

## 鉄筋コンクリート スラブの曲げクリープ解法\*

## ANALYSIS OF CREEP IN FLEXED REINFORCED CONCRETE SLABS

山崎 徳也\*\*・彦坂 熙\*\*\*

By Tokuya Yamasaki and Hiroshi Hikosaka

認めるものとする。

## 緒 言

コンクリートのクリープ挙動に関しては、まず Davis<sup>1)</sup>, Whitney<sup>2)</sup> および Glanville<sup>3)</sup> らの実験により種々の特性が明らかにされ、いわゆる Davis-Glanville の法則と Whitney の法則が生まれたことは周知のとおりである。その後、プレストレスト コンクリートおよび合成桁の発達にもなってクリープの重要性が再認識され、Dischinger<sup>4)</sup> を始めとして多くの人々により理論的研究が行われた結果、コンクリート構造物のクリープを考慮した応力解析手法も次第に発達し、鉄筋コンクリート桁、PC桁および合成桁などに対する今日の合理的設計理論が確立されるに至っている。

しかしながら、これら既往の研究はほとんどすべてが単一部材（柱、はり）およびラーメン構造などの単軸クリープを対象としたもので、スラブのごとく二次元応力状態のもとにある構造物のクリープを理論的に取り扱った研究は、わずかにシャイベに対する二次元クリープ問題を論じた坂・六車両氏<sup>5)</sup>のものがあるにすぎず、とくに本研究のごとく、スラブの曲げクリープの一般的解法を述べたものは全く見受けられない。

鉄筋コンクリート スラブは直交異方性板として取り扱うゆえ、その解法は等方性板にくらべてより複雑といえるが、本題のごとくクリープを考慮する場合には、応力と変形との時間的關係が加わりさらに複雑となる。本論文では以下の仮定を設けて演算の簡易化をはかった。すなわち、

(i) プレーン コンクリートのクリープ関数は、すでに実験などにより与えられているものとする。

(ii) 乾燥収縮の影響は別途考慮することとし<sup>6)</sup>、本論では無視する。

(iii) 任意時刻におけるスラブの断面で平面保持の法則が成立するものとし、かつ Davis-Glanville の法則を

\* 第23回土木学会年次学術講演会にて一部発表

\*\* 正会員 工博【九州大学教授 工学部土木工学教室

\*\*\* 正会員 九州大学講師 工学部土木工学教室

## 1. クリープ関数

材令  $\tau$  のコンクリートに単位の持続応力が働くものとすれば、時刻  $t$  におけるコンクリートの総ひずみ  $\bar{\epsilon}_c(t, \tau)$  は、弾性ひずみとクリープひずみの和として次式で表わされる。

$$\bar{\epsilon}_c(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $E_c(\tau)$  : 材令  $\tau$  のコンクリートの弾性係数  
 $C(t, \tau)$  : クリープ関数（時刻  $\tau$  から時刻  $t$  までは生ずるクリープひずみ）

$C(t, \tau)$  の関数形は、プレーン コンクリートのクリープ実験より決定されるもので、実測値に合致すると同時に実用計算に便利であることが望ましい。提案されている実験式の多くは  $t$  のみの関数で材令  $\tau$  を含まないので、これらは本研究には適合しない。材令  $\tau$  を考慮した式には Arutyunyan<sup>7)</sup> と Sackman<sup>8)</sup> のものがあるが、本論文ではつぎの Arutyunyan 型の関数形を用いることとする。すなわち、

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-x_1(t-\tau)}] \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $\varphi(\tau)$  : 材令  $\tau$  の関数 $x_1$  : 実験により定まる定数 $\varphi(\tau)$  として Arutyunyan は次式を提案している。

$$\varphi(\tau) = \frac{x_2}{\tau} + x_3 \dots\dots\dots (3)$$

この式(3)を用いる場合、式(2)はいわゆる Whitney の法則を満足しないが、つぎの式(4)によれば Whitney の法則は満たされる。

$$\varphi(\tau) = x_4 e^{-x_1 \tau} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、式(3)、(4)の  $x_2, x_3$  および  $x_4$  は実験により定まる定数である。

いま、文献7)の実験データを利用して、式(2)、(3)、(4)の未定定数  $x_1, x_2, x_3, x_4$  を最小自乗法により算出し、式(3)、(4)の  $\varphi(\tau)$  を用いたクリープ関数  $C(t, \tau)$  をそれぞれプロットして比較すれば 図-1, 2 のごとく

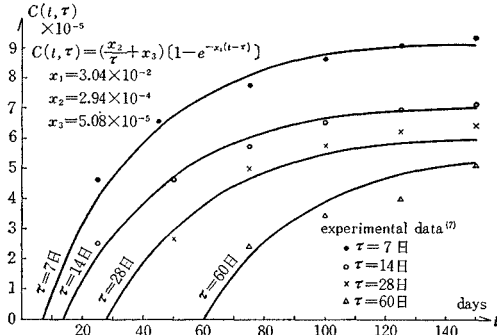


図-1

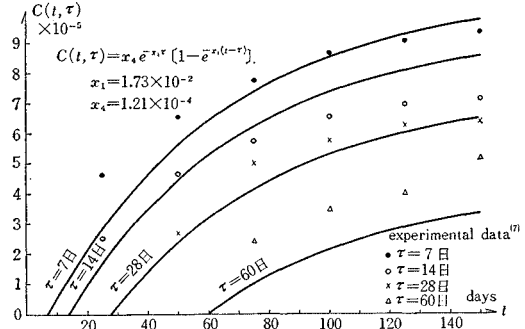


図-2

である。

### 2. クリープを考慮したコンクリートの二次元応力-ひずみ関係式

任意の直交軸  $x, y$  に関するコンクリートの軸方向応力をそれぞれ  $\sigma_{cx}, \sigma_{cy}$  とし、材令  $\tau_1$  のコンクリートが時間的に変化するこれらの応力  $\sigma_{cx}(t), \sigma_{cy}(t)$  を受けるものとすれば、時刻  $\tau_1$  から時刻  $t$  までに生ずる  $x, y$  方向の総ひずみ  $\epsilon_{cx}(t), \epsilon_{cy}(t)$  は、式 (1) を用いてそれぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{cx}(t) &= \{\sigma_{cx}(\tau_1) - \nu\sigma_{cy}(\tau_1)\} \bar{\epsilon}_c(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} \{\sigma_{cx}(\tau) - \nu\sigma_{cy}(\tau)\} \cdot \bar{\epsilon}_c(t, \tau) d\tau \\ \epsilon_{cy}(t) &= \{\sigma_{cy}(\tau_1) - \nu\sigma_{cx}(\tau_1)\} \bar{\epsilon}_c(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d}{d\tau} \{\sigma_{cy}(\tau) - \nu\sigma_{cx}(\tau)\} \cdot \bar{\epsilon}_c(t, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\nu$ : コンクリートのポアソン比

$C(t, t) = 0$  を考慮して式 (5) の右辺の積分項を部分積分すれば、容易に次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{cx}(t) &= \frac{\sigma_{cx}(t) - \nu\sigma_{cy}(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^t \{\sigma_{cx}(\tau) - \nu\sigma_{cy}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \\ \epsilon_{cy}(t) &= \frac{\sigma_{cy}(t) - \nu\sigma_{cx}(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau_1}^t \{\sigma_{cy}(\tau) - \nu\sigma_{cx}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_c(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) に式 (2) を代入し、かつ  $x_1 = r$  とおいて式 (6) の両辺を  $t$  で 1 回微分のち整理すれば、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{cx}(t) &= \frac{\dot{\sigma}_{cx}(t) - \nu\dot{\sigma}_{cy}(t)}{E_c(t)} + r\varphi(t) \{\sigma_{cx}(t) - \nu\sigma_{cy}(t)\} - r e^{-rt} \int_{\tau_1}^t \{\sigma_{cx}(\tau) - \nu\sigma_{cy}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau) e^{r\tau}] d\tau \\ \dot{\epsilon}_{cy}(t) &= \frac{\dot{\sigma}_{cy}(t) - \nu\dot{\sigma}_{cx}(t)}{E_c(t)} + r\varphi(t) \{\sigma_{cy}(t) - \nu\sigma_{cx}(t)\} - r e^{-r\tau} \int_{\tau_1}^t \{\sigma_{cy}(\tau) - \nu\sigma_{cx}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} [\varphi(\tau) e^{r\tau}] d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式 (6), (7) を用いて、式 (7) の右辺の積分項を消去すれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}_{cx}(t) - \nu\dot{\sigma}_{cy}(t)}{E_c(t)} + r \left\{ \frac{1}{E_c(t)} + \varphi(t) \right\} \{\sigma_{cx}(t) - \nu\sigma_{cy}(t)\} \\ - r \int_{\tau_1}^t \{\sigma_{cx}(\tau) - \nu\sigma_{cy}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_c(\tau)} + \varphi(\tau) \right] d\tau = \dot{\epsilon}_{cx}(t) + r\epsilon_{cx}(t) \\ \frac{\dot{\sigma}_{cy}(t) - \nu\dot{\sigma}_{cx}(t)}{E_c(t)} + r \left\{ \frac{1}{E_c(t)} + \varphi(t) \right\} \{\sigma_{cy}(t) - \nu\sigma_{cx}(t)\} \\ - r \int_{\tau_1}^t \{\sigma_{cy}(\tau) - \nu\sigma_{cx}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_c(\tau)} + \varphi(\tau) \right] d\tau = \dot{\epsilon}_{cy}(t) + r\epsilon_{cy}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) の両辺を再び  $t$  で 1 回微分して整理すれば、 $\sigma_{cx}(t), \sigma_{cy}(t)$  に関するつぎの連立 2 階常微分方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\sigma}_{cx}(t) - \nu\ddot{\sigma}_{cy}(t) + \{\dot{\sigma}_{cx}(t) - \nu\dot{\sigma}_{cy}(t)\} \left\{ r[1 + \varphi(t)E_c(t)] - \frac{\dot{E}_c(t)}{E_c(t)} \right\} = E_c(t) \{\dot{\epsilon}_{cx}(t) + r\dot{\epsilon}_{cx}(t)\} \\ \ddot{\sigma}_{cy}(t) - \nu\ddot{\sigma}_{cx}(t) + \{\dot{\sigma}_{cy}(t) - \nu\dot{\sigma}_{cx}(t)\} \left\{ r[1 + \varphi(t)E_c(t)] - \frac{\dot{E}_c(t)}{E_c(t)} \right\} = E_c(t) \{\dot{\epsilon}_{cy}(t) + r\dot{\epsilon}_{cy}(t)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

また、 $t = \tau_1$  における  $\sigma_{cx}(t), \sigma_{cy}(t)$  の初期条件が、式 (6), (7) より次式のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cx}(\tau_1) &= \frac{E_c(\tau_1)}{1-\nu^2} \{ \epsilon_{cx}(\tau_1) + \nu \epsilon_{cy}(\tau_1) \} \\ \sigma_{cy}(\tau_1) &= \frac{E_c(\tau_1)}{1-\nu^2} \{ \epsilon_{cy}(\tau_1) + \nu \epsilon_{cx}(\tau_1) \} \\ \dot{\sigma}_{cx}(\tau_1) &= \frac{E_c(\tau_1)}{1-\nu^2} [ \dot{\epsilon}_{cx}(\tau_1) + \nu \dot{\epsilon}_{cy}(\tau_1) \\ &\quad - \gamma \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \{ \epsilon_{cx}(\tau_1) \\ &\quad + \nu \epsilon_{cy}(\tau_1) \} ] \\ \dot{\sigma}_{cy}(\tau_1) &= \frac{E_c(\tau_1)}{1-\nu^2} [ \dot{\epsilon}_{cy}(\tau_1) + \nu \dot{\epsilon}_{cx}(\tau_1) \\ &\quad - \gamma \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \{ \epsilon_{cy}(\tau_1) \\ &\quad + \nu \epsilon_{cx}(\tau_1) \} ] \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

他方、せん断応力  $\tau_{cxy}(t)$  のもとでのコンクリートの総せん断ひずみを  $\dot{\gamma}_{cxy}(t)$  とすれば、式(9),(10)と同様に、 $\tau_{cxy}(t)$  に関する2階常微分方程式および  $t=\tau_1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cx}(t) &= \sigma_{cx}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t e^{-\eta(t-\tau)} \left[ \dot{\sigma}_{cx}(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{E_c(\tau')}{1-\nu^2} \{ \ddot{\epsilon}_{cx}(\tau') + \gamma \dot{\epsilon}_{cx}(\tau') + \nu(\ddot{\epsilon}_{cy}(\tau') + \gamma \dot{\epsilon}_{cy}(\tau')) \} e^{\eta(\tau-\tau')} d\tau' \right] d\tau \\ \sigma_{cy}(t) &= \sigma_{cy}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t e^{-\eta(t-\tau)} \left[ \dot{\sigma}_{cy}(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{E_c(\tau')}{1-\nu^2} \{ \ddot{\epsilon}_{cy}(\tau') + \gamma \dot{\epsilon}_{cy}(\tau') + \nu(\ddot{\epsilon}_{cx}(\tau') + \gamma \dot{\epsilon}_{cx}(\tau')) \} e^{\eta(\tau-\tau')} d\tau' \right] d\tau \\ \tau_{cxy}(t) &= \tau_{cxy}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^t e^{-\eta(t-\tau)} \left[ \dot{\tau}_{cxy}(\tau) + \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{E_c(\tau')}{2(1+\nu)} \ddot{\gamma}_{cxy}(\tau') + \gamma \dot{\tau}_{cxy}(\tau') \} e^{\eta(\tau-\tau')} d\tau' \right] d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

ここに、

$$\eta(t) = \int_{\tau_1}^t \left\{ \gamma [1 + \varphi(\tau) E_c(\tau)] - \frac{\dot{E}_c(\tau)}{E_c(\tau)} \right\} d\tau$$

### 3. 鉄筋コンクリート スラブのたわみ曲面の方程式

図-3のごとく、長方形スラブの中立面内で相隣る2辺に沿って直交軸  $x$  および  $y$  を、またこれらに垂直下向きに  $z$  軸をとり、鉄筋は  $x, y$  軸に平行に配置されているものとする。

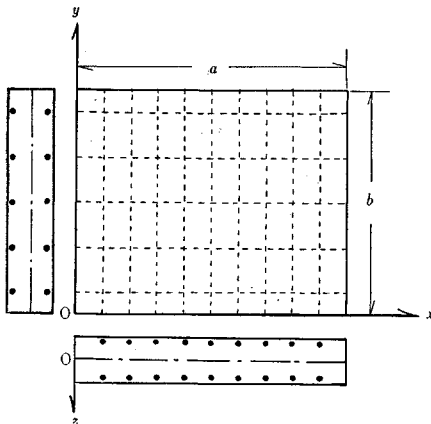


図-3

鉄筋はクリープを起さないと仮定するゆえ、その  $x, y$  方向の応力  $\sigma_{sx}(t), \sigma_{sy}(t)$  およびせん断応力  $\tau_{sxy}(t)$  はそれぞれ次式で表わされる。

における初期条件がそれぞれつぎの式(11)および式(12)のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_{cxy}(t) + \dot{\tau}_{sxy}(t) & \left\{ \gamma [1 + \varphi(t) E_c(t)] - \frac{\dot{E}_c(t)}{E_c(t)} \right\} \\ &= \frac{E_c(t)}{2(1+\nu)} \ddot{\gamma}_{cxy}(t) + \gamma \dot{\tau}_{cxy}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{cxy}(\tau_1) &= \frac{E_c(\tau_1)}{2(1+\nu)} \dot{\gamma}_{cxy}(\tau_1) \\ \dot{\tau}_{cxy}(\tau_1) &= \frac{E_c(\tau_1)}{2(1+\nu)} \{ \dot{\tau}_{cxy}(\tau_1) \\ &\quad - \gamma \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \dot{\gamma}_{cxy}(\tau_1) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

式(10),(12)の初期条件のもとで、それぞれ式(9),(11)の微分方程式を解けば、所要のクリープを考慮したコンクリートの二次元応力ひずみ関係式がつぎのごとく導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sx}(t) &= E_s \epsilon_{sx}(t), \quad \sigma_{sy}(t) = E_s \epsilon_{sy}(t), \\ \tau_{sxy}(t) &= \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \dot{\gamma}_{sxy}(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

ここに、

$\epsilon_{sx}(t), \epsilon_{sy}(t), \dot{\gamma}_{sxy}(t)$  : それぞれ鉄筋の  $x, y$  方向の垂直ひずみおよびせん断ひずみ  
 $E_s$  : 鉄筋のヤング係数  
 $\nu_s$  : 鉄筋のポアソン比

いま、スラブの単位幅当りの曲げモーメントおよびねじりモーメントをそれぞれ  $M_x(t), M_y(t)$  および  $M_{xy}(t), M_{yx}(t)$  とおけば、任意の断面における力のつりあい条件より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_x(t) &= \int_{A_{cx}} \sigma_{cx}(t) z dA_{cx} \\ &\quad + \int_{A_{sx}} \sigma_{sx}(t) z dA_{sx} \\ M_y(t) &= \int_{A_{cy}} \sigma_{cy}(t) z dA_{cy} \\ &\quad + \int_{A_{sy}} \sigma_{sy}(t) z dA_{sy} \\ M_{xy}(t) &= - \int_{A_{cx}} \tau_{cxy}(t) z dA_{cx} \\ &\quad - \int_{A_{sx}} \tau_{sxy}(t) z dA_{sx} \\ M_{yx}(t) &= \int_{A_{cy}} \tau_{cxy}(t) z dA_{cy} \\ &\quad + \int_{A_{sy}} \tau_{cxy}(t) z dA_{sy} \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

ここに、

$A_{cx}, A_{cy}$  :  $x$  および  $y$  方向の単位幅当りのコンク

リート断面積

$A_{sx}, A_{sy}$  :  $x$  および  $y$  方向の単位幅当りの鉄筋断面積

スラブの  $z$  方向のたわみを  $w(t, x, y)$  とし、平面保持の法則が成り立つものと仮定すれば、任意点のひずみは次式で表わされる。

$$\epsilon_x(t) = -z \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y(t) = -z \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial y^2}, \quad r_{xy}(t) = -2z \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots(16)$$

式 (13), (14) に式 (16) を代入のうえ、さらにこれらを式 (15) に代入して整理すれば、結局次式がえられる。以後、 $w(t, x, y)$  の代わりに  $w(t)$  の略号を用いる。

$$\left. \begin{aligned} M_x(t) &= -D_{cx}(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2} \right\} - D_{sx} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x^2} \\ &\quad - D_{cx}(\tau_1) \left[ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^2} - r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2} \right\} \right] \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[ e^{-\gamma(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} D_{cx}(\tau) \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + r \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} \right) \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ M_y(t) &= -D_{cy}(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2} \right\} - D_{sy} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial y^2} \\ &\quad - D_{cy}(\tau_1) \left[ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2} - r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x^2} \right\} \right] \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[ e^{-\gamma(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} D_{cy}(\tau) \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} + r \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2} \right) \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ M_{xy}(t) &= (1-\nu) D_{cx}(\tau_1) \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x \partial y} + \frac{D_{sx}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} \\ &\quad + (1-\nu) D_{cx}(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x \partial y} - r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x \partial y} \right\} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \\ &\quad + \int_{\tau_1}^t \left[ e^{-\gamma(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} (1-\nu) D_{cx}(\tau) \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ M_{yx}(t) &= -(1-\nu) D_{cy}(\tau_1) \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x \partial y} - \frac{D_{sy}}{1+\nu_s} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial x \partial y} \\ &\quad - (1-\nu) D_{cy}(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x \partial y} - r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \frac{\partial^2 w(\tau_1)}{\partial x \partial y} \right\} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \\ &\quad - \int_{\tau_1}^t \left[ e^{-\gamma(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} (1-\nu) D_{cy}(\tau) \left\{ \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 \dot{w}(\tau)}{\partial x \partial y} \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right] d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ただし、

$$D_{cx}(t) = \frac{E_c(t) I_{cx}}{1-\nu^2}, \quad D_{cy}(t) = \frac{E_c(t) I_{cy}}{1-\nu^2}, \quad D_{sx} = E_s I_{sx}, \quad D_{sy} = E_s I_{sy} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $I_{cx}, I_{cy}$  :  $y$  および  $x$  軸に関する単位幅当りのコンクリートの断面二次モーメント

$I_{sx}, I_{sy}$  :  $y$  および  $x$  軸に関する単位幅当りの鉄筋の断面二次モーメント

いま、スラブに作用する荷重強度を  $q(x, y)$  とすれば、 $z$  方向の力のつりあい条件より次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 M_x(t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y(t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}(t)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}(t)}{\partial x \partial y} = -q(x, y) \dots\dots\dots(19)$$

式 (17) を式 (19) に代入し、慣用のごとく  $D_{cx}(t) = D_{cy}(t) = D_c(t)$  とおけば、所要のクリープを考慮した鉄筋コンクリート スラブのたわみ曲面の方程式が導かれ、途中演算を省略して結果のみを示せば次式のごとくである。

$$\begin{aligned} D_{sx} \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 w(t)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1+\nu_s} \frac{\partial^4 w(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \\ + D_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \left[ 1 - r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma(\tau)} d\tau \right] \\ + \int_{\tau_1}^t \left[ e^{-\gamma(\tau)} \int_{\tau_1}^{\tau} D_c(\tau) \left\{ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2 \partial y^2} + r \left( \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right\} e^{\gamma(\tau)} d\tau \right] d\tau \\ = q(x, y) \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

式 (20) において  $t = \tau_1$  と置けば、クリープを考慮しない鉄筋コンクリート スラブのたわみ曲面の微分方程式がえられ、これは後の式 (24) とともに、 $w(t)$  の  $t = \tau_1$  における初期条件を与えるものである。すなわち、

$$\beta_1(\tau_1) \frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^4} + \beta_2(\tau_1) \frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial y^4} + 2 \beta_3(\tau_1) \frac{\partial^4 w(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} = q(x, y) \dots\dots\dots(21)$$

ここに

$$\beta_1(t) = D_{sx} + D_c(t), \quad \beta_2(t) = D_{sy} + D_c(t), \quad 2\beta_3(t) = \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} + 2D_c(t) \dots \dots \dots (22)$$

さて、式 (20) を直接解いて  $w(t)$  を求めることは困難であるゆえ、以下に述べる操作により、式 (20) を微分方程式に直して解くこととする。

まず、式 (20) を  $t$  で 1 回微分すれば次式がえられる。

$$\begin{aligned} & D_{sx} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + D_{sy} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} e^{-\eta(t)} \\ & - r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) D_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} e^{-\eta(t)} \\ & + e^{-\eta(t)} \int_{\tau_1}^t D_c(\tau) \left[ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2 \partial y^2} + r \left\{ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \right] e^{\eta(\tau)} d\tau = 0 \end{aligned} \dots \dots \dots (23)$$

式 (23) において  $t = \tau_1$  と置けば、式 (21) とともに  $w(t)$  の初期条件を与える微分方程式が次式のごとくえられる。

$$\beta_1(\tau_1) \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4} + \beta_2(\tau_1) \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4} + 2\beta_3(\tau_1) \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} = r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) D_c(\tau_1) \left\{ \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \dot{w}(\tau_1)}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

式 (23) の両辺に  $e^{\eta(t)}$  を乗じて  $t$  で微分したのち、式 (22) の記号を用いて整理すれば、つぎの微分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \beta_1(t) \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^4} + \beta_2(t) \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + 2\beta_3(t) \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \{r D_c(t) + D_{sx} \dot{\eta}(t)\} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^4} \\ & + \{r D_c(t) + D_{sy} \dot{\eta}(t)\} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial y^4} + \left\{ 2r D_c(t) + \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \dot{\eta}(t) \right\} \frac{\partial^4 \dot{w}(t)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

ここに、

$$\dot{\eta}(t) = r \{1 + \varphi(t) E_c(t)\} - \dot{E}_c(t) / E_c(t)$$

結局、式 (20) の方程式を解くことは、式 (21) および式 (24) により与えられる初期条件のもとで、式 (25) の微分方程式を解くことと同じであり、正弦複級数と正弦単級数による解法を、以下に章をあらためてそれぞれ述べることとする。

#### 4. 正弦複級数による解法

四辺単純支持の鉄筋コンクリート長方形スラブに対しては、正弦複級数による解法が適合する。

座標軸  $x, y$  を 図-3 のごとく定めれば、四辺単純支持の境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ において } w(t)=0, M_x(t)=0 \\ y=0, b \text{ において } w(t)=0, M_y(t)=0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $M_x(t)$  および  $M_y(t)$  の一般式は、式 (17) により与えられる。

いま、式 (25) の微分方程式の解が、式 (26) の境界条件を満足するつぎの変数分離形でえられるものと仮定する。すなわち、

$$w(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \dots \dots \dots (27)$$

ただし、 $a_{mn}(t)$  は  $t$  のみの関数である。

式 (27) を式 (25) に代入すれば、未知関数  $a_{mn}(t)$  に関するつぎの 2 階の微分方程式をうる。

$$\ddot{a}_{mn}(t) + Q_{mn}(t) \dot{a}_{mn}(t) = 0 \dots \dots \dots (28)$$

ここに、

$$Q_{mn}(t) = \frac{r D_c(t) \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \dot{\eta}(t) \left[ \frac{m^4}{a^4} D_{sx} + \frac{n^4}{b^4} D_{sy} + \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \right]}{\frac{m^4}{a^4} \beta_1(t) + \frac{n^4}{b^4} \beta_2(t) + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \beta_3(t)}$$

式 (28) の解は容易に次式のごとく求められる。

$$a_{mn}(t) = a_{mn}(\tau_1) + \dot{a}_{mn}(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-Q_{mn}(\tau)} d\tau \dots \dots \dots (29)$$

式 (29) の  $a_{mn}(\tau_1)$  および  $\dot{a}_{mn}(\tau_1)$  はそれぞれ式 (21), (24) の初期条件より求められ、途中の演算を省略して結果のみを示せば、次式のごとくである。

$$\left. \begin{aligned} a_{mn}(\tau_1) &= \frac{q_{mn}}{\pi^4 \left\{ \frac{m^4}{a^4} \beta_1(\tau_1) + \frac{n^4}{b^4} \beta_2(\tau_1) + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \beta_3(\tau_1) \right\}} \\ \dot{a}_{mn}(\tau_1) &= \frac{r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) D_c(\tau_1) \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^4}{a^4} \beta_1(\tau_1) + \frac{n^4}{b^4} \beta_2(\tau_1) + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \beta_3(\tau_1)} a_{mn}(\tau_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 $q_{mn}$  は  $q(x, y)$  のフーリエ正弦複級数への展開係数であり、集中荷重および満載等分布荷重に対する  $q_{mn}$  はそれぞれ次式で与えられる。

(i) 点  $(\xi_0, \eta_0)$  に作用する集中荷重  $P$

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi}{a} \xi_0 \sin \frac{n\pi}{b} \eta_0$$

(ii) 満載等分布荷重  $q_0$

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (m, n=1, 3, 5, \dots)$$

式 (30) を式 (27) に代入して整理すれば、 $w(t)$  は結局式 (31) で表わされることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sx}(t) &= E_s z_s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[ 1 + R_{mn} \int_{\tau_1}^t e^{-Q_{mn}(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_{sy}(t) &= E_s z_s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \left[ 1 + R_{mn} \int_{\tau_1}^t e^{-Q_{mn}(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし、 $z_s$  : 中立面から鉄筋に至る距離

コンクリートのクリープ応力も同様に式 (13) より算定されるが、同式の定積分を解析的に求めることは一般に困難で、数値積分を行なわねばならない。しかし、鉄

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cx}(t) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \left( \frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 \left[ 1 - S_{mn} \int_{\tau_1}^t e^{-Q_{mn}(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_{cy}(t) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \left( \frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 \left[ 1 - S_{mn} \int_{\tau_1}^t e^{-Q_{mn}(\tau)} d\tau \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$S_{mn} = 1 - R_{mn}$$

$$R_{mn} = \frac{r\varphi(\tau_1) E_c \left( \frac{m^4}{a^4} D_{sx} + \frac{n^4}{b^4} D_{sy} + \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \right)}{\frac{m^4}{a^4} \beta_1(\tau_1) + \frac{n^4}{b^4} \beta_2(\tau_1) + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \beta_3(\tau_1)}$$

式 (31), (32), (33) において  $t = \tau_1$  と置けば、クリープを考慮しない場合の鉄筋コンクリート スラブのたわみおよび応力が求められ、クリープを考慮した場合は、これらを初期値として  $w, \sigma_{sx}, \sigma_{sy}$  は単調増加関数、 $\sigma_{cx}, \sigma_{cy}$  は単調減少関数となること、上記 2 式からただちに了解される。

計算例

辺長比  $a/b=1.5$  の四辺単純支持単鉄筋長方形スラブを例とし、 $x$  および  $y$  方向の鉄筋比の組み合わせによりつぎの 6 種に分類する。

- スラブ ① :  $A_{sx}/A_{cx} = p_x = 0.005,$   
 $A_{sy}/A_{cy} = p_y = 0.005$

$$\left. \begin{aligned} w(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \left[ 1 + R_{mn} \int_{\tau_1}^t e^{-Q_{mn}(\tau)} d\tau \right] \\ &\quad \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (31) \end{aligned} \right\}$$

ここに、

$$R_{mn} = \frac{r\varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) D_c(\tau_1) \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^4}{a^4} \beta_1(\tau_1) + \frac{n^4}{b^4} \beta_2(\tau_1) + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \beta_3(\tau_1)}$$

式 (31) を用いて式 (16) の  $\epsilon_x(t), \epsilon_y(t)$  を算定する、これらを式 (14) に代入すれば、鉄筋の応力が式 (32) で求められる。

筋コンクリートでは材令によるコンクリートの弾性係数の変化はきわめて小さく、 $E_c(t) = E_c = \text{const.}$  と置けるゆえ式 (13) は非常に簡単となり、コンクリートの  $x$  および  $y$  方向の垂直応力が式 (33) で求められることとなる。

スラブ ② :  $p_x = 0.005, p_y = 0.015$

” ③ :  $p_x = 0.015, p_y = 0.015$

” ④ :  $p_x = 0.005, p_y = 0.025$

” ⑤ :  $p_x = 0.015, p_y = 0.025$

” ⑥ :  $p_x = 0.025, p_y = 0.025$

スラブの中立面の位置は、コンクリートの引張側断面を考慮するか無視するかにより異なってくる。実際の状態は、引張側のコンクリート断面をすべて考慮する場合と完全に無視する両極端の間にあるものと考えられる<sup>9)</sup>。

引張側断面を無視する場合の考察は後の 5. の計算例 1 で行なうこととして、本例では引張側断面をすべて考慮し、かつコンクリートの引張クリープについては Davis-Glanville の法則を適用して演算を行なうこととする。

材令によるコンクリートの弾性係数の変化は無視し、 $E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.15, E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu_s = 0.3$  とする。クリープ関数は式 (2), (3) を用い、

$x_1=3.04 \times 10^{-2}$ ,  $x_2=2.94 \times 10^{-4}$ ,  $x_3=5.08 \times 10^{-5}$  と定める。

$\tau_1=28$  日で等分布荷重を満載するものとし、式 (31), (32), (33) より算定したスラブ中央点 ( $x=a/2, y=b/2$ ) におけるたわみ、鉄筋およびコンクリートの応力の時間経過による変化の模様を、表-1 および 図-4, 5, 6 にまとめて示した。

これらの結果より、四辺単純支持スラブの曲げクリープの特性として、つぎの諸点をあげることができる。

(i) 最大たわみは、弾性計算より得られる載荷直後のたわみの2倍以上に達する。この倍率は鉄筋量の少な

表-1

	時刻 $t$	スラブ ①	スラブ ②	スラブ ③	スラブ ④	スラブ ⑤	スラブ ⑥
$\frac{w(t)}{w(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	2.048	1.861	1.838	1.750	1.752	1.753
	90 "	2.413	2.113	2.078	1.946	1.949	1.951
	120 "	2.555	2.196	2.156	2.004	2.007	2.010
	180 "	2.632	2.233	2.190	2.026	2.030	2.033
$\frac{\sigma_{sx}(t)}{\sigma_{sx}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	2.048	1.829	1.839	1.697	1.734	1.754
	90 "	2.414	2.063	2.080	1.864	1.923	1.952
	120 "	2.556	2.137	2.158	1.909	1.977	2.011
	180 "	2.633	2.168	2.191	1.923	1.998	2.035
$\frac{\sigma_{sy}(t)}{\sigma_{sy}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	2.049	1.865	1.839	1.755	1.755	1.755
	90 "	2.415	2.119	2.080	1.952	1.953	1.953
	120 "	2.557	2.203	2.158	2.011	2.012	2.012
	180 "	2.633	2.240	2.192	2.034	2.035	2.035
$\frac{\sigma_{cx}(t)}{\sigma_{cx}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	0.876	0.762	0.762	0.695	0.709	0.716
	90 "	0.832	0.693	0.693	0.616	0.633	0.642
	120 "	0.816	0.670	0.671	0.594	0.611	0.620
	180 "	0.806	0.660	0.662	0.585	0.603	0.611
$\frac{\sigma_{cy}(t)}{\sigma_{cy}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	0.876	0.774	0.762	0.715	0.716	0.717
	90 "	0.833	0.708	0.694	0.640	0.641	0.642
	120 "	0.816	0.686	0.671	0.618	0.619	0.620
	180 "	0.807	0.676	0.662	0.609	0.611	0.611

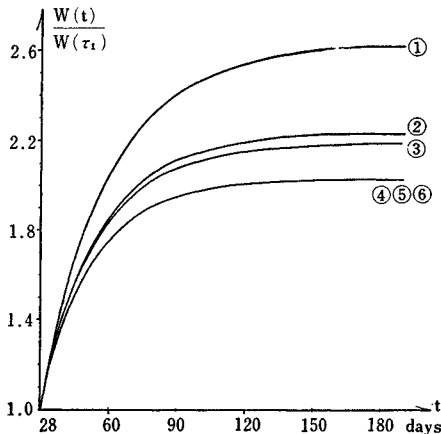


図-4

いスラブほど大きくなり、また短辺方向の鉄筋量に強く支配される。

(ii) 鉄筋の応力も、たわみとほぼ同じような増加曲線を描くが、一般に長辺方向鉄筋の応力の増加率は短辺方向のそれよりいくぶん小さい。

(iii) コンクリートの応力は時間とともに漸減し、弾性応力の60~80%までに至る。この減少傾向は鉄筋量の多いスラブほど大きく、また短辺方向の鉄筋量に支配

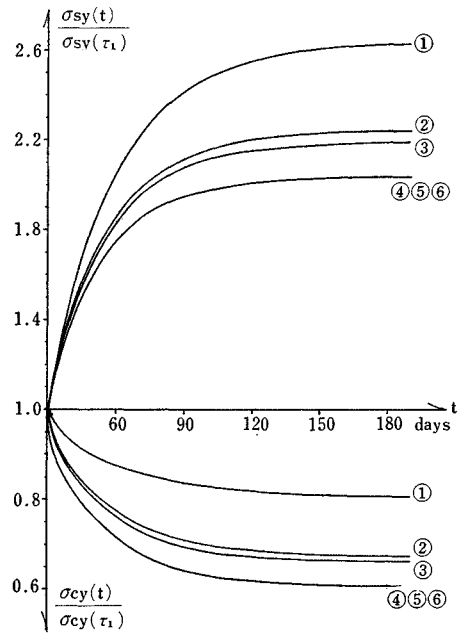


図-5

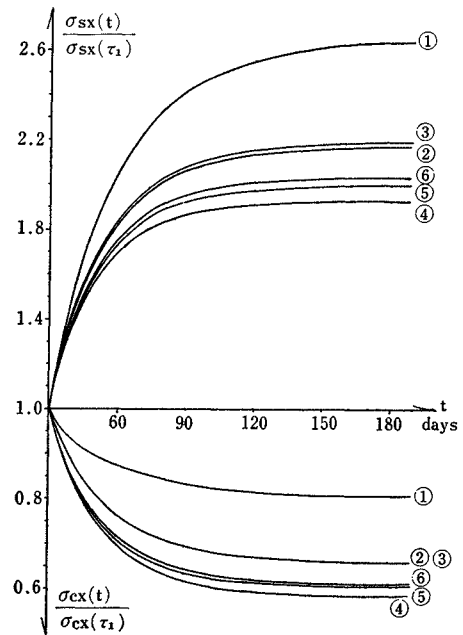


図-6

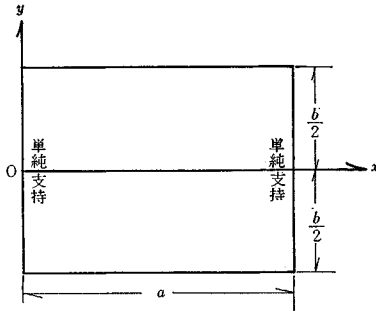


図-1

される点は、たわみおよび鉄筋応力と同様である。

### 5. 正弦単級数による解法

一対辺が単純支持で他対辺が任意の支持条件をもつ鉄筋コンクリート長方形スラブに対しては、正弦単級数による解法が適合する。座標軸を図-3のごとく定め、一対辺  $x=0$  および  $x=a$  が単純支持されるものとすれば、これら二辺の境界条件は次式で与えられる。

$$x=0, a \text{ にて } w(t)=0, M_x(t)=0$$

いま、式(25)の微分方程式の解が、上記の境界条件を満足するつぎの変数分離形でえられるものと仮定する。

$$w(t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots(34)$$

ただし、 $T_m(t)$  は  $t$  のみの、 $f_m(y)$  は  $y$  のみの関数である。

#### A. $f_m(y)$ の決定

式(34)において  $t=\tau_1$  と置けば

$$w(\tau_1) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\tau_1) f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

がえられ、 $T_m(\tau_1)=1$  としても一般性は失われない。したがって次式が成立する。

$$w(\tau_1) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots(35)$$

一方、式(21)を解いて  $w(\tau_1)$  の一般解が次式のごとくえられる。

$\beta_3(\tau_1)^2 - \beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1) < 0$  のとき：

$$\begin{aligned} w(\tau_1) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y \right. \\ & + B_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & + C_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sin k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & \left. + D_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sin k_2 \frac{m\pi}{a} y \right) \\ & \times \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots(36)_a \end{aligned}$$

$\beta_3(\tau_1)^2 - \beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1) = 0$  のとき：

$$\begin{aligned} w(\tau_1) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \cosh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y \right. \\ & + B_m \sinh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + C_m \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y \\ & \times \cosh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + D_m \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y \\ & \left. \times \sinh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \\ & \dots\dots\dots(36)_b \end{aligned}$$

$\beta_3(\tau_1)^2 - \beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1) > 0$  のとき：

$$\begin{aligned} w(\tau_1) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \cosh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y \right. \\ & + B_m \sinh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + C_m \cosh \bar{k}_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & \left. + D_m \sinh \bar{k}_2 \frac{m\pi}{a} y \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \\ & \dots\dots\dots(36)_c \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\beta_1(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)}} + \frac{\beta_3(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)} \right)}, \\ k_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\beta_1(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)}} - \frac{\beta_3(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)} \right)}, \\ \bar{k}_1 &= \sqrt{\frac{\beta_3(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)} + \sqrt{\frac{\beta_3(\tau_1)^2 - \beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)^2}}}, \\ \bar{k}_2 &= \sqrt{\frac{\beta_3(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)} - \sqrt{\frac{\beta_3(\tau_1)^2 - \beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1)}{\beta_2(\tau_1)^2}}}, \end{aligned}$$

$A_m, B_m, C_m, D_m$  は  $y=\pm 0, b$  における境界条件より定まる積分定数であり、 $a_{mn}(\tau_1)$  は式(30)により与えられる内容をもつ。

なお、通常使用される範囲の有効高さ、鉄筋比およびかぶりをもつ鉄筋コンクリートスラブでは常に  $\beta_3^2(\tau_1) - \beta_1(\tau_1)\beta_2(\tau_1) < 0$  が成立するゆえ、以下本論文においては式(36)<sub>a</sub>の解のみを考えることとする。すなわち、式(35)と(36)<sub>a</sub>の右辺を比較すれば、 $f_m(y)$ として次式がえられる。

$$\begin{aligned} f_m(y) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \sin \frac{n\pi}{b} y \\ & + A_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & + B_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cos k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & + C_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sin k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & + D_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sin k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ & \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$



**B.  $T_m(t)$  の決定**

式 (34) を式 (25) に代入すれば次式がえられる。

$$\frac{\dot{T}_m(t) + \dot{\eta}(t)\dot{T}_m(t) \dot{E}_c(\tau_1)}{\dot{T}_m(t) + r \dot{T}_m(t) \dot{E}_c(t)} = \frac{D_c(\tau_1) \left( \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m \right)}{D_{sy} \frac{d^4 f_m}{dy^4} - \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + D_{sx} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m} \dots\dots\dots (38)$$

式 (38) の左辺は  $t$  のみの関数、右辺は  $y$  のみの関数であるゆえ、両辺は定数でなければならない。右辺が定数であれば、次式で定義される  $\lambda_m$  も定数となる。

$$\lambda_m = \frac{D_{sy} \frac{d^4 f_m}{dy^4} - \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + D_{sx} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m}{\beta_2(\tau_1) \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \beta_3(\tau_1) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \beta_1(\tau_1) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m} \dots\dots\dots (39)$$

式 (39) を用いて

$$P_m(t) = r + \frac{\lambda_m E_c(\tau_1) \{ r \varphi(t) E_c(t) - \dot{E}_c(t) / E_c(t) \}}{(1 - \lambda_m) E_c(t) + \lambda_m E_c(\tau_1)} \dots\dots\dots (40)$$

と置けば、式 (38) より  $T_m(t)$  に関するつぎの微分方程式がえられる。

$$\frac{d^2 T_m(t)}{dt^2} + P_m(t) \frac{dT_m(t)}{dt} = 0 \dots\dots\dots (41)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \dot{T}_m(\tau_1) \left\{ \beta_2(\tau_1) \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \beta_3(\tau_1) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \beta_1(\tau_1) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m \right\} \sin \frac{m \pi}{a} x \\ & = r \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) D_c(\tau_1) \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\tau_1) \left\{ \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m \right\} \sin \frac{m \pi}{a} x \\ & = r \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\tau_1) (1 - \lambda_m) \left\{ \beta_2(\tau_1) \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \beta_3(\tau_1) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \beta_1(\tau_1) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m \right\} \sin \frac{m \pi}{a} x \end{aligned}$$

上式における両辺の比較より  $\dot{T}_m(\tau_1)$  は結局次式となる。

$$\dot{T}_m(\tau_1) = (1 - \lambda_m) r \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) T_m(\tau_1) \dots\dots\dots (43)$$

式 (43) を式 (42) に代入し、かつ  $T_m(\tau_1) = 1$  を考慮すれば、 $T_m(t)$  がつぎのごとく決定される。

$$T_m(t) = 1 + (1 - \lambda_m) r \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \cdot \int_{\tau_1}^t e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} P_m(\tau) d\tau} d\tau \dots\dots\dots (44)$$

**C.  $w(t, x, y)$  の決定**

式 (34), (37), (44) より、クリープを考慮した一対辺単純支持鉄筋コンクリートスラブのたわみ  $w$  の一般解は次式で与えられることとなる。

$$w(t, x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + (1 - \lambda_m) r \varphi(\tau_1) E_c(\tau_1) \cdot \int_{\tau_1}^t e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} P_m(\tau) d\tau} d\tau \right\} f_m(y) \sin \frac{m \pi}{a} x \dots\dots\dots (45)$$

ここで、新たに座標軸を図-7のごとく定めれば  $f_m(y)$  に含まれる4個の積分定数  $A_m, B_m, C_m, D_m$

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{2qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \frac{(k_1^2 - k_2^2) \sinh k_1 \alpha_m \sin k_2 \alpha_m + 2k_1 k_2 \cosh k_1 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m}{k_1 k_2 (\cosh^2 k_1 \alpha_m - \sin^2 k_2 \alpha_m)} \\ B_m &= C_m = 0 \\ D_m &= \frac{2qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \frac{(k_1^2 - k_2^2) \cosh k_1 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m - 2k_1 k_2 \sinh k_1 \alpha_m \sin k_2 \alpha_m}{k_1 k_2 (\cosh^2 k_1 \alpha_m - \sin^2 k_2 \alpha_m)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

ただし、 $m=1, 3, 5, \dots$

式 (41) の一般解は容易に次式で求められる。

$$T_m(t) = T_m(\tau_1) + \dot{T}_m(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} P_m(\tau) d\tau} d\tau \dots\dots\dots (42)$$

ここに、積分定数  $\dot{T}_m(\tau_1)$  は式 (24) の初期条件式より次記のごとく定められる。いま、式 (34) を式 (24) に代入すれば、

は、 $y = \pm b/2$  における任意の境界条件より求められる。いま、 $x=0$  が単純支持され、 $y = \pm b/2$  が (a) 単純支持、(b) 固定、(c) 自由、のいずれも対称境界条件をもつ長方形スラブが、満載等分布荷重を受ける場合の積分定数をそれぞれ求めてみる。

満載等分布荷重に対しては、式 (37) の右辺第1項の

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\tau_1) \sin \frac{n \pi}{b} y$$

に代えて

$$\frac{4qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

を用い、また、

$$\frac{m \pi b}{2a} = \alpha_m$$

の置き換えを行なう。

a) 単純支持境界条件

$$y = \pm b/2 \text{ において } w(t) = 0, M_y(t) = 0$$

より、

b) 固 定

境界条件

$$y = \pm b/2 \text{ において } w(t) = 0, \frac{dw(t)}{dy} = 0$$

より,

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{4qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \frac{k_1 \cosh k_1 \alpha_m \sin k_2 \alpha_m + k_2 \sinh k_1 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m}{k_1 \sin k_2 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m + k_2 \cosh k_1 \alpha_m \sinh k_1 \alpha_m} \\ B_m &= C_m = 0 \\ D_m &= \frac{4qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \frac{k_1 \sinh k_1 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m - k_2 \cosh k_1 \alpha_m \sin k_2 \alpha_m}{k_1 \sin k_2 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m + k_2 \cosh k_1 \alpha_m \sinh k_1 \alpha_m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

ただし,  $m=1, 3, 5, \dots$

c) 自 由

厳密な境界条件は,  $y = \pm b/2$  において

$$\left. \begin{aligned} M_y(t) &= 0 \\ \frac{\partial M_y(t)}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}(t)}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}(t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} M_y(\tau_1) &= 0 \\ \frac{\partial M_y(\tau_1)}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}(\tau_1)}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}(\tau_1)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

であるが, すべての  $t$  について上記の境界条件を満足し、しかるとき, 積分定数はつぎのごとく定められる。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{4qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \frac{\nu D_c(\tau_1)}{S} [\{\beta_2(\tau_1)(3k_1^2 - k_2^2) - 2\beta_3(\tau_1) + \nu D_c(\tau_1)\} k_2 \sinh k_1 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m \\ &\quad + \{\beta_2(\tau_1)(k_1^2 - 3k_2^2) - 2\beta_3(\tau_1) + \nu D_c(\tau_1)\} k_1 \cosh k_1 \alpha_m \sin k_2 \alpha_m] \\ B_m &= C_m = 0 \\ D_m &= \frac{4qa^4}{\pi^5 \beta_1(\tau_1)} \frac{1}{m^5} \frac{\nu D_c(\tau_1)}{S} [\{\beta_2(\tau_1)(k_1^2 - 3k_2^2) - 2\beta_3(\tau_1) + \nu D_c(\tau_1)\} k_1 \sinh k_1 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m \\ &\quad - \{\beta_2(\tau_1)(3k_1^2 - k_2^2) - 2\beta_3(\tau_1) + \nu D_c(\tau_1)\} k_2 \cosh k_1 \alpha_m \sin k_2 \alpha_m] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

ここに,

$$\begin{aligned} S &= [-\beta_2(\tau_1)^2(k_1^2 + k_2^2)^2 - \beta_2(\tau_1)\{2\beta_3(\tau_1) - \nu D_c(\tau_1)\}(k_1^2 + k_2^2) + \nu D_c(\tau_1)\{\beta_2(\tau_1)(3k_1^2 - k_2^2) - 2\beta_3(\tau_1) \\ &\quad + \nu D_c(\tau_1)\} k_2 \sinh k_1 \alpha_m \cosh k_1 \alpha_m + [-\beta_2(\tau_1)^2(k_1^2 + k_2^2)^2 + \beta_2(\tau_1)\{2\beta_3(\tau_1) - \nu D_c(\tau_1)\}(k_1^2 + k_2^2) \\ &\quad + \nu D_c(\tau_1)\{\beta_2(\tau_1)(k_1^2 - 3k_2^2) - 2\beta_3(\tau_1) + \nu D_c(\tau_1)\} k_1 \sin k_2 \alpha_m \cos k_2 \alpha_m] \end{aligned}$$

ただし,  $m=1, 3, 5, \dots$

D. コンクリートおよび鉄筋のクリープ応力算定式

式(45)を用いて式(16)の  $\epsilon_x(t)$ ,  $\epsilon_y(t)$  および  $r_{xy}(t)$  をそれぞれ算定したのち, これらを式(13), 式(14)に代入すれば, コンクリートおよび鉄筋のクリープ応力がえられることとなるが, 式中の定積分  $-\int_{\tau_1}^t P_m(\tau) d\tau$  が一般には解析的に求められないため, 数値積分を行な

わねばならない。

なお, 4. と同じく, コンクリートの弾性係数の時間的変化を無視して  $E_c(t) = E_c = \text{const.}$  と置けば, 式(40)は,

$$P_m(t) = \gamma \{1 + \lambda_m E_c \varphi(t)\}$$

と簡単になり, 所要のクリープ応力算定式がつぎのごとく導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cx}(t) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \lambda_m \gamma E_c \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t Q_m(\tau) d\tau \right\} \left\{ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m(y) - \nu \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ \sigma_{cy}(t) &= \frac{E_c}{1-\nu^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 - \lambda_m \gamma E_c \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t Q_m(\tau) d\tau \right\} \left\{ \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m(y) - \frac{d^2 f_m}{dy^2} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \\ \sigma_{sx}(t) &= E_s \varepsilon_s \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + (1 - \lambda_m) \gamma E_c \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t Q_m(\tau) d\tau \right\} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} f_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \\ \sigma_{sy}(t) &= -E_s \varepsilon_s \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 1 + (1 - \lambda_m) \gamma E_c \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t Q_m(\tau) d\tau \right\} \frac{d^2 f_m}{dy^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

ただし,  $Q_m(\tau) = e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} P_m(\tau) d\tau}$

解析を以下に試みる。この境界条件に対する  $P_m(\tau)$  の積分定数は式(46)である。

計算例 1.

辺長比および断面諸元とも 4. の計算例と全く等しい 6 種の四辺単純支持単鉄筋長方形スラブを採用し, 本章の誘導諸式を用いて, 満載等分布荷重に対するクリープ

の時間的変化を求めれば 表-2 の結果をうる。

表-2 の諸値と表-1 の正弦複級数を用いた厳密解とを比較すれば、最大約 2% の誤差が認められる。その

$$\lambda_m = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \left( D_{sy} \frac{d^4 f_m}{dy^4} - \frac{D_{sx} + D_{sy}}{1 + \nu_s} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + D_{sx} \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m \right) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} \left( \beta_2(\tau_1) \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2\beta_3(\tau_1) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \beta_1(\tau_1) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} f_m \right) dy} \dots\dots\dots (50)$$

しかし、たかだか 2% の誤差ゆえ、かかる近似的取り扱いが実用上十分容認されることの証左となる。

また、スラブ② ( $p_x=0.5\%$ ,  $p_y=1.5\%$ ) について、中央線  $y=0$  に沿うたわみの時間的変化を示せば、図-8 のごとくである。

図-9 (a), (b) は同じくスラブ②について、コンクリートおよび鉄筋の短辺方向 ( $y$  方向) の応力分布が、クリープにより時間的に変化する模様を等応力線図により示したものである。

つぎに、載荷開始時のコンクリートの材令が、スラブのクリープにおよぼす影響を調べるため、スラブ① ( $p_x=p_y=0.5\%$ )、スラブ② ( $p_x=0.5\%$ ,  $p_y=1.5\%$ )、スラ

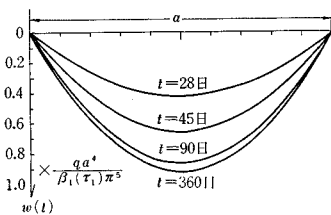


図-8

表-2

	時刻 t	スラブ①	スラブ②	スラブ③	スラブ④	スラブ⑤	スラブ⑥
$\frac{w(t)}{w(\tau_1)}$	28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	2.044	1.844	1.833	1.730	1.739	1.747
	90 "	2.407	2.088	2.070	1.916	1.930	1.942
	120 "	2.548	2.167	2.146	1.970	1.986	2.000
	180 "	2.623	2.201	2.179	1.990	2.008	2.022
	$\frac{\sigma_{sx}(t)}{\sigma_{sx}(\tau_1)}$	28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
60 "		2.044	1.818	1.833	1.687	1.724	1.748
90 "		2.407	2.047	2.070	1.851	1.908	1.943
120 "		2.548	2.119	2.147	1.896	1.961	2.000
180 "		2.624	2.149	2.180	1.910	1.981	2.023
$\frac{\sigma_{sy}(t)}{\sigma_{sy}(\tau_1)}$		28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	2.044	1.845	1.833	1.731	1.739	1.747
	90 "	2.407	2.089	2.070	1.917	1.931	1.942
	120 "	2.548	2.168	2.146	1.972	1.987	2.000
	180 "	2.623	2.203	2.179	1.992	2.008	2.022
	$\frac{\sigma_{cx}(t)}{\sigma_{cx}(\tau_1)}$	28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
60 "		0.874	0.755	0.758	0.687	0.703	0.713
90 "		0.830	0.685	0.689	0.609	0.627	0.638
120 "		0.812	0.662	0.667	0.587	0.605	0.616
180 "		0.803	0.653	0.658	0.578	0.596	0.607
$\frac{\sigma_{cy}(t)}{\sigma_{cy}(\tau_1)}$		28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	0.873	0.764	0.758	0.703	0.708	0.713
	90 "	0.829	0.696	0.689	0.627	0.633	0.638
	120 "	0.812	0.674	0.667	0.604	0.611	0.616
	180 "	0.803	0.664	0.658	0.596	0.602	0.607

要因は、本数値計算において式 (39) の代わりにつぎの式 (50) を用いたことにある。

ブ④ ( $p_x=0.5\%$ ,  $p_y=2.5\%$ ) に対し、それぞれ  $\tau_1=14$  日, 21 日にとって、スラブ中央点 ( $x=a/2$ ,  $y=0$ ) におけるたわみ、鉄筋およびコンクリートの  $y$  方向応力の時間的変化を計算した。表-3 はこの結果をまとめたものであり、また、これを先に求めた  $\tau_1=28$  日の結果と合わせてプロットすれば、図-10 がえられる。

コンクリートの材令が若いスラブでは、コンクリートの応力の減少が大きい反面、鉄筋の応力の増加率が高

表-3

時刻 t	スラブ①		スラブ②		スラブ④		
	$\tau_1=14$ 日	$\tau_1=21$ 日	$\tau_1=14$ 日	$\tau_1=21$ 日	$\tau_1=14$ 日	$\tau_1=21$ 日	
$\frac{w(t)}{w(\tau_1)}$	14日	1.000		1.000		1.000	
	21 "		1.000		1.000	1.000	
	45 "	2.182	1.918	1.951	1.753	1.819	1.656
	60 "	2.446	2.221	2.133	1.972	1.961	1.832
	90 "	2.713	2.525	2.295	2.167	2.077	1.977
	120 "	2.816	2.643	2.348	2.230	2.111	2.019
	180 "	2.871	2.707	2.371	2.258	2.124	2.035
$\frac{\sigma_{sy}(t)}{\sigma_{sy}(\tau_1)}$	14日	1.000		1.000		1.000	
	21 "		1.000		1.000	1.000	
	45 "	2.182	1.918	1.952	1.754	1.820	1.657
	60 "	2.446	2.221	2.134	1.973	1.962	1.833
	90 "	2.713	2.525	2.297	2.168	2.079	1.979
	120 "	2.816	2.643	2.350	2.232	2.113	2.021
	180 "	2.871	2.707	2.373	2.259	2.126	2.037
$\frac{\sigma_{cy}(t)}{\sigma_{cy}(\tau_1)}$	14日	1.000		1.000		1.000	
	21 "		1.000		1.000	1.000	
	45 "	0.857	0.889	0.734	0.790	0.666	0.733
	60 "	0.825	0.852	0.684	0.729	0.608	0.661
	90 "	0.792	0.815	0.638	0.674	0.561	0.602
	120 "	0.780	0.801	0.623	0.656	0.547	0.584
	180 "	0.773	0.793	0.617	0.649	0.541	0.578

表-4

時刻 t	スラブ①	スラブ②	スラブ③	スラブ④	スラブ⑤	スラブ⑥
$\frac{w(t)}{w(\tau_1)}$	28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	1.855	1.560	1.510	1.414	1.387
	90 "	2.104	1.677	1.609	1.484	1.450
	120 "	2.185	1.705	1.632	1.498	1.462
	180 "	2.222	1.714	1.638	1.501	1.465
$\frac{\sigma_{sy}(t)}{\sigma_{sy}(\tau_1)}$	28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	1.855	1.561	1.510	1.415	1.387
	90 "	2.104	1.678	1.609	1.485	1.450
	120 "	2.185	1.706	1.632	1.499	1.463
	180 "	2.221	1.715	1.638	1.503	1.466
$\frac{\sigma_{cy}(t)}{\sigma_{cy}(\tau_1)}$	28日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	0.770	0.614	0.589	0.539	0.526
	90 "	0.703	0.533	0.508	0.460	0.449
	120 "	0.681	0.514	0.490	0.445	0.434
	180 "	0.671	0.508	0.485	0.441	0.430

く、また当然ながら、クリープたわみも大きくなる。しかし、たわみおよび応力のいずれについても、材令の影響は時間の経過とともに小さくなっている。

以上の計算は、すべてコンクリートの引張側断面を完全に有効と考えて行なったものであるが、これを全く無視し、 $\tau_1=28$ 日 で等分布荷重を満載した場合のスラブ中央点のたわみ、鉄筋およびコンクリートの応力の時間的变化を算定した結果は、表-4のごとくである。

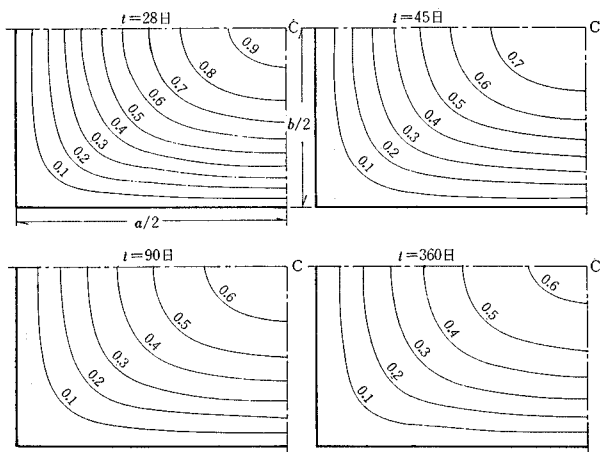
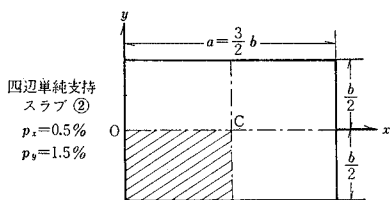


図-9 (a)  $\sigma_{cy}(t)$  の等応力線図

単位： $\frac{qa^2}{\beta_1(\tau_1)\pi^3} \frac{E_c}{1-\nu^2} z$

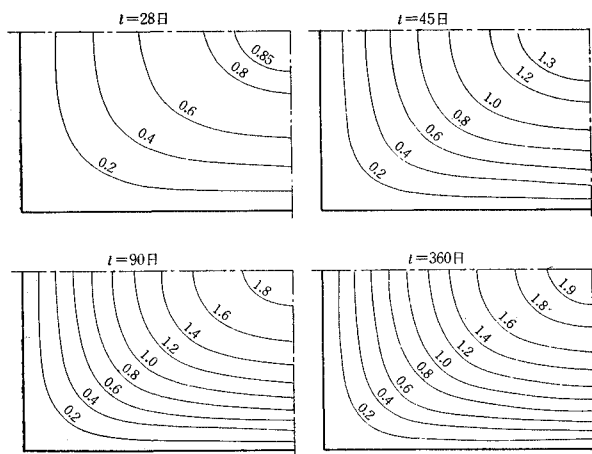


図-9 (b)  $\sigma_{sy}(t)$  の等応力線図

単位： $\frac{qa^2}{\beta_1(\tau_1)\pi^3} E_s z$

コンクリートの引張断面をすべて考慮した表-2の結果と対比すれば、表-4の場合は表-2に比してたわみおよび鉄筋応力の増加速度が小さくなっている反面、コンクリートの応力の減少速度は大きくなっていることが認められる。

計算例 2.

辺長比  $a/b=1.5$  で、一对辺  $x=0$ ,  $a$  が単純支持され、他対辺  $y=\pm b/2$  が自由の単鉄筋長方形スラブを対象とし、前例と同じく満載等分布荷重に対するクリープ解析を行なう。この境界条件に対する  $f_m(y)$  の積分定数は式 (48) である。 $x$  および  $y$  方向の鉄筋比の組み合わせにより、スラブをつぎの5種に分類する。

- スラブ ①： $p_x=1.0\%$ ,  $p_y=0.1\%$
- スラブ ②： $p_x=2.0\%$ ,  $p_y=0.1\%$
- スラブ ③： $p_x=1.5\%$ ,  $p_y=0.5\%$
- スラブ ④： $p_x=2.5\%$ ,  $p_y=0.5\%$
- スラブ ⑤： $p_x=2.5\%$ ,  $p_y=1.5\%$

載荷開始時のコンクリート材令は  $\tau_1=28$ 日 とし、引張側のコンクリート断面は完全に有効として演算を行ない、スラブ中央点 ( $x=a/2$ ,  $y=0$ ) におけるたわみ、鉄筋およびコンクリートの応力の時間的变化を表-5に示した。表-5によれば、本例のごとき一方向スラブでは主鉄筋 ( $x$ 方向鉄筋) のクリープにおよぼす影響はきわめて大きい、 $y$ 方向鉄筋はほとんど影響を与えないこと、およびコンクリート、鉄筋のいずれについても、 $x$ ,  $y$  方向の応力の時間的变化率が等しくなることが明らかとなった。

また、スラブ ④ について  $t=28$ 日 と  $t=360$ 日におけるコンクリートと主鉄筋の応力  $\sigma_{cx}(t)$ ,

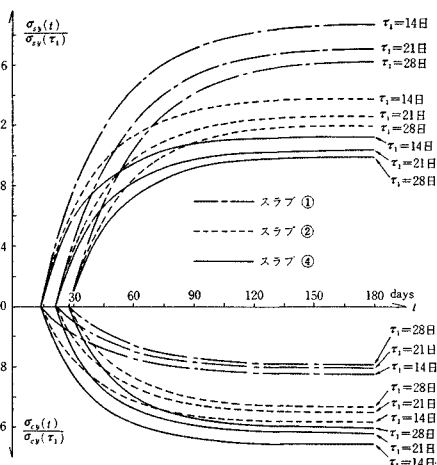


図-10

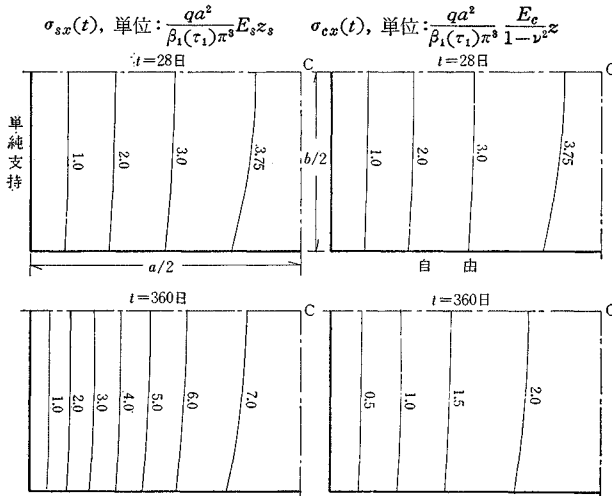


図-11 一对辺自由スラブ④  
( $p_x=2.5\%$ ,  $p_y=0.5\%$ ) の等応力線図

表-5

	時刻 $t$	スラブ ①	スラブ ②	スラブ ③	スラブ ④	スラブ ⑤
$\frac{w(t)}{w(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	1.862	1.706	1.786	1.668	1.686
	90 "	2.116	1.882	1.999	1.827	1.852
	120 "	2.200	1.932	2.065	1.870	1.899
	180 "	2.237	1.950	2.092	1.886	1.916
$\frac{\sigma_{sx}(t)}{\sigma_{sx}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	1.863	1.707	1.786	1.668	1.686
	90 "	2.116	1.883	1.999	1.828	1.853
	120 "	2.200	1.933	2.065	1.871	1.899
	180 "	2.238	1.952	2.092	1.886	1.916
$\frac{\sigma_{sy}(t)}{\sigma_{sy}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	1.862	1.706	1.786	1.668	1.686
	90 "	2.116	1.882	1.999	1.827	1.852
	120 "	2.199	1.932	2.065	1.870	1.899
	180 "	2.237	1.950	2.091	1.885	1.916
$\frac{\sigma_{cx}(t)}{\sigma_{cx}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	0.775	0.691	0.733	0.671	0.680
	90 "	0.708	0.614	0.661	0.592	0.602
	120 "	0.686	0.592	0.639	0.571	0.581
	180 "	0.677	0.584	0.629	0.563	0.573
$\frac{\sigma_{cy}(t)}{\sigma_{cy}(\tau_1)}$	28 日	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	60 "	0.775	0.692	0.733	0.671	0.680
	90 "	0.709	0.615	0.661	0.593	0.602
	120 "	0.686	0.593	0.639	0.571	0.581
	180 "	0.677	0.585	0.630	0.564	0.573

$\sigma_{sx}(t)$  の分布をそれぞれ等応力線図で示せば、図-11のごとくである。

### 結 語

本研究は、従来の単軸曲げクリープ理論を二次元クープ問題に拡張し、弾性板理論と同じく正弦級数を用いて、鉄筋コンクリートスラブの曲げクリープ解析を初

めて可能ならしめたものである。

計算例に示すごとく、クリープを考慮した鉄筋コンクリートスラブの応力は、弾性計算の結果とは著しく異なっている。たとえば、算例で取り扱った辺長比 1.5 のスラブにコンクリートの材令 28 日で載荷した場合には、鉄筋の応力は 2 倍以上に増加、コンクリートの応力は約 60% にまで減少する。したがって、クリープを考慮すれば鉄筋コンクリートスラブのより合理的な設計施工が可能となり、本論文の効用は大きいものと確信する。

4. で提示した正弦複級数による解法は、曲げクリープの厳密解を与えるが、対象が四辺単純支持スラブに限られる。また、一对辺単純支持、他對辺任意支持のより一般的境界条件を包括して扱う。5. の正弦単級数による解法は、式 (39) の  $\lambda_m$  の算定において近似的取り扱いを必要とするが、5. の計算例 1 に示すごとく、実用上十分の精度を有することが確かめられた。

以上のごとく、本論文の手法で解析可能なスラブは、少なくとも一对辺が単純支持されるものに限られるが、式 (20) に誘導した方程式は境界条件のいかんを問わず成立するゆえ、これを広く一般的な鉄筋コンクリート長方形スラブの曲げクリープ解析の基本方程式として用い、他の境界条件をもつスラブにも応用しようご目下研究中である。

終わりに、本論文の数値計算には、東京大学大型計算機センターの HITAC-5020 E および本学中央計数施設 OKITAC-5090 H を使用したことを付記する。

### 参 考 文 献

- 1) R.E. Davis and H.E. Davis : Flow of Concrete under the Action of Sustained Loads, Journal of ACI. Vol. 27, March 1931.
- 2) C.S. Whitney : Plain and Reinforced Concrete Arches, Proceedings of ACI. Vol. 28, March 1932.
- 3) W.H. Glanville : Creep of Concrete under Load, The Structural Engineer. Vol. 11, Feb. 1933.
- 4) Fr. Dischinger : Elastische und Plastische Verformung der Eisenbeton-Tragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Bauing. 20 Jahrg. 1939.
- 5) 坂 静雄・六車 照 : コンクリートの 2 次元クープに関する理論的研究, 日本建築学会論文報告集, 第 68 号, 昭和 36 年 6 月.
- 6) 山崎徳也・彦坂 照・熊谷恒一郎 : 鉄筋コンクリートスラブの乾燥収縮曲げ応力解析, 昭和 43 年度土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭和 44 年 2 月.
- 7) N. Kh. Arutyunyan : Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures, Pergamon Press. 1966.
- 8) J.L. Sackman : Creep of a Cracked Reinforced Beam, Proceedings of ASCE. Jan. 1968.
- 9) 岡田 清 : 鉄筋コンクリート梁のクリープ応力近似解, 土木学会誌, 第 36 卷, 第 5 号, 昭和 26 年 5 月.

(1968.12.28・受付)