土木学会論文報告集
第167号・1969年7月

2次計画法による交通量配分

TRAFFIC ASSIGNMENT BY QUADRATIC PROGRAMING

米谷栄二*・飯田恭敬**・辻本有一***
By Eiji Kometani, Yasunori Iida and Yuichi Tsujimoto

1. まえがき

道路網における交通量配分法は従来から種々のものが提案されているが，解析的にきれいな形ではなかなか解が求められていない。それは，道路網上を走行する各車は固有の OD をもっており，上水や電流の流れのようにシングル コモディティーの問題として扱えないこと，また，ある OD に対して何本かの競合ルートが考えられる場合，各ルートの特性をあらわす尺度として一般的によく用いられる走行時間というものが交通量によって変化をうけること，さらには各区間道路の交通量はその区間の交通容量の制限をつよくうけること，などが解析上の大きな障害になっていることによる。またいかなる手法による配分結果でも現実のフロー パターンを忠実に説明することはほとんど不可能に近いということが，数多くの配分法のうみだされる一因であるということもできよう。本文では輸送計画的な観点から道路網における各区間交通量を算定する一方法について説明する。

2. 道路網における輸送計画

輸送計画的アプローチによる交通量配分法（最短ルート法を含む）は，等時間原理による配分法とともに二つの理論的配分原理として 1952 年 J.G. Wardrop によって提案されたが[1]， 今日でもこれらは交通量配分原理の主流をなすものといえる。輸送計画は，物質の供給地の供給量分布，需要地の需要量分布，および供給地需要地間の輸送コストが与えられたときに，総輸送費用を最小にする物資輸送パターンを求める問題として，F.L. Hitchcock, T.C. Koopmans などによって線型計画法（LP）の問題として定式化されたが，その発想法を道路網に対して導入するならば対象とするネット内の全車の総走行時間を最小にするという考え方が一般的によく用いられる。しかし交通量配分は通常そのネットに対して OD パターンが固有のものとしてなされるために，配分の過程において各車は OD を自由に選択できないという厳密な制約をうける。そしてこのことが物資などの輸送問題とくらべて，道路網における輸送計画を考えるときの顕著な特徴である。

さて道路網における輸送計画の意義について考えてみよう。対象とするネット内での全車の総走行時間が最小になるような配分交通量の分布と現実のフロー パターンがどの程度一致するかはきわめて疑わしい問題であり，直観的に考えても両者の一致を期待することは無理である。なぜなら，運転者が全体的な情勢に関する情報を得て，大局的に考えてもっとも効率的になるように自分自身の車のとるルートを選択するというようなことが現実におこっているとは考えられないからである。しかしながら，少なくともどのように交通流が流れるならば，その道路網としては最も効率的なフロー パターンをもちうるかということを知ることができ，したがって逆にいえば，道路網において総走行時間が最小であるということを道路網の良否を判定する場合の一つの尺度とすることができるであろう。たとえば，もし同じ金額の建設費で建設されたいくつかの道路網がある場合，その中でもっとも円滑に車を流しうるものは全車の総走行時間が最小となるものであるということができる。このように考えれば輸送計画的な交通量配分は実際のフローに対する適合性に眼目をおくのではなくて，むしろ道路網計画に対して大きな意義をもっているということができよう。

一般にネットワークの問題として道路網を考える場合には，OD 交通の発生吸引地点をノードで，各区間道路をリンクで表現する（ただし，各道路を方向づけして議論するときにはリンクのかわりにアークという言葉が多く用いられる）。各アークの走行所要時間と交通量との相互関係をあらわすのには何らかの関数をもってし，さらに理論上厳密には各 OD 交通量自体もその OD がとるルート内の連続したアークの走行時間の和によって影響されていると考えるべきである。このような前提にたって従来から道路網の輸送計画に関して様々な研究が行なわれてきたが，その最初のものは前述したように J.G.

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部交通土木工学科
** 正会員　工修　京都大学助手　工学部交通土木工学科
*** 正会員　工修　日本道路公団高速道路東京管理局

Wardrop の第一原理といわれるものであって，これは F.L. Hitchcock, L.V. Kantorovich, T.C. Koopmans らが LP の「輸送問題 (Transportation Problem)」[2)~4)] の定式化を完成して以後，道路交通に独自にその考え方を導入した最初のものであり，このときには平均トリップ時間の最小化として表現されていた[5)]。ついで A. Orden はアークの走行時間が交通量によらず一定で，各 OD の目的地が指定されずに単に各ノードの発生吸引交通量分布のみを与えたときには「積みかえ問題 (Transshipment Problem)」として LP により解けることをあきらかにしたが，これは「輸送問題」の部分的修正であり，交通量配分法としてはその前提となる仮定によって OD の特性を無視するという大きな欠点をもっているといえる[6)]。アーク走行時間を一定とし各 OD 交通量を定数として与えた場合には，走行時間は交通量に全く影響されなくなっていわゆる最短ルートを選ぶ問題となるが，これは G.B. Dantzig が LP によって解いている し[7)]，次適ルート，三適ルートなどにわりあてるアルゴリズムも開発されていることが報告されている[8)]。また単に走行時間だけでなく貨幣コストに関しても競合ルート間に差異があるとき，ルート選択の公式にこの項を導入して，同じく LP の形で定式化することができる。M. Beckman, C.B. McGuire, C.B. Winsten は 1956 年に，OD 交通量とアーク交通量と走行コスト（貨幣単位よりも広義のコスト，たとえば走行時間）に関してそれらの均衡解の存在とその一意性について論じ，ある種の目的関数を輸送計画的に設定することによる求解の可能性に初めて言及した[9)]。そして 1957 年には，佐佐木綱京大教授が，OD 交通量および各リンクの交通容量を与えた場合に，リンク走行時間とリンク交通量の関係式が複雑な関数であるため一般には総走行時間最小化の問題は非線型計画法の問題となるが，道路網が 2 車線道路で構成されているときには，リンク交通量とリンク走行時間の積が実用的にはリンク交通量の 1 次式として近似できるため，LP としてモデル化できることをあきらかにした[10)]。これは走行時間が交通量に依存するという現象を解析段階にもりこむことに成功した画期的成果であり，以後の輸送計画的考え方に指針を与える研究であった。

総走行時間を最小にするということを基本原理とする輸送計画的な観点から交通量配分を行なう場合には，以上でおおまかに述べたように，走行時間と交通量の関係式をどのようにおくかという違いから解析法が多岐にわたっている。現在もっとも理論的であると考えられている交通量と走行速度の関係式（Q-V 曲線）は

$$Q_{\max}-Q=\frac{1}{b}(V_0-V)^2$$

（ただし，$Q_{\max}$，V_0，b は定数）

なる形であるとされているが，この式より出発して総走行時間を最小にしようとすればかなり複雑な非線型計画法の問題となり，解の唯一性が保証されないし，解法も確立されていない。従来の輸送計画ではほとんどが LP の問題として定式化されているが，それは，佐佐木教授の研究を例外とすれば，走行時間が交通量に依存しないというようなかなり非現実的な前提にたっていることによる。目下のところでは走行時間と交通量の間に 1 次式の関係を仮定することは，実用的な精度の範囲内では無理がないといわれており[11)]，つぎに述べるようにこの仮定にもとづけば非線形計画法の中では解法が比較的簡単な 2 次計画法 (QP) の問題となり，理論的に解が一意的に求められるという特筆すべき利点がある。

3．2 次計画法による輸送計画

アークの走行所要時間がアークの交通量に線型に依存すると仮定すれば，目的関数の凹性凸性を議論することが必要であることは M. Beckman らにより指摘され[12)]，また同じ仮定のもとでアークの交通量が交通容量によって上限を与えられるときには 2 次計画法 (QP) の問題となることが佐佐木教授により示唆されている[13)]。さらに佐佐木教授は，交通容量の制限をつけないときには制約条件が OD の条件だけとなり，このときにはラグランジェ関数を導入することにより多元連立 1 次方程式を解くことによって解が求められることを示した[14)]。ここでは，対象とするネット内の全車の総走行時間を最小にするという従来の道路網での輸送計画的発想を踏襲し，ネット内の OD 分布を与え，各アークの交通容量をも固有のものとして考慮にいれ，各 OD の各アーク交通量を求めることを考える。

いま対象とするネットに，m 本のアークによりあらわされる複数個の方向づけした区間道路（したがって一方通行でない限り 1 本の道路は 2 本のアークであらわされる）と n 個のノードによりあらわされる複数個の交通発生吸引地点があるとし，任意のノード間に q 個の OD ペアーが与えられるものと考える。ノード i からノード j へ向うアーク $i\to j$ の走行時間 t_{ij} と交通量 y_{ij} の間には，

$$t_{ij}=a_{ij}y_{ij}+b_{ij}\quad(a_{ij},\ b_{ij}>0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

なる関係式を仮定する。ここに a_{ij}, b_{ij} は道路の構造および長さから定まるアーク固有の定数である。全 OD ペアーに対して番号を付加して，k なる OD のアーク $i\to j$ の交通量を $y_{ij}{}^k$ であらわすことにする。ただし全アークに対しても番号を付加するが，アーク $i\to j$ の番号を便宜的に ij なる 2 文字であらわす。そうすれば

$$y_{ij}=\sum_{k=1}^{q}y_{ij}{}^k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

であるから，ネット内の総走行時間 T は

$$
\begin{aligned}
T&=\sum_{ij=1}^{m} t_{ij}y_{ij}\\
&=\sum_{ij=1}^{m}\{(a_{ij}y_{ij}+b_{ij})y_{ij}\}\\
&=\sum_{ij=1}^{m}\left\{(a_{ij}\sum_{k=1}^{q}y_{ij}^{k}+b_{ij})\sum_{k=1}^{q}y_{ij}^{k}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(3)
\end{aligned}
$$

となる。したがって目的関数は式(3)で与えられ，Tを最小にするようなすべての y_{ij}^k を求めるという問題となる。つぎにすべての y_{ij}^k が具備しなければならない条件について考える。まずすべてのODのすべてのアークにおける交通量は負の値をもってはいけないという条件が当然必要である。

$$
y_{ij}^{k}\geqq 0\begin{bmatrix}k=1,\ 2,\cdots,\ q\\ ij=1,\ 2,\cdots,\ m\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)
$$

つぎにOD分布はネットに固有のものであり変更を許されないから，k なる OD の OD 交通量を S_k であらわせば，

$$
\sum_{j}(y_{ij}^{k}=y_{ji}^{k})
=\begin{cases}S_k\ (i\text{ が発生ノードのとき})\\ -S_k\ (i\text{ が吸引ノードのとき})\cdots\cdots(5)\\ 0\ (i\text{ が通過ノードのとき})\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix}k=1,\ 2,\cdots,\ q\\ i=1,\ 2,\cdots,\ n-1\end{bmatrix}
$$

となる。さらに各アークにおける交通量はそのアーク固有の交通容量以下でなければならないから

$$
\sum_{k=1}^{q}y_{ij}^{k}\leqq C_{ij}\ [ij=1,\ 2,\cdots,\ m]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)
$$

という条件をいれる。ここに C_{ij} はアーク ij の交通容量である。変数の備えるべき条件は以上の式(4),(5)および(6)の3種類である。

ここで交通容量 C_{ij} と OD 交通量 S_k を定義として固定した値を与えることの是非については多少の議論が生じる懸念があるかもしれない。まずOD交通量の推定方法に関して考えてみれば，従来からOD間の走行所要時間を考慮にいれた手法がかなり普及しているが，各アークの走行時間がそのアークの交通量に依存した値をとるとする本研究の立場からすれば，OD 交通量もまた一意的に定まるとするのは理論上無理がないともいえない。このことについては，前述したように M. Beckman らが解の均衡性や一意性について言及したところであるが[15]，そこまで考えると問題は全く動的な性格を帯びてきて数学的取扱いがむずかしくなるので，ここでは従来の輸送計画と同様にOD交通量は与えられた一定値をとるものとしておく。つぎに交通容量についてであるが，これを各アークに関し一定とするのも便宜上の仮定であり，道路の交通容量は道路の構造条件はもちろん車種構成や走行速度によって変化するものである。しかしながら現実の道路網においても理論上の交通容量とは別に各道路に対し実用交通容量を決定しているというような背景をも考えれば，C_{ij} をアーク固有の定数とすることを非現実的ということはできないであろう。いずれにしても OD 交通量 S_k や交通容量 C_{ij} を定数とすることによってもたらされる精度の減少は，本研究の理論的背景を勘案すればとるにたらない問題といって差し支えないと思われる。

さて制約条件式に関してつぎのように行列およびベクトルを考える。

$$
\boldsymbol{y}_k=\begin{pmatrix}y_1^k\\ y_2^k\\ \vdots\\ y_{ij}^k\\ \vdots\\ y_m^k\end{pmatrix}\ \begin{matrix}m\text{次列ベクトル}\\ [k=1,\ 2,\cdots,\ q]\end{matrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)
$$

$$
\boldsymbol{d}_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ S_k\\ 0\\ \vdots\\ -S_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdots\cdots\text{発生ノード}\\ \\ \\ \cdots\cdots\text{吸引ノード}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
\begin{matrix}(n-1)\ \text{次列ベクトル}\\ [k=1,\ 2,\cdots,\ q]\end{matrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)
$$

$$
\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\cdots,\ \boldsymbol{B}_m)=(e_{ij})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)
$$

ただし

$$
e_{ij}=\begin{cases}1(\text{アーク}\,j\,\text{がノード}\,i\,\text{からでているとき})\\ -1(\text{アーク}\,j\,\text{がノード}\,i\,\text{へはいっているとき})\\ 0(\text{アーク}\,j\,\text{がノード}\,i\,\text{へ接続していないとき})\end{cases}
$$

$$
[i=1,\ 2,\cdots,\ n-1\,;\ j=1,\ 2,\cdots m]
$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_{ij}\\ \vdots\\ C_m\end{pmatrix}\quad m\text{次列ベクトル}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)
$$

ここに $\boldsymbol{B}$ は $(n-1)$ 行 m 列のインシデンス マトリックスであり，$\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2\cdots,\ \boldsymbol{B}_m$ は $\boldsymbol{B}$ を構成する列ベクトルとする。このようにすれば式(4),(5),(6)はそれぞれ

$$
\boldsymbol{y}_k\geqq 0\quad [k=1,\ 2,\cdots,\ q]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)
$$

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{d}_k\quad [k=1,\ 2,\cdots,\ q]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)
$$

$$
\sum_{k=1}^{q}\boldsymbol{y}_k\leqq\boldsymbol{C}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)
$$

なる形に表示できる。式(5),(6)をまとめてかけば

$$
\left.\begin{matrix}I\boldsymbol{y}_1+I\boldsymbol{y}_2+\cdots\cdots+I\boldsymbol{y}_q+I\boldsymbol{s}=\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1\qquad\qquad\qquad\qquad=\boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_2\qquad\qquad\qquad=\boldsymbol{d}_2\\ \ddots\qquad\qquad\vdots\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_q\quad=\boldsymbol{d}_q\end{matrix}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)
$$

となる。ここに $\boldsymbol{s}$ は非負なるスラック変数 $s_1,\ s_2,\cdots,\ s_m$ よりなる m 次列ベクトルであり，Iは単位行列である。ここで

$$\boldsymbol{y}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_q\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix}\quad (q+1)\ m\ \text{次列ベクトル}\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{d}_1\\ \boldsymbol{d}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}_q\end{pmatrix}\quad \{m+(n-1)q\}\ \text{次列ベクトル}\cdots(16)$$

とすれば式 (14) は

$$\begin{pmatrix} I & I\cdots\cdots & I & I\\ \boldsymbol{B} & & & 0\\ & \boldsymbol{B} & & \vdots\\ & & \ddots\ \boldsymbol{B} & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{d}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

として一括して表示できる。ただし，この係数行列は $\{m+(n-1)q\}$ 行 $\{(q+1)\,m\}$ 列である。また式 (4) は

$$\boldsymbol{y}^*\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

となる。

目的関数は式 (3) よりつぎのようにあらわすことができる。

$$T=\sum_{ij=1}^{m}\left\{\left(a_{ij}\sum_{k=1}^{q}y_{ij}{}^k+b_{ij}\right)\sum_{k=1}^{q}y_{ij}{}^k\right\}$$

$$=\sum_{ij=1}^{m}\left\{(y_{ij}{}^1,\ y_{ij}{}^2,\cdots,\ y_{ij}{}^q)\begin{pmatrix}a_{ij}, & a_{ij}\cdots, & a_{ij}\\ & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{ij}, & \cdots\cdots, & a_{ij}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{ij}{}^1\\ y_{ij}{}^2\\ \vdots\\ y_{ij}{}^q\end{pmatrix}+(b_{ij},\ b_{ij},\cdots,\ b_{ij})\begin{pmatrix}y_{ij}{}^1\\ y_{ij}{}^2\\ \vdots\\ y_{ij}\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\underbrace{(y_1{}^1,y_1{}^2,\cdots,y_1{}^q,y_2{}^1,\cdots,y_{ij}{}^k,\cdots,y_m{}^q)}_{(mq)}$$

$$\begin{array}{c}(mq)\end{array}\begin{pmatrix}\begin{matrix}a_1,\cdots, a_1\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_1,\cdots, a_1\end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix}a_2,\cdots, a_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_2,\cdots, a_2\end{matrix} & & \\ & \ddots & (q)\begin{matrix}a_{ij},\cdots,a_{ij}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{ij},\cdots,a_{ij}\end{matrix}_{(q)} & \\ & & \ddots & \begin{matrix}a_m,\cdots, a_m\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_m,\cdots, a_m\end{matrix}\end{pmatrix}_{(mq)}$$

$$\begin{pmatrix}y_1{}^1\\ y_1{}^2\\ \vdots\\ y_1{}^q\\ y_2{}^1\\ \vdots\\ y_{ij}{}^k\\ \vdots\\ y_m{}^q\end{pmatrix}+\underbrace{(b_1,\cdots,\ b_1,\ b_2,\cdots,\ b_{ij},\cdots,\ b_m)}_{(mq)}\begin{pmatrix}y_1{}^1\\ y_1{}^2\\ \vdots\\ y_1{}^q\\ y_2{}^1\\ \vdots\\ y_{ij}{}^k\\ \vdots\\ y_m{}^q\end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

T を最小にすることは $-T$ を最大にすることと同値であるから $F=-T$ とおき

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1{}^1\\ y_1{}^2\\ \vdots\\ y_1{}^q\\ y_2{}^1\\ \vdots\\ y_{ij}{}^k\\ \vdots\\ y_m{}^q\\ s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_m\end{pmatrix}\quad (q+1)\ m\ \text{次列ベクトル}\cdots\cdots\cdots(20)$$

$(q+1)\ m$ 次列ベクトル

$$\boldsymbol{b}=(-b_1,\cdots,\ -b_1,\ -b_2,\cdots,\ -b_{ij},\cdots,\ -b_m,\ 0,\cdots,\ 0)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

$$\boldsymbol{A}=$$

$$\begin{pmatrix}\begin{matrix}2a_1\cdots 2a_1\\ \cdots\cdots\cdots\\ 2a_1\cdots 2a_1\end{matrix} & & & & & \\ & \begin{matrix}2a_2\cdots 2a_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ 2a_2\cdots 2a_2\end{matrix} & & & & \\ & & \ddots\ \begin{matrix}2a_{ij}\cdots 2a_{ij}\\ \cdots\cdots\cdots\\ 2a_{ij}\cdots 2a_{ij}\end{matrix} & & & \\ & & & \ddots\ \begin{matrix}2a_m\cdots 2a_m\\ \cdots\cdots\cdots\\ 2a_m\cdots 2a_m\end{matrix} & \\ & & & & \begin{matrix}0\cdots 0\\ \cdots\cdots\\ 0\cdots 0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$(q+1)\ m$ 次正方行列$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$

と定義すれば，最大にすべき目的関数は

$$F(\boldsymbol{y})=-T=\boldsymbol{by}-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

なる形である。ここで式 (15) の $\boldsymbol{y}^*$ と式 (20) の $\boldsymbol{y}$ を比較すれば，スラック変数をのぞいた各要素はならび方が異なっているだけであるから，これらを $\boldsymbol{y}$ の形に統一することにすると式 (17) がつぎの形に変換される。

$$\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

ここに

$$\boldsymbol{Q}=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}\boldsymbol{1}_1 & \boldsymbol{1}_2 & \cdots & \boldsymbol{1}_{ij} & \cdots & \boldsymbol{1}_m & I\\ \hline \begin{matrix}\boldsymbol{B}_1 & & \\ & \boldsymbol{B}_1 & \\ & & \ddots\ \boldsymbol{B}_1\end{matrix} & \begin{matrix}\boldsymbol{B}_2 & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & \\ & & \ddots\ \boldsymbol{B}_2\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}\boldsymbol{B}_{ij} & & \\ & \boldsymbol{B}_{ij} & \\ & & \ddots\ \boldsymbol{B}_{ij}\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}\boldsymbol{B}_m & & \\ & \boldsymbol{B}_m & \\ & & \ddots\ \boldsymbol{B}_m\end{matrix} & 0\end{array}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

ただし $\boldsymbol{1}_l\ [l=1,2,\cdots,m]$ は第 l 行の要素がすべて1で他はすべて0である m 行 q 列の行列をあらわすものとする。式 (18) と同値なものは明らかに

$$\boldsymbol{y}\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

である。以上を総括すれば問題は式 (24) および (26) の下で式 (23) を最大にするべき $\boldsymbol{y}$ を求めることである。

すなわち

$$\left.\begin{array}{l} F(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{by}-\dfrac{1}{2}\,\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}\rightarrow \mathrm{Max.} \\ \text{制約条件}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{y}\geqq 0\end{array}\right. \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

このようにして式 (27) により形の上では QP の問題として定式化できたが，QP では解が求められるためには若干の条件を満たしていることが必要であるので，そのことを吟味しなければならない。

一般に非線型計画法では，目的関数の全域的最大が局所的最大に一致しないために求解が非常に困難であるが，目的関数に凹性または凸性が見出せれば，これらの関数はつぎの定理に示されるような注目すべき特性を備えている[16]。

定理：$F(\boldsymbol{y})$ が E^n の閉凸集合 Y において凹関数であるとき，$F(\boldsymbol{y})$ が Y の内点で局所的最大となれば，その点で $F(\boldsymbol{y})$ は全域的最大となる。

したがって，いま問題となる QP においても目的関数 $F(\boldsymbol{y})$ が凹関数である場合に限定すれば，その局所的最大を求めることによって最適解を得ることができる。よって，式 (27) に示される問題に関して $F(\boldsymbol{y})$ の凹性を検討してみると，$F(\boldsymbol{y})$ が凹であるためには $-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}$ が凹でなければならないから $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}$ が凸関数であればよい。もし $\boldsymbol{A}$ が対称行列でかつ正定値 (positive definite)，すなわち $\boldsymbol{y}(\neq 0)$ に対して $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}>0$ なる条件を満足すれば $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}$ は凸関数である。式 (27) の QP の場合，式 (22) からわかるように $\boldsymbol{A}$ は対称行列であり，2次形式 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}$ はすべての a_{ij} が正であるから明らかに正であって，$\boldsymbol{A}$ は正定値である。したがって目的関数の凹性は保証され，その局所的最大を求めれば式 (27) の問題において求めるべき最適解がえられたことになる。QP の解法としては，従来からいくつかのものが開発されているから，そのうちいずれかを採用することによって本文で定式化した輸送計画のフローパターンが求められるわけである。

ここでは Kuhn-Tucker の定理を応用して局所的最大を求めるWolfeの解法によって筆者らが実際に計算を行なったので，その方法について簡単に紹介しよう[17),18)]。

いま一般に

$$\left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x})\leqq p_i\ \ [i=1,\,2,\cdots,\,l] \\ \boldsymbol{x}\geqq 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

なる条件のもとで目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最大にする非線型計画の問題に対してつぎの定理が成立する。

Kuhn-Tucker の定理：$f(\boldsymbol{x})$ が凹関数で，$g_i(\boldsymbol{x})$ $[i=1,2,\cdots,l]$ がすべて凸関数でかつ連続的微分可能であるとき，式 (28) の下で $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}^0$ で最大となるための必要十分条件は，ある $\boldsymbol{\lambda}^0\geqq 0$ が存在して $[\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\lambda}^0]$ がラグランジェ関数

$$\phi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(g_i(\boldsymbol{x})-p_i)$$

の鞍点であることである。

補題 1：$[\boldsymbol{x}^0,\,\boldsymbol{\lambda}^0]$ が $\phi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{\lambda})$ の鞍点である必要条件

$$\nabla_x\phi\Big|_{\substack{x=x^0\\ \lambda=\lambda^0}}\leqq 0,\ \ (\nabla_x\phi,\,\boldsymbol{x})\Big|_{\substack{x=x^0\\ \lambda=\lambda^0}}=0,\ \ \boldsymbol{x}^0\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$\nabla_\lambda\phi\Big|_{\substack{x=x^0\\ \lambda=\lambda^0}}\geqq 0,\ \ (\nabla_\lambda\phi,\,\boldsymbol{x})\Big|_{\substack{x=x^0\\ \lambda=\lambda^0}}=0,\ \ \boldsymbol{\lambda}^0\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots(30)$$

補題 2：$[\boldsymbol{x}^0,\,\boldsymbol{\lambda}^0]$ が $\phi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{\lambda})$ の鞍点である十分条件 $\boldsymbol{x}^0\geqq 0$, $\boldsymbol{\lambda}^0\geqq 0$ が存在して

$$\phi(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{\lambda}^0)\leqq\phi(\boldsymbol{x}^0,\,\boldsymbol{\lambda}^0)+(\nabla_x\phi\Big|_{\substack{x=x^0\\ \lambda=\lambda_0}},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) \quad\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\phi(\boldsymbol{x}^0,\,\boldsymbol{\lambda})\geqq\phi(\boldsymbol{x}^0,\,\boldsymbol{\lambda}^0)+(\nabla_\lambda\phi\Big|_{\substack{x=x^0\\ \lambda=\lambda^0}},\ \boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}^0) \quad\cdots\cdots\cdots(32)$$

ただし，∇ はラプラシアンを示す。

ここでとくに式 (27) の QP の問題に関してこの定理を適用してみよう。まずラグランジェ関数をつくれば

$$\phi(\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{by}-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}-\boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{Qy}-\boldsymbol{d})\cdots\cdots(33)$$

ここに，

$$\boldsymbol{\lambda}'=(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\cdots,\,\lambda_{m+(n-1)q})$$

となる。よって

$$\nabla_y\phi\Big|_{\substack{y=y^0\\ \lambda=\lambda^0}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}^{0\prime}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}^{0\prime}\boldsymbol{Q}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$$\nabla_\lambda\phi\Big|_{\substack{y=y^0\\ \lambda=\lambda^0}}=\boldsymbol{d}'-\boldsymbol{y}^{0\prime}\boldsymbol{Q}'\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

であり，$\boldsymbol{A}$ が対称であることを考慮すれば式 (29) に相当するものはつぎのようになる。

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}^{0\prime}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}^{0\prime}\boldsymbol{Q}\leqq 0 \\ (\boldsymbol{b}'-\boldsymbol{Ay}^0-\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\lambda}^0)'\boldsymbol{y}^0=0 \\ \boldsymbol{y}^0\geqq 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

ここで，

$$\boldsymbol{v}^0=\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\lambda}^0-\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{Ay}^0$$

なる列ベクトルを導入すれば，式 (36) は

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{b}'-\boldsymbol{Ay}^0-\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\lambda}^0+\boldsymbol{v}^0=0 \\ \boldsymbol{y}^{0\prime}\boldsymbol{v}=0 \\ \boldsymbol{y}^0\geqq 0 \\ \boldsymbol{v}^0\geqq 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

と等価である。条件式 (24) より式 (35) の値は0であるから，式 (30) に相当するものの成立は自明である。式 (31) に相当するものは

$$\text{左辺}=\boldsymbol{by}-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{y}'\boldsymbol{Ay}-\boldsymbol{\lambda}^{0\prime}(\boldsymbol{Qy}-\boldsymbol{d})$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}=&\boldsymbol{by}^0-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{y}^{0\prime}\boldsymbol{Ay}+\boldsymbol{\lambda}^{0\prime}(\boldsymbol{Qy}-\boldsymbol{d})\\ &+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}^{0\prime}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda}^{0\prime}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^0)\end{aligned}$$

であるから両辺より等しいものをのぞくと

$$\text{左辺}=F(\boldsymbol{y})$$

$$\text{右辺}=F(\boldsymbol{y}^0)+(\nabla F\big|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^0},\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^0)$$

となるが，目的関数 $F(\boldsymbol{y})$ は凹関数であるから左辺≦右辺であり，式 (31) に相当するものも成立している。さらに式 (32) に相当するものは右辺第2項が0となり等式で成立する。もともと式 (31),(32) は目的関数の凹性を問うているだけであるから，いまの場合成立は明らかである。以上により式 (37) および制約条件式 (24) をまとめて

$$\boldsymbol{Ay}+\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}' \quad \cdots\cdots(38)$$

$$\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{d} \quad \cdots\cdots(39)$$

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{v}=0 \quad \cdots\cdots(40)$$

$$\boldsymbol{y}\geqq 0,\ \boldsymbol{v}\geqq 0 \quad \cdots\cdots(41)$$

の条件がえられたので，これらを満足する $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}$ を求めれば，これが式 (27) の QP の問題の最適解を与える。これを求めるのに LP のシンプレックス（2段階法）を応用する。そのためにはまず第1段階で式 (39) を満たす解をつくり，ついで第2段階にうつり，式 (38) を満たす解を求めるのであるが，式 (40) および (41) の条件はつねに満足されていなければならない。式 (40) は，$\boldsymbol{y}$ の第 i 要素と $\boldsymbol{v}$ の第 i 要素 $[i=1,2,\cdots,(q+1)m]$ は同時に基底変数となりえないことを示している。また $\boldsymbol{\lambda}$ に関しては符号の制限がないからシンプレックス基準を少し修正してピボットオペレーションを行なわなければならない。くわしい説明は専門書に譲るが筆者らはつぎのようにして数値計算を行なった。まず $\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{d}$ の要素の中に負のものがあれば（式 (21) より $\boldsymbol{b}$ の0以外の要素はすべて負である），式 (38),(39) の該当する式の両辺に -1 をかけ $\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{d}$ の全要素を非負にする。そして人為変数

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{m+(n-1)q} \end{pmatrix}\geqq 0 \qquad \boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{(q+1)m} \end{pmatrix}\geqq 0$$

を導入して

$$\boldsymbol{Ay}+\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{b}' \quad \cdots\cdots(42)$$

$$\boldsymbol{Qy}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{d} \quad \cdots\cdots(43)$$

として

$$\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{Z}\geqq 0,\ \boldsymbol{y}'\boldsymbol{v}=0$$

なる条件のもとではじめに

$$W=\sum_{i=1}^{m+(n-1)q} w_i$$

を最小にする。そうすると $\boldsymbol{w}\geqq 0$ であるから式 (39) が実行可能であれば W は0になり，したがってすべての w_i が0になり式 (39) の基底解を得る。$\boldsymbol{w}$ の成分をのぞいたのちつづいて

$$Z=\sum_{j=1}^{(q+1)m} Z_j$$

を最小にすると，同様に $\boldsymbol{Z}\geqq 0$ であるから Z は0になるはずであり，そのときにはすべての Z_j が0になっている。このとき式 (27) の QP の最適解がえられたことになる。

最後に，われわれが QP の計算にはいるまえに制約条件式 (24) の実行可能性を検討しておくことを忘れてはならない。各アークに交通容量が付加されれば，そのネット内を流れうる全交通量にはおのずと上限があるはずである。したがって OD 交通量とアークの交通容量をそれぞれ単独に与えたときには実行不可能になる恐れがある。この問題に関しては，OD 構成比が既知の場合，ネット内の最大フローを LP によって求める山村信吾氏らの研究があるので[19]，それらを用いた吟味があらかじめ必要である。

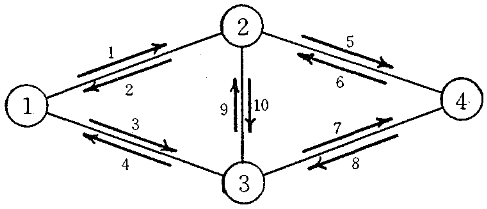
4. 計　算　例

いま，図—1 に示されるような単純な道路網を考えてみる。この場合ノードが4個アークが 10 本であるから

$$n=4,\ m=10$$

である。各アークに固有の定数が 表—1 のように与えられるものとする。

この道路網において OD 表が 表—2 のように与えら



図—1　配分の対象とする道路網

表—1　各アークに与えられる定数

アーク番号 ij	発ノード i → 着ノード j	a_{ij} (分/台)	b_{ij} (分)	c_{ij} (台)
1	1 → 2	0.48×10^{-3}	4.0	1 000
2	2 → 1	0.48×10^{-3}	4.0	1 000
3	1 → 3	0.80×10^{-3}	5.0	800
4	3 → 1	0.80×10^{-3}	5.0	800
5	2 → 4	2.15×10^{-3}	5.0	400
6	4 → 2	2.15×10^{-3}	5.0	400
7	3 → 4	0.95×10^{-3}	5.0	900
8	4 → 3	0.95×10^{-3}	5.0	900
9	3 → 2	0.26×10^{-3}	2.0	950
10	2 → 4	0.26×10^{-3}	2.0	950

表—2　OD 表

O \ D	1	2	3	4	計
1	0	0	0	1 300	1 300
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	1 100	0	0	0	1 100
計	1 100	0	0	1 300	2 400

れた場合を考えてみよう。

この場合，OD 交通量が 0 でない OD ペアーは 2 個の簡単なものとしたが，これでも一般性は失われない。いま

$$q=2$$

である。

ノード1からノード4へ向う OD を OD 番号1，ノード4からノードへ向う OD を OD 番号2とすれば

$$S_1=1\,300\ (\text{台})$$
$$S_2=1\,100\ (\text{台})$$

である。

以上のデータがそろえば，前に定義した行列およびベクトルを以下のように定めることができる。

式 (9) より

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3,\ \boldsymbol{B}_4,\ \boldsymbol{B}_5,\ \boldsymbol{B}_6,\ \boldsymbol{B}_7,\ \boldsymbol{B}_8,\ \boldsymbol{B}_9,\ \boldsymbol{B}_{10})$$

$$=\begin{array}{c|c} \text{アーク}/\text{ノード} & \begin{array}{cccccccccc}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\end{array} \\ \hline \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix}1,&-1,&1,&-1,&0,&0,&0,&0,&0,&0\\ -1,&1,&0,&0,&1,&-1,&0,&0,&-1,&1\\ 0,&0,&-1,&1,&0,&0,&1,&-1,&1,&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

式 (10) より

$$\boldsymbol{C}'=(1\,000,\ 1\,000,\ 800,\ 800,\ 400,\ 400,\ 900,\ 900,\ 950,\ 950)$$

式 (8) より

$$\boldsymbol{d}_1=\begin{pmatrix}1\,300\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_2=\begin{pmatrix}-1\,100\\0\\0\end{pmatrix}$$

式 (16) より

$$\boldsymbol{d}'=(1\,000,\ 1\,000,\ 800,\ 800,\ 400,\ 400,\ 900,\ 900,\ 950,\ 950,\ 1\,300,\ 0,\ 0,\ -1\,100,\ 0,\ 0)$$

式 (21) より

$$\boldsymbol{b}=(-4,\ -4,\ -4,\ -4,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -5,\ -2,\ -2,\ -2,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\ ,0)$$

式 (22) より

$$\boldsymbol{A}=10^{-3}\times\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
\begin{matrix}0.96, 0.96\\0.96, 0.96\end{matrix} \\
& \begin{matrix}0.96, 0.96\\0.96, 0.96\end{matrix} \\
& & \begin{matrix}1.60, 1.60\\1.60, 1.60\end{matrix} \\
& & & \begin{matrix}1.60, 1.60\\1.60, 1.60\end{matrix} \\
& & & & \begin{matrix}4.30, 4.30\\4.30, 4.30\end{matrix} \\
& & & & & \begin{matrix}4.30, 4.30\\4.30, 4.30\end{matrix} \\
& & & & & & \begin{matrix}1.90, 1.90\\1.90, 1.90\end{matrix} \\
& & & & & & & \begin{matrix}1.90, 1.90\\1.90, 1.90\end{matrix} \\
& & & & & & & & \begin{matrix}0.52, 0.52\\0.52, 0.52\end{matrix} \\
& & & & & & & & & \begin{matrix}0.52, 0.52\\0.52, 0.52\end{matrix} \\
& & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

式 (25) より

$$
Q=\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccc}
1, & 1, &&&&& &&&&& &&&&& &&&& 1 &&&&& &&&& \\
&& 1, & 1, &&&&& &&&&& &&&&& &&& 1 &&&&& &&& \\
&&&& 1, & 1, &&&&& &&&&& &&&&& && 1 &&&&& && \\
&&&&& & 1, & 1, &&&&& &&&&& &&&&& & 1 &&&&& & \\
&&&&& &&& 1, & 1, &&&&& &&&&& &&&&& 1 &&&&& \\
&&&&& &&&&& 1, & 1, &&&&& &&&&& &&&& 1 &&&& \\
&&&&& &&&&& && 1, & 1, &&&&& &&&&& &&& 1 &&& \\
&&&&& &&&&& &&&& 1, & 1, &&&&& &&&&& && 1 && \\
&&&&& &&&&& &&&&& & 1, & 1, &&&&& &&&&& & 1 & \\
&&&&& &&&&& &&&&& &&& 1, & 1 &&&&& &&&&& 1 \\
1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
-1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0. & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0 \\
0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0 \\
0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & -1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 1 \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & -1
\end{array}\right)
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})
$$

以上は定数により決定されるものであるが，変数よりなるベクトル $\boldsymbol{y}$ は

$$
\boldsymbol{y}'=(y_1{}^1,\ y_1{}^2,\ y_2{}^1,\ y_2{}^2,\ y_3{}^1,\ y_3{}^2,\ y_4{}^1,\ y_4{}^2,\ y_5{}^1,\ y_5{}^2,\ y_6{}^1,\ y_6{}^2,\ y_7{}^1,\ y_7{}^2,\ y_8{}^1,\ y_8{}^2,\ y_9{}^1,\ y_9{}^2,\ y_{10}{}^1,\ y_{10}{}^2,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6,\ s_7,\ s_8,\ s_9,\ s_{10})
$$

となる。

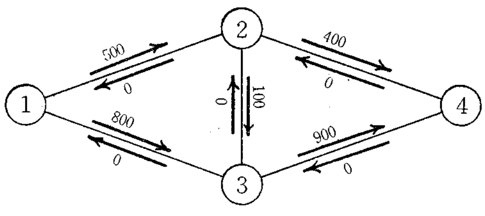
こうすることによりあとは式 (42) および (43) にしたがってシンプレックスタブローをつくり，ピボット オペレーションを前にのべた基準に沿って実行すればよい。

この例題の解はつぎのようであった。

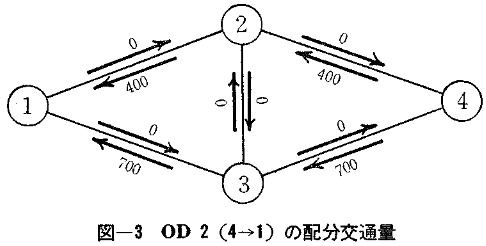
$$y_1{}^1=500,\ y_3{}^1=800,\ y_5{}^1=400,\ y_7{}^1=900,\ y_{10}{}^1=100$$

$$y_2{}^2=400,\ y_4{}^2=700,\ y_6{}^2=400,\ y_8{}^2=700$$

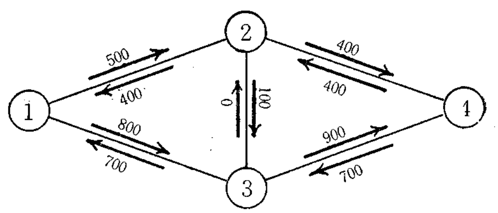
これを図示すれば以下のごとくである。



図―2 OD 1 (1→4) の配分交通量



図―3 OD 2 (4→1) の配分交通量



図―4 全体の配分交通量

図からわかるように，アーク番号3,5,6,7の4本のアークで交通量が交通容量に達しているので，ネットの改良を考える際にはまずこれらのアークに着目すべきであることがわかる。このフロー パターンにおける全車の総走行所要時間は 44.898 分・台である。

5. あとがき

本文では輸送計画的観点からの交通量配分法の一つとして，QP の応用が可能であることを示した。この方法では条件式が実行可能である限り解の存在とその一意性は保証されており求解は必ず可能である。実際の道路網への適用は，変数の量がかなり多くなるので，大型高速の電子計算機を利用することによって可能となるものと考える。

最後に，本研究をすすめるにあたって討議に参加された京都大学 佐佐木綱教授，同 明神 証助教授に厚くお礼申し上げる。また筆者らの作成した QP のプログラムは東京大学 木倉一孝氏の LP プログラムに修正を加えたものであることを明記し，同プログラムを公開された東京大学計算機センターのご好意に深く感謝する次第である。

参 考 文 献

1) Wardrop, J.G. : "Some Theoretical Aspects of Road Research", Proceedings, Institute of Civil Engineers, Part 2, pp. 325-378, 1952.
2) Hitchcock, F.L. : "The Distribution of a Commodity from Various Sources", Four of Math. Physics, 20, pp. 221-230, 1941.
3) Kantorovich, L.V. : "The Translocation of Masses", Doklady, 1942, tr. in. Management Science, 5,1-4, 1958.
4) Koopmans. T.C. : "Optimum Utilization of the Transportation System", Econometrica, Suppl. pp. 136-149, 1949.
5) 前掲 1)
6) Orden, A. : "The Transshipment Problem", Management Science, 2, pp. 276-285, 1956.
7) Dantzig, G.B. : Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
8) Hoffman, H. and Pavley, R. : "Application of Digital Comuters to Problem in the Study of Vehicular Traffic", Proceedings, Western Foint Computer Conferenc, 1958, pp. 159-161.
9) Beckman, M., McGuire, C.B. and Winsten, C.B. : Studies in the Economics of Transportation, Yale University Preess, 1956, pp. 59-79.
10) 佐佐木　綱："道路網における輸送計画について", 第4回日本道路会議論文集, 1957, pp. 43-46.
11) 佐佐木　綱：交通流理論, 交通工学シリーズ 第3巻, 技術書院, 1965, pp. 54-61.
12) 前掲 9)
13) 佐佐木　綱："道路網における交通量の配分方法", 日本地域学会年報 第2号, 1963, pp. 19-34.
14) 前掲 13)
15) 前掲 9)
16) 三根　久：オペレーションズ・リサーチ 上巻, 朝倉書店, 1966, pp. 100-152.
17) 竹内　啓・真鍋竜太郎："二次計画 Quadratic Programming について", 経営科学 第10巻 第3号, 1967, pp. 117-162.
18) 前掲 16) pp. 153-180.
19) 三好逸二・山村信吾："道路網における最大総トリップ数について", 第23回年次学術講演会講演概要 第IV部門, 土木学会, 1968, pp. 429-430.

(1968.10.21・受付)