0|$ が失速角に近づけばはく離がはじまり、同様の結果を招くのである。ただしこの場合に、実際にはく離の影響が空気力にあらわれてくる角度(動的失速角)は、静的に測定した失速角より若干大きくなるが、この点を明らかにするためには、今後さらに測定振幅を小間隔で変化させた実験を試みる必要があり、現在検討中である。また、発振風速の計算にあたっては、各振幅に対する空気力から外挿法によって振幅 0° に相当する空気力を求め利用することも考えられるが⁶⁾、その代わりに小振幅(たとえば $\phi_0=2\sim 3^\circ$ 程度)で測定した空気力によって計算すれば誤差は少なく、しかも一般には安全側となるので十分であろう。図-6~9 にはとくに指定のないものは片振幅 $\eta_0=5$ mm ($\phi_0=2^\circ$) による空気力を示した。

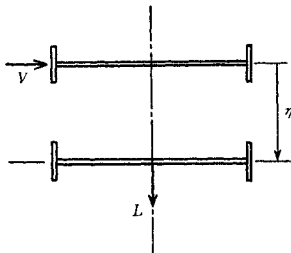
3. 非定常空気力による振動の安定解析

(1) ねじれ1自由度振動

橋桁が弾性中心のまわりに 図-10 (a) のような回転



(a) ねじれ (回転)



(b) 曲げ (上下)

図-10 1 自由度振動

振動 φ をする場合、振動方程式は

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2 (1 + i g_\varphi) \varphi = \frac{M}{\theta} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ω_φ はねじれ固有円振動数、 g_φ はねじれ構造減衰係数、 M は外力として作用する空力モーメント、 θ は単位長さの断面の質量慣性モーメントである。ここで式 (1) より、空気力を

$$M = \pi \rho b^4 \omega^2 (M_{\varphi R} + i M_{\varphi I}) \varphi \dots\dots\dots (6)$$

とすれば、式 (5) は

$$\ddot{\varphi} + \left[\left(\omega_\varphi^2 - \frac{\omega^2}{\nu} M_{\varphi R} \right) + i \left(g_\varphi \omega_\varphi^2 - \frac{\omega^2}{\nu} M_{\varphi I} \right) \right] \varphi = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$\nu = \frac{\theta}{\pi \rho b^4}$$

したがって

$$M_{\varphi I} > \nu g_\varphi \left(\frac{\omega_\varphi}{\omega} \right)^2 \dots\dots\dots (8)$$

のとき、この系は負減衰となり、振動が発散する。

$g_\varphi = 0$ の場合には、 $M_{\varphi I} > 0$ が不安定条件となる。

このことは、エネルギー的に見ればつぎのように表現できる。すなわち、回転変位を $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$ とするとき、空力モーメントは

$$M = \pi \rho b^4 \omega^2 \left(M_{\varphi R} \varphi + \frac{1}{\omega} M_{\varphi I} \dot{\varphi} \right) \\ = \pi \rho b^4 \omega^2 \varphi_0 (M_{\varphi R} \cos \omega t - M_{\varphi I} \sin \omega t)$$

振動1サイクルごとに空力のなす仕事 W は、構造減

衰を無視すれば、

$$W = \oint M d\varphi = \pi^2 \rho b^4 \omega^2 \varphi_0^2 \cdot M_{\varphi I} \dots\dots\dots (9)$$

したがって $M_{\varphi I} > 0$ ならば $W > 0$ となり、各サイクルごとにエネルギーが系にたくわえられて振動は増幅し、不安定となる。これが空力的負減衰効果である²⁾。

限界風速は式 (7) より

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{\nu} M_{\varphi R} &= \left(\frac{\omega_\varphi}{\omega} \right)^2 \\ M_{\varphi I} &= \nu g_\varphi \left(\frac{\omega_\varphi}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。 $g_\varphi = 0$ の場合は、第2式より $M_{\varphi I} = 0$ となる $k = k_c$ を求め、第1式より

$$\left. \begin{aligned} \omega_c &= \frac{\omega_\varphi}{\sqrt{1 + \frac{1}{\nu} M_{\varphi R} (k_c)}} \\ V_c &= \frac{\omega_c b}{k_c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

で、失速フラッター型自励振動の限界風速 V_c および円振動数 ω_c を求めることができる。 $g_\varphi > 0$ の場合には、式 (10) の第2式において $\omega = \omega_\varphi$ として k の第1近似を定め、これを第1式に用いて ω を求め、再び第2式に代入する。この繰返しは通常 2~3 回で収束し、 ω_c と V_c が決定する。

また式 (7) より

$$M_{\varphi R} > \nu \left(\frac{\omega_\varphi}{\omega} \right)^2 \dots\dots\dots (12)$$

のときには、系の見かけの剛性が低下して、ばね定数が負となった形となる。この場合には振動が起こらず、ねじれ変位が急速に増大して、いわゆるダイバージェンス現象となる。

以上より明らかなおおり、空力モーメント M の虚部 $M_{\varphi I}$ は系の見かけの減衰を低下させ、また実部 $M_{\varphi R}$ は見かけの剛性を低下させる効果をもつ。平板に対する理論値では式 (4) より、 $M_{\varphi I} < 0$ 、 $M_{\varphi R} > 0$ であって、ねじれ振動が不安定になることはないが、ねじれのダイバージェンスをおこす可能性をもっている。

(2) 曲げ1自由度振動

橋桁が 図-10 (b) のような上下振動 η をする場合には、振動方程式は

$$\ddot{\eta} + \omega_\eta^2 (1 + i g_\eta) \eta = \frac{L}{m} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 ω_η は曲げ固有円振動数、 g_η は曲げ構造減衰係数、 L は外力として作用する揚力、 m は単位長さの断面の質量である。前節と同様に、空気力を

$$L = \pi \rho b^2 \omega^2 (L_{\eta R} + i L_{\eta I}) \eta \dots\dots\dots (14)$$

で表わせば、ギャロピング型自励振動の限界風速を定める条件式は

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{\mu} L_{\eta R} &= \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega} \right)^2 \\ L_{\eta I} &= \mu g_{\eta} \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

となる。ただし

$$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$$

式(15)の解法は式(10)と同様である。

また、曲げモードにおけるダイバージェンスの条件は

$$L_{\eta R} > \mu \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega} \right)^2 \dots\dots\dots(16)$$

となる。すなわち、前節と同様に、揚力 L の虚部 $L_{\eta I}$ は系の見かけの減衰を低下させ、また実部 $L_{\eta R}$ は見かけの剛性を低下させる効果をもつ。式(4)の平板理論値では、 $L_{\eta I} < 0$ 、また、空気慣性項を無視すれば $L_{\eta R} < 0$ (無視しない場合でも $k < 0.35$ で)となり、両現象ともに安定である。

(3) 曲げねじれ連成振動

橋桁が図-1のように2自由度の振動 (η, φ) をするときには、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} + \omega_{\eta}^2(1 + ig_{\eta})\eta &= \frac{L}{m} \\ \ddot{\varphi} + \omega_{\varphi}^2(1 + ig_{\varphi})\varphi &= \frac{M}{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

空気力を式(1)のように表わし、振動が持続する限界条件として

$$\eta = \bar{\eta} e^{i\omega t}, \quad \varphi = \bar{\varphi} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(18)$$

とおけば、曲げねじれフラッター型自励振動の限界風速とその振動数を定める複素方程式、

$$\begin{vmatrix} \mu \left[1 - \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega} \right)^2 (1 + ig_{\eta}) \right] + L_{\eta} & L_{\varphi} \\ M_{\eta} & \nu \left[1 - \left(\frac{\omega_{\varphi}}{\omega} \right)^2 (1 + ig_{\varphi}) \right] + M_{\varphi} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

が与えられる。

式(19)の解法はすでに数多く与えられているが⁷⁾、この場合、連成振動の安定性において重要な役割をはたすのは空気力連成項 L_{φ}, M_{η} である。これらの成分の物理的な特徴は大略以下のとおりである。

$L_{\varphi R}$ は変位 φ によって η 方向に力を作用させ、見かけの曲げ剛性を低下させる効果をもつ。これは、定常空気力(静的三分力)においては、 $-s\varphi$ (s は揚力曲線の $\varphi=0$ におけるこう配)に相当する。

$L_{\varphi I}$ は角速度 $\dot{\varphi}$ によって $\dot{\eta}$ を作用させ、見かけの曲げ減衰を低下させる効果をもつ。同様に、 $M_{\eta R}$ は変位 η によって見かけのねじれ剛性を、また $M_{\eta I}$ は速度 $\dot{\eta}$ によって見かけのねじれ減衰を、それぞれ低下させる効果をもつ。 $M_{\eta I}$ は定常理論において上下方向の振動速度

による風の相対迎角を考慮した場合⁸⁾の $s_{\xi} (-\dot{\eta}/V)$ (s_{ξ} は空力モーメント曲線の $\varphi=0$ におけるこう配)に相当する。定常理論においては、 $L_{\varphi I}, M_{\eta R}$ は通常考慮されていない。したがって $L_{\varphi I} > 0, M_{\eta R} > 0$ は曲げねじれフラッター型自励振動の発現可能性を示し、また、 $L_{\varphi R} > 0, M_{\eta R} > 0$ は曲げねじれ変形の発散傾向を示すものといえよう。

平板理論値では、 $L_{\varphi I} > 0 (k < 0.20), M_{\eta R} > 0$ 、また $L_{\varphi R} < 0, M_{\eta R} > 0$ であって、明らかに、曲げねじれフラッターの起こる形であることがわかる。

4. 非定常空気力から見た断面特性

(1) 開床平板

つり橋の耐風性能増加策として、つり構造部の一部に開床部(グレーティング)を設け、風が吹き抜けられるようにする方法はすでに実用に供されて久しいが、グレーティングを設ける位置およびその開床率についてははっきりとした基準がなく、一応定性的に、弾性中心に関する空力モーメントを小さくすることが予想されるので、橋床の外側に空間を多くとる方がよいとされているのが現状である。開床平板による実験はこのことに関する試みである。空気力測定値についてみると、

1) 開床平板による測定空気力は一般に平板理論値と類似で、曲げねじれフラッター型の傾向を示す。すなわち、開床効果によって、振動特性までは変化していない。

2) 開床率が增大すると各空気力成分は小さくなるが、 $k \geq 0.6$ の範囲では一般に開床の影響は小さい。

3) 開床率 ϕ が30%をこえると $L_{\varphi I} < 0$ となる傾向がある。他の諸項には符号変化は見られない。

4) 開床率の増大に伴って、 $M_{\varphi I}$ の変化は必ずしも大きくないが、 $M_{\varphi R}$ は3P, 4P, 2Pの順でかなり減少している。

ここで測定空気力を用いて、式(19)により開床率による限界風速の変化を計算してみると、図-11のようになる。破線で表わされた理論値は、けたの幅 $2b$ を開床率 ϕ に応じて減少させ、 $2(1-\phi)b$ とおいたものである。Selbergの近似式を利用すれば

$$V^* = \frac{V_c}{b \omega_{\varphi}} \propto b^{-3/2}$$

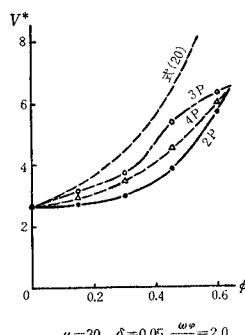


図-11 開床率による限界風速の変化(水平風)
 $\mu=30, \delta=0.05, \frac{\omega_{\varphi}}{\omega_{\eta}}=2.0$

$$\therefore V^* = (1 - \phi)^{-3/2} \cdot V_0^* \dots\dots\dots(20)$$

ただし、 V_0^* は $\phi=0$ (閉床) の場合の V^* である。式 (20) による値は、もとのままの桁幅 $2b$ に対して、最外縁部を開床にした場合と見なすことができる。

図一11 より、

1) 一般に、開床率が大きくなれば限界風速は上がるが、とくに、 $\phi=30\%$ をこえると変化がきわ立って大きくなるようである。このことは、空気力における $L_{\phi I} < 0$ (曲げねじれフラッターに対する安定度をます傾向) と対応している

2) 同じ開床率の場合には、2P, 4P, 3P, 式 (20) の順で V^* が大きくなる。すなわち、開床部はなるべく外側に設けたほうが有効であるという通説が立証されている。閉床率が 60% になると、2P, 3P, 4P の差はむしろ僅少になっている

などがわかる。ただし、失速フラッター型特性を有する断面における開床率の効果は、以上とは様相を異にすることも予想される。

(2) 充 腹 桁

箱形断面における空気力係数の変化を見ると、

1) 一般に、 $L_{\eta I}, L_{\phi R}, M_{\eta I}, M_{\phi R}$ は平板と同傾向を示すが、 $L_{\eta R}, L_{\phi I}, M_{\eta R}, M_{\phi I}$ は、桁幅に対する桁高の比 $h/2b$ が増大するにつれて次第に逆符号を示すようになる。この変化がはく離流の特性を表わしているものと思われる。

2) とくに $h/2b > 0.14$ では $M_{\phi I} > 0$ となり、失速フラッター型不安定傾向を示す。

3) $h/2b > 0.50$ では $L_{\eta I} > 0$ となり、ギャロピング型の不安定傾向があらわれる。

これらをH形断面において見ると、

1) 一般に、空気力の傾向は箱形断面と一致しているが、 $h/2b$ の増大に伴う空気力の変化はより急激であり、とくに、空気力の変位に対する位相遅れの変化が著しい。

2) このため、はく離流による回転振動の負減衰効果 $M_{\phi I} > 0$ が、H形では $h/2b=0.07$ 付近からあらわれている。

2) ギャロピング型不安定は、 $h/2b > 0.30$ で見られる。しかし、H 25 でも、強制振動片振幅が 10 mm をこえると $L_{\eta I} > 0$ となっている。

4) 以上のことから、H形における $h/2b$ の変化は、箱形の場合とくらべて約 2 倍のはく離効果をもつものと考えられる。

Π形断面では、

- 1) 一般に、箱形とH形の間隔的性格が認められる。
- 2) 失速フラッター型不安定は、 $h/2b > 0.10$ であら

われている。

3) Π30 では、H 25 と同程度のギャロピング型不安定傾向が見られる。

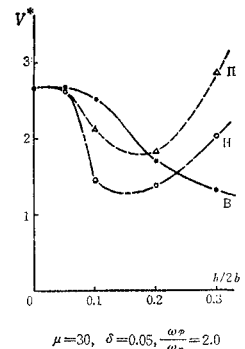
4) 以上のことから、Π形断面の空気力特性は、箱形、H形の中に位し、若干H形に近いように思われる。

これらの充腹型断面においては、1自由度振動の負減衰傾向に対応して、他の空気力諸係数の符号に大略表一1のような相関関係が見られる。

表一1 充腹型断面における空気力の符号

$L_{\eta R}$	$L_{\eta I}$	$L_{\phi R}$	$L_{\phi I}$	$M_{\eta R}$	$M_{\eta I}$	$M_{\phi R}$	$M_{\phi I}$	振 動 特 性	断 面 例
-	-	-	+	+	+	+	-	曲げねじれフラッター	P, B05
-	-	-	+	-	+	+	+		B20, H10
-	-	-	-	-	-	-	+	失 速 フ ラ ッ タ ー	B30, Π20
+	-	-	-	-	-	-	+		H20
+	+	+	-	+	-	-	+	ギャロピング	H30, Π30

つぎに、これらの空気力を用いて限界風速を計算し、比較してみると図一12のようになる。すなわち $h/2b < 0.30$ の範囲では、箱形は失速フラッター型不安定領域にあり、桁高の増加とともに $V_c/b \omega_{\phi} = V^*$ が低下するのに対して、H形、Π形では $h/2b=0.1 \sim 0.2$ に極小点が存在し、それ以上の桁高ではかえって V^* が高くなることがわかる。



図一12 桁高による限界風速 V^* の変化 (水平風)

Kármán と Dunn の報告⁹⁾ もこれと同じ傾向を示している。このことは、前述の空気力特性の変化とも見あっており、自励振動防止の点で、もっとも警戒を要するものがねじれ不安定の失速フラッター型振動であることを物語っている。

5. 定常空気力と非定常空気力の関連

(1) 定常理論による近似

非定常空気力において、変位の速度および加速度に比例する項を無視すると、空気力は回転変位 (迎角) ϕ のみによって定まることになる。これが定常空気力 (静的三分力) である。

ねじれ1自由度の場合の式 (10) において、この近似をして速度位相成分を無視すると、第1式のみが残り、

$$1 + \frac{1}{\nu} M_{\phi R} = \left(\frac{\omega_{\phi}}{\omega} \right)^2$$

ここで、さらに近似的に

$$M_{\varphi R} = \frac{1}{k^2} \dots\dots\dots(21)$$

とおく。この式は、後述のとおり、平板理論の場合に成立するものである。このとき、式(2)を用いれば

$$\omega = \sqrt{\omega_{\varphi}^2 - \frac{V^2}{\nu b^2}}$$

一般に、 $\omega \geq \omega_{\varphi}$ であるから

$$V^2 \leq \nu b^2 (\omega_{\varphi}^2 - \omega^2)$$

したがって限界風速は

$$\frac{V_c}{b \omega_{\varphi}} = \sqrt{\nu \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega_{\varphi}} \right)^2 \right\}} \dots\dots\dots(22)$$

で与えられる。式(22)は、いわゆる Selberg の式

$$\frac{V_c}{b \omega_{\varphi}} = 0.44 \sqrt{\frac{\sqrt{\nu}}{\mu} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega_{\varphi}} \right)^2 \right\}} \dots\dots\dots(23)$$

および、Rocard の式

$$\frac{V_c}{b \omega_{\varphi}} = 1.25 \sqrt{\frac{r^2 \mu}{2r^2 + b^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega_{\varphi}} \right)^2 \right\}} \dots\dots\dots(24)$$

に近い値であって、曲げねじれフラッターに関する Bleich の理論による計算式のよい近似を与えている。これは、曲げねじれの連成振動においても、ねじれ1自由度の場合と同様、フラッター条件の決定において、ねじれモーメント係数 M_{φ} が他の空気力係数よりもはるかに大きな効果を与えているからである。

なお、式(21)の仮定をねじれダイバージェンスの条件式(12)に適用すれば、

$$M_{\varphi R} = \left(\frac{V}{\omega b} \right)^2 > \nu \left(\frac{\omega_{\varphi}}{\omega} \right)^2$$

$$\therefore V_D = b \omega_{\varphi} \sqrt{\nu} \dots\dots\dots(25)$$

でダイバージェンス風速を与えることができる。

式(25)を用いれば式(22)は

$$V_C = V_D \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\eta}}{\omega_{\varphi}} \right)^2} \dots\dots\dots(26)$$

となる。

(2) 非定常空気力との対応

迎角 φ が小さい範囲では、模型の単位長さあたりの定常的な揚力および空力モーメントは、

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot (2b) \cdot C_l \\ &= -\frac{1}{2} \rho V^2 \cdot (2b) \cdot s \varphi \\ M &= \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot (2b)^2 \cdot C_m \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot (2b)^2 \cdot s_t \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

と表わすことができる。ここに s および s_t は、揚力曲線および空力モーメント曲線の $\varphi=0$ における傾きである。いまこれに対応して、動的な回転変位 φ に対する非

定常的な揚力および空力モーメントを考えると、式(1)より、

$$\left. \begin{aligned} \downarrow L &= \pi \rho b^3 \omega^2 (L_{\varphi R} + i L_{\varphi I}) \varphi \\ \uparrow M &= \pi \rho b^4 \omega^2 (M_{\varphi R} + i M_{\varphi I}) \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} l_{\varphi} &= L_{\varphi R} + i L_{\varphi I} = k^2 (L_{\varphi R} + i L_{\varphi I}) \\ m_{\varphi} &= M_{\varphi R} + i M_{\varphi I} = k^2 (M_{\varphi R} + i M_{\varphi I}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} L &= \frac{\pi \rho b^3 \omega^2}{k^2} (l_{\varphi R} + i l_{\varphi I}) \varphi \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot (2b) \cdot \pi (l_{\varphi R} + i l_{\varphi I}) \varphi \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot (2b)^2 \cdot \frac{\pi}{2} (m_{\varphi R} + i m_{\varphi I}) \varphi \dots\dots\dots(31)$$

式(30)、(31)を式(27)と比較すれば、

$$\left. \begin{aligned} C_l' &= -\pi (l_{\varphi R} + i l_{\varphi I}) \varphi \\ C_m' &= \frac{\pi}{2} (m_{\varphi R} + i m_{\varphi I}) \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

が、それぞれ非定常の揚力係数および空力モーメント係数とよぶべきものに相当することがわかる。式(32)より、定常状態 $k=0$ では

$$\left. \begin{aligned} l_{\varphi R} &= -\frac{s}{\pi}, \quad l_{\varphi I} = 0 \\ m_{\varphi R} &= \frac{2s_t}{\pi}, \quad m_{\varphi I} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

であって、 $l_{\varphi R}$ 、 $m_{\varphi R}$ はそれぞれ、定常的な揚力曲線およびモーメント曲線のこう配と、平板に対する理論値との比を与えているわけである。このことからまた、平板においては式(21)が成立することがわかる。

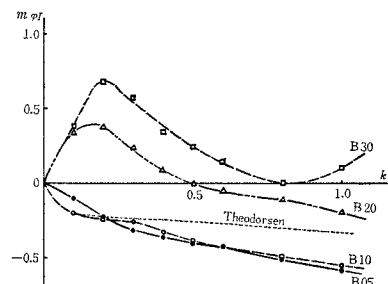
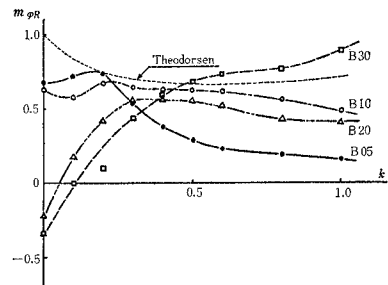


図-13 空力モーメント係数の成分 $m_{\varphi R}$ 、 $m_{\varphi I}$

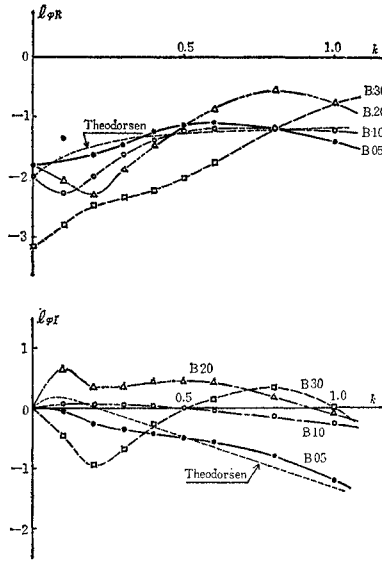


図-14 揚力係数の成分 $l_{\varphi R}$, $l_{\varphi I}$

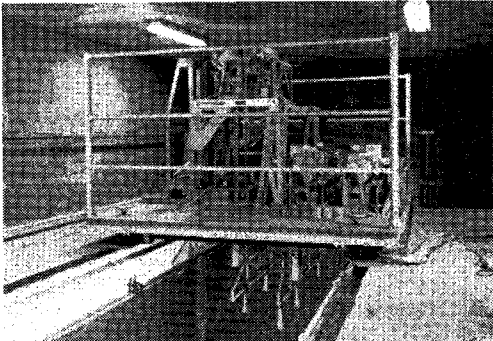


写真-2 定常空気力測定用三分力天秤

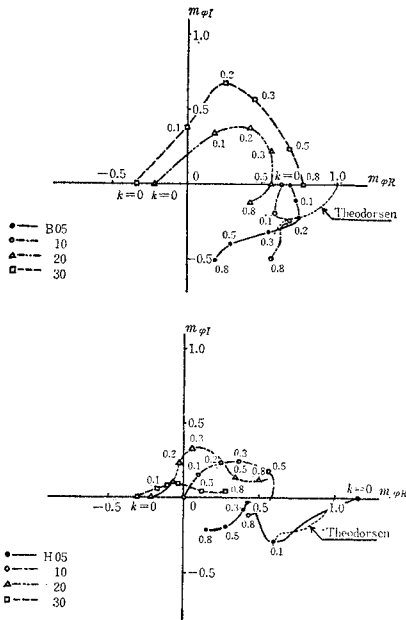


図-15 空力モーメント係数の複素表示

図-13, 14 は、前節と同じ箱形断面を例にとって定常空気力（静的三分力）を測定し（写真-2）、非定常空気力と連続的に図示し、比較した例である。この方法は、 k の小さい範囲における空気力の検討、精度の確認、準定常理論に対する検討¹⁰⁾などに有用であるように思われる。

図-15 は、 $m_{\varphi} = m_{\varphi R} + im_{\varphi I}$ を複素平面上に図示した例である。この表示も空気力の特長をよく示す図であり、この図においても、曲げねじれフラッター型断面と比較して、失速フラッター型断面においては、とくに k の小さい範囲で偏角 $\tan^{-1}(m_{\varphi I}/m_{\varphi R})$ が大きく変化していることは特徴的である。

6. 自由振動実験

空気力測定に用いた充腹桁模型に対して、風洞内に模型をばねつりし、風力によって生ずる模型の振動状況を観察する自由振動実験を行ない、限界風速および振動特性の検定を試みた（写真-3）。図-16, 17 は実験結果

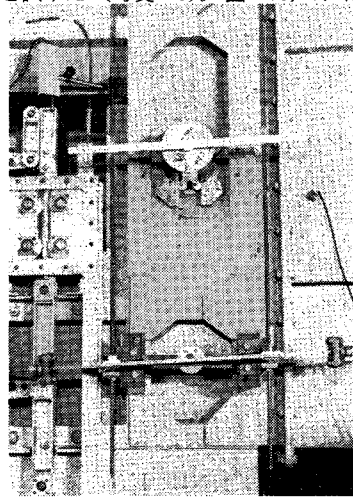


写真-3 自由振動実験装置

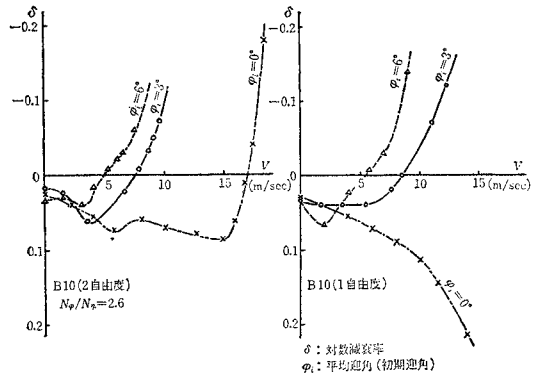
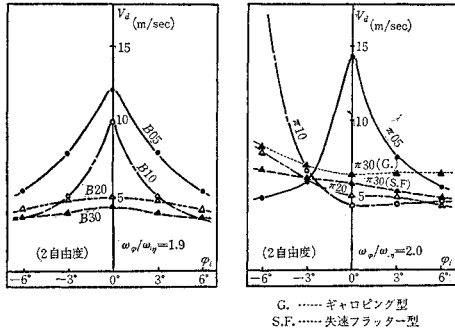


図-16 自由振動実験結果の例



図一七 自由振動実験における発散風速

の一部である。

実験は、上下および回転の2自由度を許す場合と、回転1自由度に拘束した場合の両者において、固有振動数を2ケースずつ変化させて行なった。実験の結果から、つぎのようなことが考察される。

1) B05~10, H05, π05などの断面では、迎角が大きくなると発振風速 V_d が急速に減少する曲げねじれフラッター型特性をもつが、B20~30, H10~30, π10~30の諸断面では、迎角変化に対して V_d がほぼ一定または若干変化する失速フラッター型特性が見られる。

2) 2自由度実験では、B05~10, H05, π05に曲げねじれ振動、B20~30, H10~30, π10~30に回転振動が見られる。ただし、H30, π30ではいったん回転振動が発振してリミットサイクルを描いたのち、さらに高風速で上下振動が発振し発散する場合と、直接上下振動が発振し発散する場合とがある。

3) B50, H40は、ギャロピング型の発散をする。この場合、ねじれモードは低風速で2つの不安定領域をもっているが、いずれも局限振動に抑えられている。

4) ねじれ1自由度の実験から得られる V_d は、2自由度実験の場合と比較して、曲げねじれフラッター型断面でははるかに高くなるが、失速フラッター型断面ではほぼ一致する。すなわち、前者では振動の連成効果によって V_d が低下するが、空気流が前縁部で大きくはく離する断面では回転振動が支配的であって、上下振動の影響はほとんどないと考えられる。

この実験で得られた水平風 ($\phi_i=0$) に対する発散風速 V_d を、測定された非定常空気力を用いて式(10)、(15)、(17)から計算した限界風速 V_c と比較すると、表一2~4のようになる。計算に用いた空気力は、強制振動振幅 $\eta_0=10\text{ mm}$ ($\phi_0=4^\circ$) で測定したものである。

以上からわかるとおり、非定常空気力測定値から求めた振動特性と限界風速は、一般に自由振動実験の結果とよく一致している。なお、ギャロピング型断面の限界風速を、静的三分力係数を用いて Den Hartog の方法¹¹⁾ で求めた場合には H30 で $V_c=0.26\text{ m/s}$ 、π30 で V_c

表一2 失速フラッターに対する限界風速

模 型	N_p	δ_p	k_c	ω_c	V_c	V_d	V_c/V_d
B20	2.27	0.060	0.470	13.9	5.22	5.40	0.97
	3.08	0.035	0.443	18.7	6.32	6.80	0.93
B30	2.38	0.038	0.530	14.7	4.15	4.40	0.94
	2.96	0.025	0.591	18.4	4.68	5.30	0.88
H10	2.35	0.044	0.745	15.9	3.21	3.30	0.97
	2.98	0.038	0.710	18.3	3.86	4.30	0.90
H20	2.26	0.038	0.654	14.1	3.24	3.95	0.82
	2.92	0.019	0.715	18.3	3.83	3.45	1.11
H30	2.15	0.038	0.420	13.2	4.70	3.25	1.44
	2.78	0.031	0.430	16.3	5.66	4.20	1.34
π10	2.19	0.041	0.360	12.4	5.17	4.62	1.12
	2.78	0.018	0.365	16.0	6.57	5.06	1.30
π20	1.99	0.034	0.290	12.0	6.20	5.05	1.22
	2.58	0.025	0.450	15.9	5.30	5.70	0.93
π30	2.32	0.047	0.330	14.3	6.50	5.83	1.11
	2.85	0.022	0.360	17.6	7.30	6.55	1.11

表一3 ギャロピングに対する限界風速

模 型	N_g	δ_g	k_c	ω_c	V_c	V_d	V_c/V_d
B50	1.03	0.015	0.230	6.48	4.23	3.92	1.08
H30	1.15	0.006	0.350	7.50	3.21	3.00	1.07
H40	1.18	0.020	0.200	7.40	5.54	4.06	1.36
π30	1.16	0.022	0.110	7.28	9.90	6.45	1.53

表一4 曲げねじれフラッターに対する限界風速

模 型	N_p/N_g	δ	k_c	ω_c	V_c	V_d	V_c/V_d
B05	1.93	0.038	0.171	11.7	10.3	12.2	0.84
	2.61	0.028	0.121	12.5	15.4	18.7	0.83
B10	1.91	0.031	0.228	12.9	8.51	10.0	0.85
	2.61	0.028	0.214	17.3	12.1	16.9	0.72
B20	1.85	0.060	0.427	13.8	4.86	4.90	0.99
	2.52	0.035	0.465	18.8	6.05	6.60	0.92
B30	1.98	0.038	0.556	14.7	3.96	4.35	0.91
	2.48	0.025	0.615	18.5	4.50	5.20	0.87
H05	2.01	0.041	0.228	13.8	9.07	8.60	1.05
	2.55	0.028	0.222	17.3	11.7	10.4	1.12
H10	1.94	0.044	0.651	14.4	3.31	3.40	0.97
	2.51	0.038	0.686	18.5	4.04	4.00	1.01
H20	1.90	0.038	0.683	14.0	3.06	3.30	0.93
	2.43	0.019	0.746	17.9	3.50	3.35	1.04
H30	1.87	0.038	0.238	7.22	4.45	3.00	1.48
	2.62	0.031	0.244	6.56	4.03	4.05	1.00
π05	2.00	0.027	0.171	13.3	11.6	14.4	0.81
	2.49	0.034	0.098	12.8	19.6	16.3	1.20
π10	1.99	0.010	0.396	13.3	5.01	4.37	1.14
	2.51	0.020	0.385	16.8	6.56	5.04	1.30
π20	1.99	0.037	0.469	12.5	4.00	5.08	0.79
	2.50	0.025	0.568	16.2	4.29	6.00	0.72
π30	2.00	0.047	0.320	14.3	6.71	6.46	1.04
	2.50	0.005	0.373	17.6	7.09	5.66	1.25

=1.09 m/s となり、まったく実用的ではない。

7. 結 論

本論文では、橋桁あるいは建築構造物として考えられる基本断面を単純化して、これが振動している場合に風によって作用する非定常空気を測定し、その空気力特性と、それによって生ずる自励振動現象とに関して考察を加えた。主要な結論は以下のとおりである。

1) 自励振動の発振風速は、断面に作用する非定常空気を測定し、これを外力として計算によって求めることができる。この方法は一般に定常空気力による解析よりも精度が良く、すぐれているように思われる。

2) 発生する自励振動の特性は、各空気力係数の値から推定することができる。すなわち、

$L_{\varphi I} > 0, M_{\varphi I} > 0$ は曲げねじれフラッター型

$M_{\varphi I} > 0$ は失速フラッター型

$L_{\gamma I} > 0$ はギャロピング型

の、それぞれ不安定傾向を示している。

3) 一方の振動モードが卓越する場合には、1自由度振動と考えて解析しても、ある程度の精度が得られる。

4) 耐風性能の点からもっとも警戒すべき現象は、断面形状によっては比較的発生しやすく、しかも限界風速の低い失速フラッター型の振動である。

5) 曲げねじれフラッター型の断面においては、橋床に開床部分を設けることによって限界風速を高くすることができる。開床率 30% 以上とし、開床位置を橋床のできるかぎり外側におけば、とくに有効である。

6) 充腹桁においては、断面の幅に対する桁高の比 $\alpha = h/2b$ の変化によって、振動特性が以下のように変わる。

箱形断面で $\alpha_1 \cong 0.14, 0.30 < \alpha_2 < 0.50$

H形断面で $\alpha_1 \cong 0.07, \alpha_2 \cong 0.25$

II形断面で $0.05 < \alpha_1 < 0.10, \alpha_2 \cong 0.30$

とするとき

$0 < \alpha < \alpha_1$ では 曲げねじれフラッター型

$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ では 失速フラッター型

$\alpha_2 < \alpha$ では ギャロピング型

7) このとき空気力係数の符号は、一般に

曲げねじれフラッター領域では

$L_{\varphi I}, M_{\gamma R}, M_{\gamma I}, M_{\varphi R} > 0$, 他は負

失速フラッター領域では

$M_{\varphi I} > 0$, 他は負

ギャロピング領域では

$L_{\varphi I}, M_{\gamma I}, M_{\varphi R} < 0$, 他は正

である。

本研究は終始、東京大学教授（現在 名誉教授）平井敦博士のご指導のもとになされたものであり、ここに厚くお礼申し上げる。

また、数々のご助言を頂いた中央大学 岡内 功教授、東京大学 宮田利雄 助手、実験にあたってご協力を頂いた小栗英和助手、大学院学生の山本辰一（現在 川崎重工）、森光康夫両君をはじめ、橋梁研究室の方々に対しても、ここに謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 平井 敦・岡内 功・宮田利雄：つり橋の耐風性に関する風洞実験とその考察，土木学会 論文集，第 151 号，1968.3.
- 2) たとえば，鷺津久一郎：「空力弾性学」，応用力学 講座，共立出版，1960.1. など.
- 3) Theodorsen, T.: General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, N.A.C.A., T.R. 496, 1935.
- 4) Bleich, F.: Dynamic Instability of Truss-stiffened Suspension Bridges under Wind Action, Trans. A.S.C.E., Vol. 114, 1949.
- 5) Kawashima, S., Kimura, H. and Shibato, T.: Measurements of Aerodynamic Forces on an Oscillating Airfoil, Proc. of the 13th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1963.
- 6) 笠口展宏・坂田 弘：つり橋の耐風安定性に関する基礎研究，航空学会誌，Vol. 13, No. 133, 1965.
- 7) たとえば，Scanlan, R.H. and Rosenbaum, R.: Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter, MacMillan Co., New York, 1951. など.
- 8) 平井 敦：つり橋の流体力学的安定性について，土木学会論文集，第 3 号，1947.
- 9) Farquharson, F.B. et al., Aerodynamic Stability of Suspension Bridges with Special Reference to the Tacoma Narrows Bridge, Bull. of Univ. of Washington, Eng. Exp. Station, No. 116, Part III, 1952.
- 10) 平井 敦・宮田利雄：準静的空気力のつり橋の自励振動に対する適用，東京大学工学部付属総合試験所年報，第 27 巻，1968.12.
- 11) Den Hartog, J.B.: Mechanical Vibrations, Second ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., 1940.

(1969.4.24・受付)