

任意形状の平板曲げの数値解析法

AN APPROACH FOR THE ANALYSIS OF THIN PLATES IN BENDING

久保慶三郎*・吉田裕**
By Keizaburo Kubo and Yutaka Yoshida

1. はじめに

平板曲げの数値解析法として有限要素法や差分法が発展的に適用されて大きな成果をあげている。

有限要素として、三角形要素を用いる場合には、要素の各頂点でたわみと二つの回転角を未知量として設定するものとして、合計 9 個の独立変位置しか考慮することができない。一方、 $r^2 p^2 w = 0$ を満足するようなたわみ関数として、単純な 3 次の多項式を用いる場合にも、これを完全な形で表わすためには 10 の自由度を必要とするので、これを完全な形で決定することはできない。そこで関数の対称性を保持しながら自由度を 9 にてい減するために種々の試みが提案されている。しかし、平面応力問題とは違って平板曲げの問題では、平面に垂直な方向の変位を問題とするために、3 次元のたわみ曲面を扱うことになり、もっと本質的な問題が生ずる。すなわち、このような単純な形でたわみ関数を決定して各頂点で変位の適合条件を満たすことができても、要素間のたわみ角の連続性を満足させることができないことである。

さらに厳しい問題として、三角形要素の節点の位置関係によって、たとえば、三角形の二辺が x および y 軸に平行になるような場合に、各節点の変位置と多項式の係数とを結ぶマトリックスが特異性を持つてくるということが起こる。このような矛盾を解決するために面積座標を用いる方法などが考えられたり、要素間の境界線に直角方向のたわみ角の連続性を保持するような解析法が研究されたりしているが、板の曲げの問題に対する有限要素法はまだ多くの問題点を残している状態であるといえる。

差分方程式による方法は、ある座標系で表わされる支配方程式を差分方程式に展開するという意味では、境界条件を考慮することなど、任意の形状の平板構造を解析するためには種々の困難が生ずる。とくに、斜交自由隅

のような領域は、それを明確に評価することが困難である。

そこで、このような問題の起因を除去し、任意の形状を有する平板構造の解析を可能にするような自由度の高い解析法を開発すべく研究を行ってきた。ここにまとめる解析法の着想の基本は、たわみ曲面と曲げモーメント和曲面の二つの曲面を三角形の平らな要素の集合として考えるということである。要素が三角形であれば、その各頂点をちょうど考える曲面の上に乗せることができ、しかも各要素がねじれたりせずに平面を保つことができる。そして、このような三角形の要素の集合として表わされる曲面は三角形要素の大きさを小さくするにしたがって、実際の曲面に近づくということである。

曲面を構成する三角形要素が平らであると考えられるから、外力と曲げモーメント和曲面とか、曲げモーメント和曲面とたわみ曲面といった関係は、すべて要素と要素の接合線での交角といった量で表現する。このような考え方は、要素間の勾配の連続性を考慮するために努力している有限要素法の方向とは全く対照的なものである。いずれにしても、対象を多数の有限の三角形領域に分割して考えるという精神は広義の有限要素法であり、解析のための基本式の誘導などに用いた考え方および関係式の形は差分法であって、このような解析法は有限要素法と差分法との接点に位置するものであるということが出来る。

曲げおよびねじりモーメントの評価の仕方などの点にまだ種々の問題点を残してはいるが、この解析法による解析結果と他の解析法から得られた結果を比較したり、模型による実測結果を比較して、この方法によって非常に精度で実際問題を評価し得ることを示すことができたので、ここに解析法の具体的内容と解析結果を示す。

2. 外荷重系 P と曲げモーメント和系 M

等方性板の曲げの問題において、曲げモーメント和として $M = (M_n + M_t)/(1 + \nu)$ とおくと $M = -D(\partial^2 w / \partial n^2$

* 正会員 工博 東京大学教授 生産技術研究所
** 正会員 工博 東京大学講師 生産技術研究所

$+\partial^2 w/\partial t^2$) となる。いま、せん断力は $Q_n = -D\partial/\partial n$ ($\partial^2 w/\partial n^2 + \partial^2 w/\partial t^2$) であるから $Q_n = \partial M/\partial n$ と表わされる。

ここで、板の曲げモーメント和曲面が図-1のように、多数の三角形の平面によって構成されているものと考え、その一つの要素を取り出して考察する(図-2)。

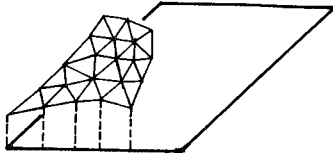


図-1

三角形要素 ijk の各頂点の曲げモーメント和の値をそれぞれ M_i, M_j, M_k として、この要素の曲げモーメント和面が図-2のように M_i, M_j, M_k の各頂点をその上に有する平面で表わされるものと考え。いまマトリックスを構成するための便宜上、各辺のせん断力 Q_{ij}, Q_{jk}, Q_{ki} の正の向きを図-3 のようにとる。

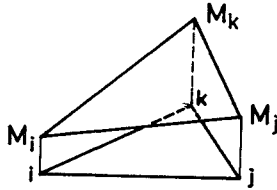


図-2

要素上の曲げモーメント和面が平面であると考えるから、各边上のせん断力は、図-4を参照して

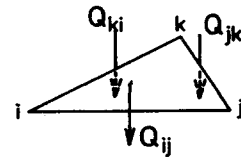


図-3

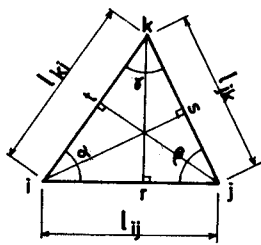


図-4

$$Q_{ij} = (M_r - M_k) \times \frac{1}{l_{kr}}$$

と表わされる。ここで

$$M_r = M_i + (M_j - M_i) \times \frac{l_{ki}}{l_{ij}} \times \cos \alpha$$

であり

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{l_{ki}}{l_{ij}} + \frac{l_{ij}}{l_{ki}} - \frac{l_{jk}^2}{l_{ij}l_{ki}} \right)$$

であるから

$$l_{ij}Q_{ij} = \frac{1}{4A_{ijk}} \{ (l_{ij}^2 + l_{jk}^2 - l_{ki}^2)M_i + (l_{ij}^2 + l_{ki}^2 - l_{jk}^2)M_j - 2l_{ij}^2M_k \}$$

となる。同様に

$$l_{jk}Q_{jk} = \frac{1}{4A_{ijk}} \{ (l_{jk}^2 + l_{ki}^2 - l_{ij}^2)M_j + (l_{jk}^2 + l_{ij}^2 - l_{ki}^2)M_k - 2l_{jk}^2M_i \}$$

$$l_{ki}Q_{ki} = \frac{1}{4A_{ijk}} \{ (l_{ki}^2 + l_{ij}^2 - l_{jk}^2)M_k + (l_{ki}^2 + l_{jk}^2 - l_{ij}^2)M_i - 2l_{ki}^2M_j \}$$

となる。ここに A_{ijk} は三角形 ijk の面積である。

いま、三角形の各頂点で内力を代表するものと考え、要素の頂点 i の内力 \bar{F}_i は

$$\bar{F}_i = \frac{1}{2} (l_{ij}Q_{ij} + l_{ik}Q_{ik})$$

として

$$\bar{F}_i = \frac{1}{8A_{ijk}} \{ 2l_{jk}^2M_i + (l_{ij}^2 - l_{jk}^2 - l_{ki}^2)M_j + (l_{ki}^2 - l_{ij}^2 - l_{jk}^2)M_k \}$$

となる。同様に

$$\bar{F}_j = \frac{1}{8A_{ijk}} \{ 2l_{ki}^2M_j + (l_{jk}^2 - l_{ki}^2 - l_{ij}^2)M_k + (l_{ij}^2 - l_{jk}^2 - l_{ki}^2)M_i \}$$

$$\bar{F}_k = \frac{1}{8A_{ijk}} \{ 2l_{ij}^2M_k + (l_{ki}^2 - l_{ij}^2 - l_{jk}^2)M_i + (l_{jk}^2 - l_{ki}^2 - l_{ij}^2)M_j \}$$

となる。

節点 i に作用する外荷重 P_i は、節点 i に頂点を有する各三角形要素の内力 \bar{F}_i の総和で表わされるから

$$P_i = \sum \bar{F}_i \dots \dots \dots (1)$$

となる。これが、作用外荷重系 P と曲げモーメント和系 M との関係式である。

外荷重が分布荷重の場合は、これを要素の各頂点に作用する集中荷重で代表させなければならない。いま、分布荷重を図-5に示すように3個の四面体に分割して、

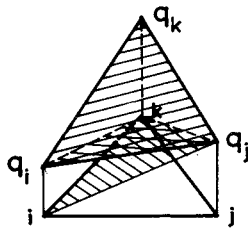


図-5

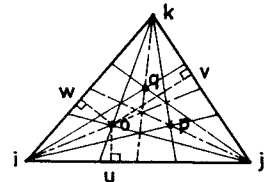


図-6

それぞれの重心から各辺に下した垂線の長さを求めると、たとえば、図-6を参照して、点Oについては

$$l_{ou} = \frac{1}{2}l_{ij}A_{ijk}, l_{ov} = \frac{1}{2}l_{jk}A_{ijk}, l_{ow} = \frac{1}{2}l_{ki}A_{ijk}$$

となる。また、3つに分割した分布荷重の大きさは

$$\bar{q}_i = \frac{1}{3}q_iA_{ijk}, \bar{q}_j = \frac{1}{3}q_jA_{ijk}, \bar{q}_k = \frac{1}{3}q_kA_{ijk}$$

であるから、要素の各頂点に分担される荷重は

$$\bar{F}_i = \frac{A_{ijk}}{12} (2q_i + q_j + q_k)$$

$$\bar{F}_j = \frac{A_{ijk}}{12} (2q_j + q_k + q_i)$$

$$\bar{F}_k = \frac{A_{ijk}}{12} (2q_k + q_i + q_j)$$

となる。したがって、節点の作用外荷重として

$$P_i = \Sigma \bar{P}_i$$

を用いることになる。すなわち、外荷重系 P と曲げモーメント和系 M との関係式は

$$\Sigma \bar{P}_i = \Sigma \bar{F}_i \dots\dots\dots(2)$$

となる。

3. 曲げモーメント和系 M とたわみ系 Δ

等方性板の曲げにおいて $\partial^2 M / \partial n^2 + \partial^2 M / \partial t^2 = -q$, $\partial^2 w / \partial n^2 + \partial^2 w / \partial t^2 = -M/D$ であるから、 q と M の関係は M/D と w の関係に等しい。いま、少なくとも一つの三角形要素内では曲げ剛性が一様であるものとするれば、要素の曲げモーメント和面が平面であれば M/D 面も平面となる。ここで、板の弾性荷重を要素の各頂点に作用する集中荷重で代表させることを考える。板の弾性荷重を図-7に示すように3個の四面体に分割して、前述の分布荷重と同様な考察をすれば、3つに分割したそれぞれの弾性荷重の大きさが

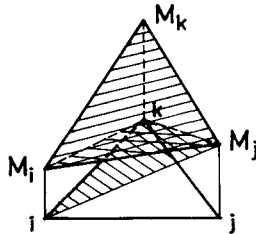


図-7

$$\bar{M}_i = \frac{1}{3} M_i A_{ijk} / D, \quad \bar{M}_j = \frac{1}{3} M_j A_{ijk} / D,$$

$$\bar{M}_k = \frac{1}{3} M_k A_{ijk} / D$$

であるから、各頂点の集中荷重として代表される板の弾性荷重は

$$\bar{W}_i = \frac{A_{ijk}}{12D} (2M_i + M_j + M_k)$$

$$\bar{W}_j = \frac{A_{ijk}}{12D} (2M_j + M_k + M_i)$$

$$\bar{W}_k = \frac{A_{ijk}}{12D} (2M_k + M_i + M_j)$$

となる。

つぎに、たわみ曲面も曲げモーメント和曲面と同様に近似的に三角形平面の集合であると考え、要素の各頂点で代表される内力は、曲げモーメント和の項で考察したのと全く同様に

$$\bar{N}_i = \frac{1}{8 A_{ijk}} \{ 2 l_{jk}^2 \Delta_i + (l_{ij}^2 - l_{jk}^2 - l_{ki}^2) \Delta_j + (l_{ki}^2 - l_{ij}^2 - l_{jk}^2) \Delta_k \}$$

$$\bar{N}_j = \frac{1}{8 A_{ijk}} \{ 2 l_{ki}^2 \Delta_j + (l_{jk}^2 - l_{ki}^2 - l_{ij}^2) \Delta_k + (l_{ij}^2 - l_{jk}^2 - l_{ki}^2) \Delta_i \}$$

$$\bar{N}_k = \frac{1}{8 A_{ijk}} \{ 2 l_{ij}^2 \Delta_k + (l_{ki}^2 - l_{ij}^2 - l_{jk}^2) \Delta_i + (l_{jk}^2 - l_{ki}^2 - l_{ij}^2) \Delta_j \}$$

となる。よって、節点 i のつりあいより

$$\Sigma \bar{W}_i = \Sigma \bar{N}_i \dots\dots\dots(3)$$

を得る。これが曲げモーメント和系 M とたわみ系 Δ との関係式である。

4. 曲げおよびねじりモーメント

ここでは、不規則な三角形平面要素によって構成されると考えるたわみ曲面から、各要素の曲げおよびねじりモーメントをいかにして評価するかを考察する。

問題は $\partial^2 w / \partial n^2$, $\partial^2 w / \partial t^2$, $\partial^2 w / \partial n \partial t$ を評価することである。しかし、不規則な三角形要素で分割され、しかも節点の変位量のみが与えられているような平面場の二次微係数の評価という問題は、根本的に多くの無理があり明確な形でこれを行なうことは不可能である。しかし、境界条件を考慮するためにも、応力の計算のためにも、実際の解析を行なうためには、この解決は不可欠の問題である。

この点に関し種々の方法を考察し、実際に解析を行なってそれぞれの方法の適性を判定した結果、ここに述べるような方法が最も適当であると考えられるので具体的な解析は以下に述べるような方法によって行なった。

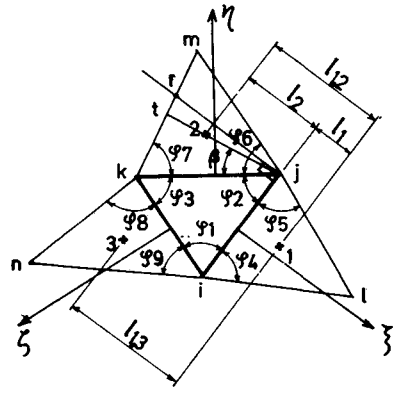


図-8

図-8を参照して、三角形要素 ijk のため w の ξ 方向の二次微係数をつぎのように与える。

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)_{ijk} = \frac{1}{l_{ij}} \left[\frac{1}{l_{1,2}} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl} - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{jkm} \right\} l_{jk} \times \cos(\varphi 2) + \frac{1}{l_{1,3}} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl} - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{kin} \right\} l_{ki} \times \cos(\varphi 1) \right] \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 l_{ij} : 三角形要素の辺 ij の長さ
 $l_{1,2}$: 三角形要素 ijl と jkm の重心間の ξ 方向の距離

$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{ijl}$: 三角形要素 ijl の ξ 方向の勾配である。

いま,

$$l_{kr} = l_{jk} \frac{\cos(\varphi 2)}{\sin(\varphi 2)\sin(\varphi 7) + \cos(\varphi 2)\cos(\varphi 7)}$$

$$l_{jr} = l_{jk} \frac{\sin(\varphi 7)}{\sin(\varphi 2)\sin(\varphi 7) + \cos(\varphi 2)\cos(\varphi 7)}$$

$$A_r = A_k + (A_m - A_k) \frac{l_{kr}}{l_{km}}$$

であり,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{jkm} = \frac{1}{l_{jr}} (A_j - A_r)$$

であるから,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{jkm} \times l_{jk} = \sin(\varphi 2) \times (A_j - A_k)$$

$$+ \frac{\cos(\varphi 2)}{2 A_{jkm}} \{ \cos(\varphi 7) \times l_{jk} l_{km} \times A_j$$

$$+ (l_{jk}^2 - \cos(\varphi 7) \times l_{jk} l_{km}) A_k - l_{jk}^2 A_m \}$$

一方,

$$l_{jk}^2 - \cos(\varphi 7) \times l_{jk} l_{km} = l_{jk}^2 - \frac{1}{2}$$

$$\times (l_{jk}^2 + l_{km}^2 - l_{jm}^2)$$

$$= \frac{1}{2} (l_{jk}^2 + l_{jm}^2 - l_{km}^2)$$

$$= \cos(\varphi 6) \times l_{jk} l_{jm}$$

であり,

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{jkm} \times l_{jk} = \frac{1}{4 A_{jkm}} \{ (l_{jk}^2 + l_{km}^2 - l_{jm}^2) A_j$$

$$+ (l_{jk}^2 + l_{jm}^2 - l_{km}^2) A_k - 2 l_{jk}^2 A_m \}$$

であるから,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{jkm} \times l_{jk} = \sin(\varphi 2) \times (A_j - A_k)$$

$$- \cos(\varphi 2) \times \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{jkm} \times l_{jk} \dots\dots\dots (5)$$

と表わされる。

また, $l_{1,2} = l_1 + l_2$ として,

$$l_2 = \frac{2}{3} l_{jl} \sin(\varphi 2 + \beta)$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ l_{jk} \sin(\varphi 2) + \frac{1}{2} l_{km} \sin(\varphi 7 - \varphi 2) \right\}$$

であり,

$$l_1 = \frac{1}{3} l_{jl} \sin(\varphi 5)$$

であるから,

$$l_{1,2} = \frac{1}{3} l_{jl} \sin(\varphi 5) + \frac{2}{3} \left\{ l_{jk} \sin(\varphi 2) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} l_{km} \sin(\varphi 7 - \varphi 2) \right\}$$

と表わされる。ゆえに, $l_{ij} \times l_{1,2}$ に対して $\alpha_{1,2}$ という記号を用いると,

$$\alpha_{1,2} = l_{ij} \times l_{1,2} = \frac{2}{3} A_{ijl} + \frac{4}{3} A_{ijk}$$

$$+ \frac{1}{3} l_{ij} l_{km} \sin(\varphi 7 - \varphi 2)$$

となる。同様に

$$\alpha_{1,3} = l_{ij} \times l_{1,3} = \frac{2}{3} A_{ijl} + \frac{4}{3} A_{ijk}$$

$$+ \frac{1}{3} l_{ij} l_{kn} \sin(\varphi 8 - \varphi 1)$$

となる。ここで,

$$a_{1,2} = \frac{l_{jk} \cos(\varphi 2)}{\alpha_{1,2} \times l_{ij}}, \quad a_{1,3} = \frac{l_{ki} \cos(\varphi 1)}{\alpha_{1,3} \times l_{ij}},$$

$$b_{1,2} = \frac{\cos(\varphi 2)}{\alpha_{1,2}}, \quad b_{1,3} = \frac{\cos(\varphi 1)}{\alpha_{1,3}}$$

とすると, 式(4) はつぎのように表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{ijk} = (a_{1,2} + a_{1,3}) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{ijl} \times l_{ij} \right]$$

$$- b_{1,2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{jkm} \times l_{jk} \right]$$

$$- b_{1,3} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{kin} \times l_{ki} \right]$$

また, 式(5) の関係を代入して

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{ijk} = (a_{1,2} + a_{1,3}) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{ijl} \times l_{ij} \right]$$

$$+ b_{1,2} \cos(\varphi 2) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{jkm} \times l_{jk} \right]$$

$$+ b_{1,3} \cos(\varphi 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)_{kin} \times l_{ki} \right]$$

$$- b_{1,2} \sin(\varphi 2) \times (A_j - A_k)$$

$$- b_{1,3} \sin(\varphi 1) \times (A_i - A_k)$$

と表わされる。同様に

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_{ijk}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right)_{ijk}$$

も Δ および

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{ijl}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{jkm}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)_{kin}$$

の関数として表わすことができる。また,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{ijl}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_{jkm}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)_{kin}$$

は Δ の関数として, たとえば,

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{ijl} l_{ij} = \frac{1}{4 A_{ijl}} \{ (l_{ij}^2 + l_{jl}^2 - l_{il}^2) A_i$$

$$+ (l_{ji}^2 + l_{il}^2 - l_{ij}^2) A_j - 2 l_{ij}^2 A_l \}$$

のように表わされるので

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{ijk}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_{ijk}, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right)_{ijk}$$

はすべて Δ の関数として表わすことができる。したがって

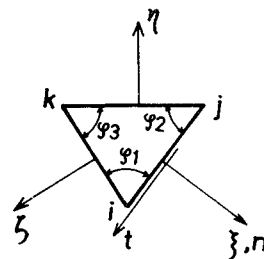


図-9

て、たとえば ξ 軸方向に n 軸を、 ξ 軸に直角な方向に t 軸をとれば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right)_{ijk} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{ijk} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{ijk} &= \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_{ijk} \sin(\varphi 1) \cos(\varphi 1) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right)_{ijk} \sin(\varphi 2) \cos(\varphi 2) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{ijk} \cos(\varphi 1) \cos(\varphi 2) \sin(\varphi 3)}{\sin(\varphi 1) \sin(\varphi 2) \sin(\varphi 3)} \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}\right)_{ijk} &= \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)_{ijk} \sin^2(\varphi 1) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}\right)_{ijk} \sin^2(\varphi 2) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{ijk} (\sin^2(\varphi 2) - \sin^2(\varphi 1))}{2 \sin(\varphi 1) \sin(\varphi 2) \sin(\varphi 3)} \end{aligned}$$

となるから、要素 ijk の曲げおよびねじりモーメントはこれで分離できる。

5. 境界条件

(1) 固定辺

固定辺の境界条件は、 $w_i=0$ 、 $(\partial w/\partial n)_i=0$ である。 $w_i=0$ は問題がない。 $(\partial w/\partial n)_i=0$ については、式(3)の内容と固定辺に関する実領域と虚領域の幾何学的対称性を考えて、実領域内で式(3)、すなわち $\Sigma \bar{W}_i = \Sigma \bar{N}_i$ を満たすことがすなわち $(\partial w/\partial n)_i=0$ の条件式となる。

(2) 自由辺

自由辺の境界条件は、 $(M_n)_i=0$ 、 $(V_n)_i=0$ である。 $(M_n)_i=0$ の条件はつぎのように考慮する。すなわち、 $(M_n)_i=0$ より曲げモーメント和 M_i が

$$M_i = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_i$$

と表わされるので、式(3)に代る関係式として次式を用いることができる。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu} \left\{ \frac{\lambda_{i-1,i}}{6 D_{i-1,i}} M_{i-1} + \left(\frac{\lambda_{i-1,i}}{3 D_{i-1,i}} + \frac{\lambda_{i,i+1}}{3 D_{i,i+1}} \right) M_i + \frac{\lambda_{i,i+1}}{6 D_{i,i+1}} M_{i+1} \right\} &= -\frac{d_{i-1}}{\lambda_{i-1,i}} \\ + \left(\frac{1}{\lambda_{i-1,i}} + \frac{1}{\lambda_{i,i+1}} \right) d_i - \frac{d_{i+1}}{\lambda_{i,i+1}} \end{aligned}$$

つぎに $(V_n)_i=0$ について考察する。ここで行なっているように有限の要素で分割された場での有限個の節点での力のつりあいを考えているような場合には、微分方程式で支配される場合とは本質的に異っており、実質的な意味での条件を考えなければならない。すなわち、式(1)または式(2)、すなわち $P_i = \Sigma \bar{F}_i$ または $\Sigma \bar{P}_i = \Sigma \bar{F}_i$ は内力と外荷重との力のつりあい方程式であるが、自由辺上の節点 i でのこの関係式の意味するところは、節点 i の支配実領域内のせん断力 \bar{Q}_i の総和

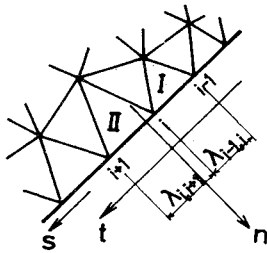


図-10

$\Sigma \bar{F}_i$ が外荷重 P_i (または $\Sigma \bar{P}_i$) とつりあっているということである。ここで \bar{Q}_i という記号を用いたのは、実際のせん断力 Q_i に長さの成分を掛けた荷重の単位を有するものという意味である。ここで、

$$(V_n)_i = (Q_n)_i - \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial S}\right)_i = 0$$

の意義と対比して、自由辺上の節点 i での境界条件として、式(1)または式(2)の代りに

$$P_i = \Sigma \bar{F}_i - \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial S}\right)_i$$

または

$$\Sigma \bar{P}_i = \Sigma \bar{F}_i - \left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial S}\right)_i$$

を用いることが必要であることがわかる。ここで $(\partial M_{nt}/\partial S)_i$ は $(\partial M_{nt}/\partial S)_i$ に長さの成分を掛けた荷重の単位を有するものという意味である。いま、ねじりモーメントは節点で考えるのではなく節点 i をはさむ要素 I と要素 II で考えるものとして、それぞれのねじりモーメント $(M_{nt})_I$ と $(M_{nt})_{II}$ に対して、

$$\left(\frac{\partial M_{nt}}{\partial S}\right)_i = (M_{nt})_{II} - (M_{nt})_I$$

と表わされる。したがって、さきの条件式は

$$P_i \text{ (または } \Sigma \bar{P}_i) = \Sigma \bar{F}_i - \{(M_{nt})_{II} - (M_{nt})_I\}$$

となる。

(3) 単純支持辺

単純支持辺は、自由辺の特別な場合として、自由辺の条件に $d_i=0$ の条件を追加して考える。したがって、 $d_i=0$ の条件に対応して、支点反力が求まる。

(4) 自由隅

図-11を参照して、 $M_t=0$ 、 $M_m=0$ より節点 i の曲げモーメント和 M_i は、

$$M_i = \frac{1}{1+\nu} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \times \{M_{lr} - M_{mt}\}$$

となる。 M_{lr} 、 M_{mt} は d の関数として表わされるから、この式が曲げモーメント和とたわみとの関係式である。また自由辺の場合と同様に、作用外荷重と曲げモーメント和との関係式は次式

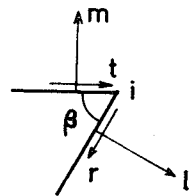


図-11

のように与えることができる。すなわち、

$$P_i \text{ (または } \Sigma \bar{P}_i) = \Sigma \bar{F}_i - \{M_{I_r} - M_{m_i}\}$$

$$= \Sigma \bar{F}_i - (1+\nu) \frac{\sin \beta}{\cos \beta} M_i$$

(5) 曲線の自由辺

自由辺上の節点 $i-1, i, i+1$ が円弧の上にあるものとする。節点 i の曲げモーメント和 M_i は $M_r=0$ より

$$M_i = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

となり、曲げモーメント和とたわみとの関係式が与えられる。また、力のつりあい条件式はつぎのように与えることができる。すなわち、

$$P_i \text{ (または } \Sigma \bar{P}_i) = \Sigma \bar{F}_i$$

$$- [(M_{r\theta})_{II} - (M_{r\theta})_I]$$

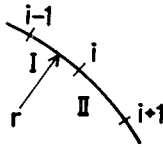


図-12

6. 計算例による解析法の精度の確認

(1) 解の収束性の検討

それぞれ2種類の縦横比を有する四辺単純支持および固定の長方形平板が、一様分布荷重または中央集中荷重を受ける場合の合計8ケースについて、おのおの4種類の分割数に対して計算を行ない、中央点のたわみの値の収束性を検討した。表-1は、その結果を表示したものである。

(2) 有限要素法による解析結果との比較

R.W. Clough と J.L. Tocher は有限要素法での板の曲げの解析に対して、これまでに提案されている種々のたわみ形状関数のうち、長方形要素に関して3つ、三角形要素に関して4つを選び、種々の問題について、それぞれの形状関数で解析し比較検討を行なっている¹⁾。

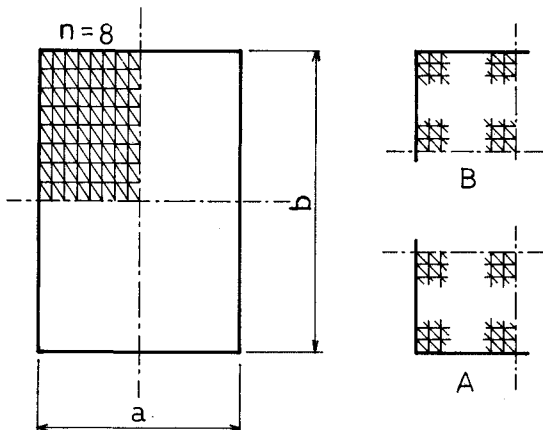


図-13

表-1 Nondimensional Deflection α at Center of Rectangular Plates under Various Conditions

Case	b/a	Edges	Load	Results by the Suggested Procedure				Exact Solution	
				n=2	n=4	n=6	n=8		
1	1	SS	U	A	2.82	3.68	3.88	3.95	4.06
				B	3.94	4.07	4.08	4.08	
2	2	SS	U	A	7.06	9.16	9.65	9.85	10.13
				B	10.07	10.25	10.22	10.19	
3	1	SS	C	A	8.63	10.38	10.91	11.14	11.60
				B	11.88	11.99	11.89	11.81	
4	2	SS	C	A	11.59	14.45	15.33	15.73	16.51
				B	16.23	16.93	16.89	16.82	
5	1	C	U	A	0.96	1.16	1.21	1.23	1.26
				B	1.13	1.24	1.26	1.26	
6	2	C	U	A	2.01	2.36	2.44	2.47	2.54
				B	2.43	2.55	2.55	2.55	
7	1	C	C	A	4.07	4.87	5.15	5.30	5.60
				B	4.66	5.56	5.67	5.68	
8	2	C	C	A	4.89	6.11	6.51	6.72	7.22
				B	5.37	6.90	7.20	7.28	

EDGES : SIMPLY SUPPORTED (SS) OR CLAMPED (C)
LOADING : UNIFORM (U) OR CONCENTRATED AT CENTER (C)

$$W_{max} = \alpha \frac{qa^4}{D} 10^{-3} \text{ or } W_{max} = \alpha \frac{Pa^2}{D} 10^{-3}$$

これまでに述べてきた解析方法は、Clough の論文で取り上げられている有限要素法とは本質的に異なっているのであるが、数値解析法という立場から有限要素法による解析結果と比較することは有意義なことであると考えられる。したがって、Clough の論文で扱われている問題のうち、正方形板のねじりの問題と平行四辺形片持板の問題について解析結果を比較する。Clough の論文では、それぞれのたわみ形状関数を、それを提案または誘導した研究者の頭文字によって区別している。これらの内容については、それぞれの文献にゆずり、ここでは結果だけを引用させていただいた。

a) 正方形板のねじり

図-14に示すように、正方形板の三隅を単純支持し、残りの一隅に集中荷重を作用させた純ねじりの問題に対して、7種類の要素分割法で計算を行ない、Clough の結果と比較した。

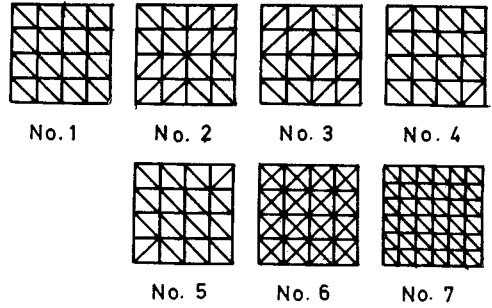
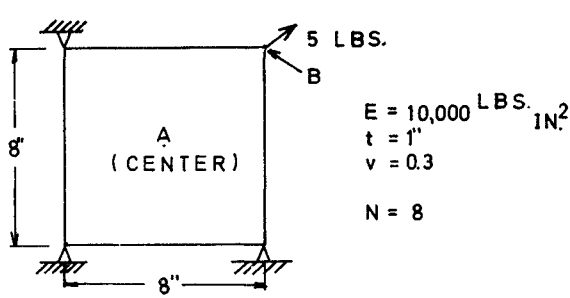
b) 平行四辺形片持板

図-15に示すように、45°の斜角を有する平行四辺形片持板に一様分布荷重が作用する場合について計算を行ない、Clough の結果と比較した。

(3) 周辺単純支持平行四辺形板

L.S.D. Morleyは一様分布荷重を受ける周辺単純支持平行四辺形板についてくわしく解析を行なっている²⁾。

その一つは差分法によるもので、種々の斜角に対してメッシュ・サイズを細かくすることによって解の収束性を検討したものである。この場合には、平行四辺形が扁平になるにしたがって、一定の解に収束する早さが悪く



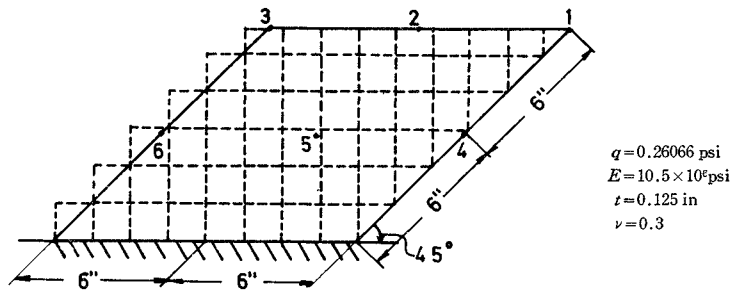
Element Type	Deflection at	
	A	B
ACM	0.06244	0.24972
M	0.06252	0.24998
P	0.05552	0.22208
A	0.04154	0.13897
T	0.06279	0.25830
T-10	0.04848	0.31391
HCT	0.06254	0.25002
Exact	0.06240	0.24960

Element Division	Deflection at	
	A	B
No. 1	0.06240	0.24960
No. 2	0.06240	0.24960
No. 3	0.06240	0.24960
No. 4	0.06240	0.24960
No. 5	0.06240	0.24960
No. 6	0.06240	0.24960
No. 7	0.06240	0.24960
Exact	0.06240	0.24960

By the Finite Element Method (From Clough's¹¹)

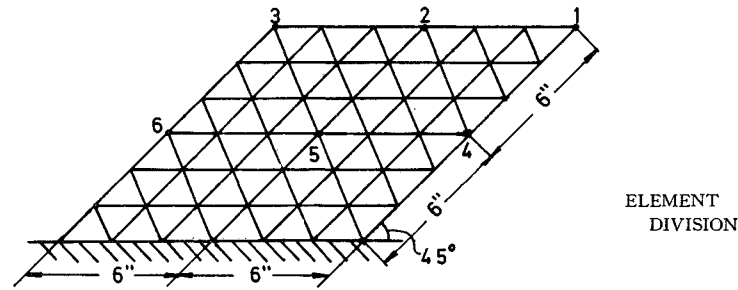
By the Suggested Procedure

図-14 Twisting Deflections in Square Plate



Element Type	Deflection at					
	1	2	3	4	5	6
ACM	0.2962	0.1979	0.1135	0.114	0.052	0.0197
M	0.2938	0.1965	0.1181	0.113	0.051	0.0198
P	0.2786	0.1874	0.1155	0.108	0.050	0.0210
A	0.2565	0.1702	0.1048	0.1057	0.0467	0.0203
T	0.2784	0.1835	0.1046	0.1105	0.0471	0.0158
T-10	0.4211	0.2959	0.1990	0.1710	0.0821	0.0435
HCT	0.2814	0.1879	0.1108	0.1112	0.0491	0.0182
Experiment	0.297	0.204	0.121	0.129	0.056	0.022

By the Finite Element Method (From Cough's¹¹)



		Deflection at			
1	2	3	4	5	6
0.2992	0.2004	0.1169	0.1222	0.0536	0.0193

By the Suggested Procedure

図-15 Deflection of Uniformly Loaded Rhombic Cantilever

なり、ある角度を越えると、必要な精度の解を得るために要する連立方程式の数が非常に大きくなって、実際には必要な精度の解を得ることが不可能になる場合が起こることを指摘している。

Morleyのもう一つの研究は、極座標による級数解の形でこの問題を扱ったものである。その解析結果を表-2に示し、結果の比較を行なった。

解析に用いた要素の分割法は図-16に示すとおりで、対称性を考慮して対象の1/4について計算を行なった。

表-3は $\alpha=30^\circ$ の場合の中央点のたわみおよび主曲

表-2 Displacement and Principal Bending Moments at the Centre of Uniformly Loaded and Simply Supported Rhombic Plates

(A) from the suggested procedure

degrees	c	d	e
85	3.95	5.07	4.86
80	3.81	5.07	4.67
60	2.52	4.42	3.42
50	1.70	3.74	2.62
40	0.963	2.89	1.81
30	0.416	1.94	1.06

(B) from the series solution by Morley²⁾

degrees	c	d	e
85	4.01	4.86	4.66
80	3.87	4.86	4.48
60	2.56	4.25	3.33
50	1.72	3.62	2.58
40	0.958	2.81	1.80
30	0.408	1.91	1.08

$$W_{\max} = c \frac{qa^4}{D} 10^{-3}, M_{\max} = dqa^2 10^{-2}, M_{\min} = eqa^2 10^{-2}$$

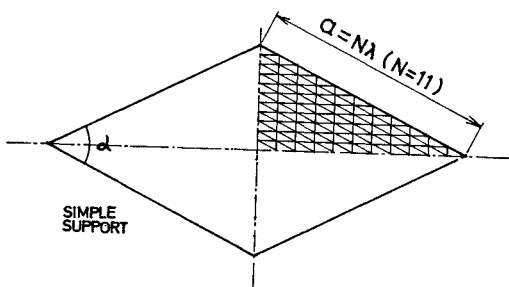


図-16

げモーメントの値について各種の差分解による結果を比較したものである。

また、Morleyは $\alpha=30^\circ$ の場合について、級数解によって対象の短い方の対角線上の曲げモーメントを求めグラフに与えている。そこで $N=11$ と $N=14$ の場合について、同じ対角線上の曲げモーメントを計算し比較したものが図-17である。

(4) 中央集中荷重を受ける弾性基礎上の円板

文献に H. Hertz が扱った弾性基礎上の円板の問題について解説されている³⁾。その内容は省略し、与えられている結果について比較を行なう。

a) 円板の半径 $a=5$ in., $l = \sqrt[4]{D/k} = 5$ in., $P/8\pi kl^3 = 102 \times 10^{-5}$ の場合

たわみについて Hertzの結果と比較したものが表-4である。

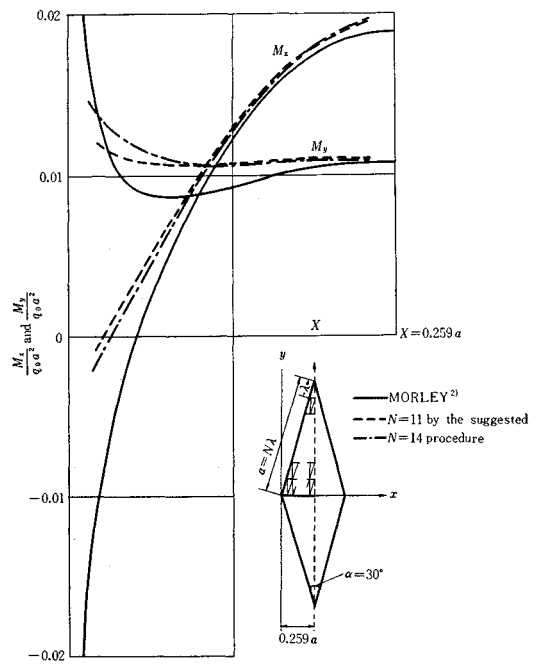


図-17

表-3 $\alpha=30^\circ$ に対する種々の差分解の比較

	Total number of internal nodal points	$w_{\max} = c \frac{eq_0 a^4}{D} 10^{-3}$	$M_{\max} = d q_0 a^2 10^{-2}$	$M_{\min} = e q_0 a^2 10^{-2}$
		c	d	e
Morley (1961) $\nu=0.3$	series solution	0.408	1.91	1.08
Morley (1961) $\nu=0.3$	225	0.384	1.92	0.981
Jensen (1941) $\nu=0.2$	9	0.497	1.93	1.02
Favre (1943)	9	0.309	—	—
Suggested Procedure	221	0.416	1.94	1.06

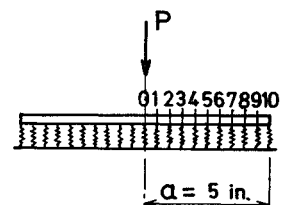


図-18

表-4 Deflection $W(\times 10^{-5})$ in.

No. of Points	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Results by the suggested procedure	43.34	43.19	42.88	42.49	42.06	41.61	41.16	40.72	40.29	39.87	39.47
Hertz ³⁾	43.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	39.1

表-5 Deflection and Bending Moments of a Circular Plate on Elastic Foundation Loaded at the Center
 $W = \alpha \times (P^2/D)$, $M = \beta P$ (from the suggested procedure)

$x=r/l$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
α	0.1248	0.1077	0.0796	0.0537	0.0332	0.0185	0.0087	0.0023	-0.0019	-0.0050	-0.0076
$\beta (M_r)$	—	0.0783	0.0130	-0.0096	-0.0168	-0.0161	-0.0123	-0.0078	-0.0040	-0.0013	—
$\beta (M_\theta)$	—	0.1136	0.0572	0.0294	0.0146	0.0046	0.0014	0.0004	0.0005	0.0008	—

b) 円板の半径 $a=100$ cm

板の弾性係数およびポアソン比

$$E=2.184 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu=0.3$$

板厚 $h=2.0$ cm

地盤係数 $k=10.0 \text{ kg/cm}^3$ の場合

変位および曲げモーメントを計算した結果を表示したものが表-5である。

この場合は $l = \sqrt[3]{D/k} = 20.0$ cm であり、したがって

$a/l=5.0$ であるが、この結果を無限板の中央に集中荷重が作用したときの理論解と比較したものが図-19である。

(5) 周辺固定の変厚円板

文献に図-20に示したような周辺固定の変厚円板の解析結果が与えられている³⁾。

いま、個々の三角形要素は板厚が一定であるものとして、その板厚を三角形要素の重心の位置に対応する厚さに定め、対象をそのような等厚の三角形要素によって構成されるモデルに置き換えて、一様分布荷重を受けるものと、中央集中荷重を受けるものについて、それぞれ $b/a=0.6, 0.8, 1.0$ の三通りの場合を解析し、結果を比較したものが表-6である。

7. 測定結果との比較

ここに提示した解析法によって、どの程度実際問題を評価し得るかを確認するために、点支承を持つ平行四辺形板の模形実験を行ない、得られた測定結果と解析結果を比較して検討する。

試験体製作材料はアルミ合金で、測定は各支点の支点反応の影響面および各点に集中荷重が作用した場合の応力分布を求めることを主眼として行なった。

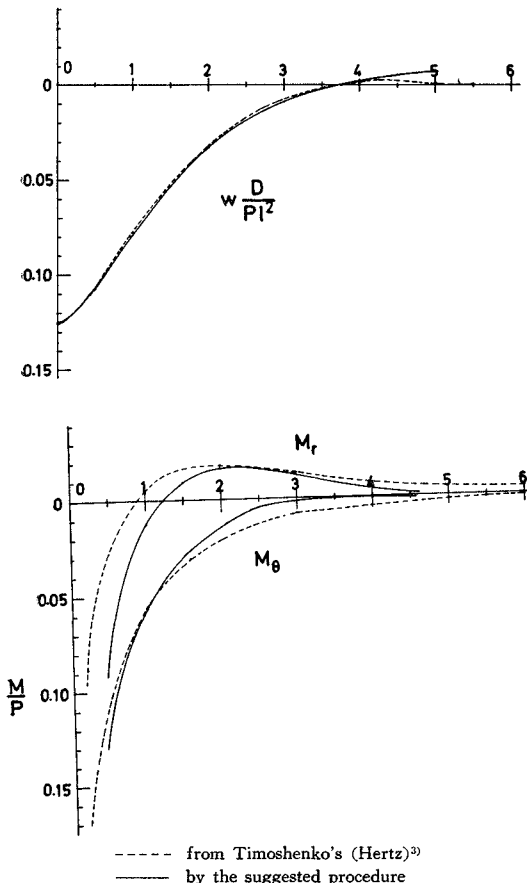


図-19 Deflection and Bending Moments of a Circular Plate on Elastic Foundation Loaded at the Center

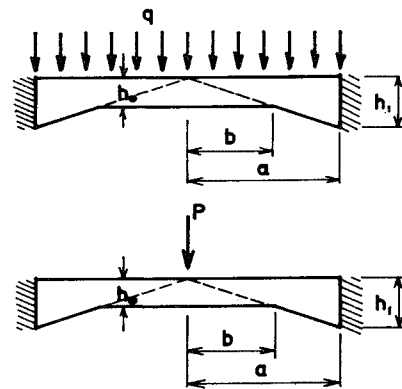


図-20

表-6 (a) Deflections and Bending Moments of Clamped Circular Plates Loaded Uniformly $\nu=0.25$

$\frac{b}{a}$	$W_{max} = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_r = \beta qa^2$			$M_t = \beta_1 qa^2$		
		$r=0$ β	$r=b$ β	$r=a$ β	$r=0$ β_1	$r=b$ β_1	$r=a$ β_1
0.6	0.094	0.0543	-0.0188	-0.149	0.0543	0.0149	-0.037
0.8	0.148	0.0709	-0.0591	-0.140	0.0709	0.0009	-0.035
1.0	0.176	0.0781	-0.125	-0.125	0.0781	-0.031	-0.031

(From the Timoshenko's²⁾)

$\frac{b}{a}$	$W_{max} = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}$	$M_r = \beta qa^2$			$M_t = \beta_1 qa^2$		
		$r=0$ β	$r=b$ β	$r=a$ β	$r=0$ β_1	$r=b$ β_1	$r=a$ β_1
0.6	0.1031	0.0604	-0.0169	-0.1465	0.0633	0.0208	-0.0288
0.8	0.1496	0.0755	-0.0585	-0.1235	0.0793	0.0033	-0.0243
1.0	0.1749	0.0825	-0.1127	-0.1127	0.0866	-0.0222	-0.0222

(Results by the Suggested Procedure)

表-6 (b) Deflections and Bending Moments of Clamped Circular Plates under a Central Load $\nu=0.25$

$\frac{b}{a}$	$W_{max} = \alpha \frac{Pa^2}{Eh^3}$	$M_r = \beta P$		$M_t = \beta_1 P$	
		$r=b$ β	$r=a$ β	$r=b$ β_1	$r=a$ β_1
0.6	0.155	-0.050	-0.096	-0.044	-0.024
0.8	0.203	-0.063	-0.084	-0.057	-0.021
1.0	0.224	-0.080	-0.080	-0.020	-0.020

(From the Timoshenko's²⁾)

$\frac{b}{a}$	$W_{max} = \alpha \frac{Pa^2}{Eh^3}$	$M_r = \beta P$		$M_t = \beta_1 P$	
		$r=b$ β	$r=a$ β	$r=b$ β_1	$r=a$ β_1
0.6	0.1632	-0.0487	-0.1065	-0.0160	-0.0210
0.8	0.2043	-0.0626	-0.0847	-0.0010	-0.0167
1.0	0.2230	-0.0767	-0.0767	-0.0151	-0.0151

(Results by the Suggested Procedure)

測定および解析を行なった対象は 図-21 に示した 2 種類である。解析に用いた弾性係数およびポアソン比の値は、実験を行なった試験体製作材料より採取した 1 号引張試験片の引張試験結果より得られた値 $E=0.762 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\nu=0.3$ を用いた。

以下に支点反力の影響面および主応力分布について、測定結果と解析結果を比較した図を各試験体ごとにまとめて列挙する。なお、応力測定点および解析のための要素分割は 図-22 に示したとおりである。

(1) 四隅を点支持された平行四辺形板

Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Theoretical]

Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Experimental]

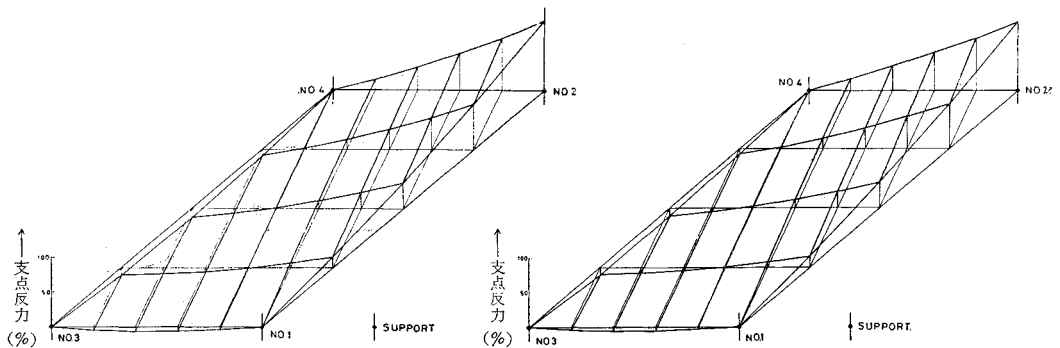


図-23

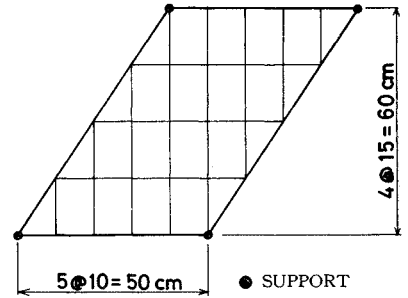


図-21 (a) 四隅を点支持された平行四辺形板

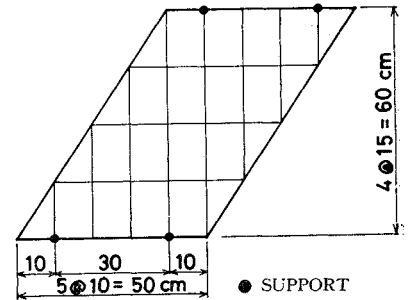


図-21 (b) 二辺を 2 点ずつで支持された平行四辺形板

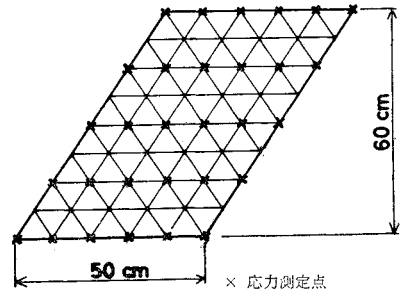


図-22

Influence Surface of Reaction of Support No. 4 [Theoretical]

Influence Surface of Reaction of Support No. 4 [Experimental]

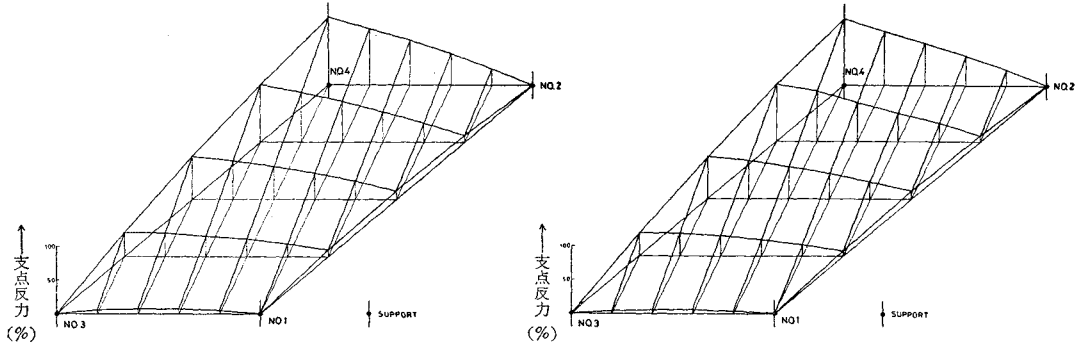


図-24

Principal Moment Distribution [Theoretical]

Principal Moment Distribution [Experimental]

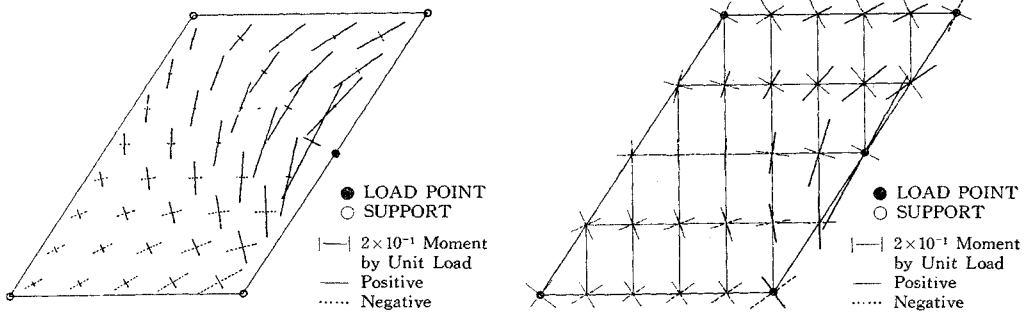


図-25

Principal Moment Distribution [Theoretical]

Principal Moment Distribution [Experimental]

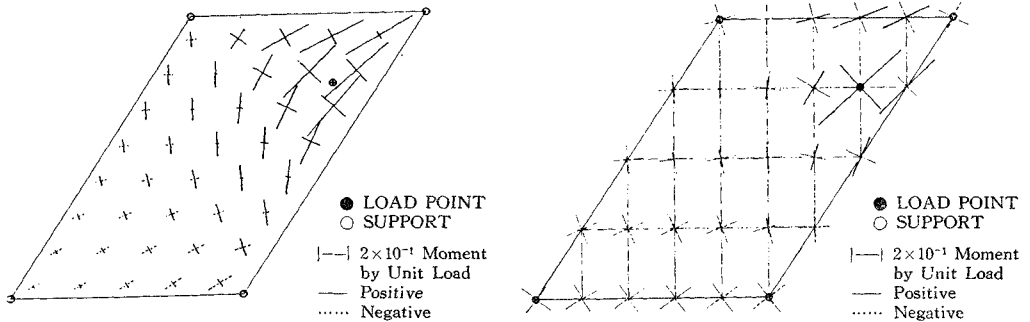


図-26

Principal Moment Distribution [Theoretical]

Principal Moment Distribution [Experimental]

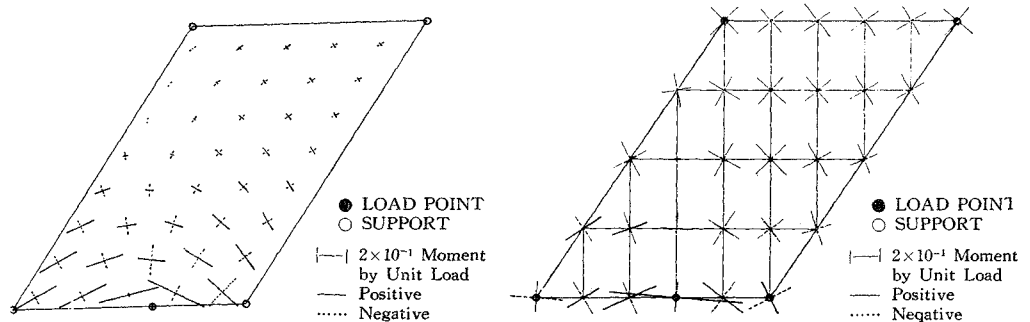
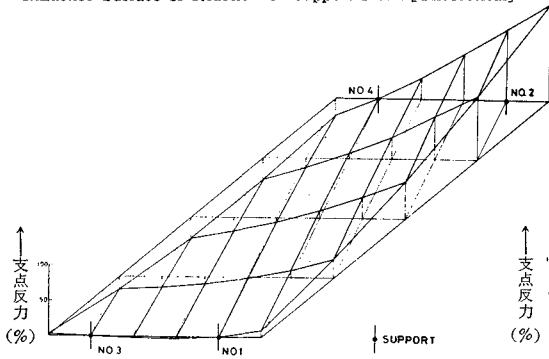


図-27

(2) 二辺を二点ずつで支持された平行四辺形板

Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Theoretical]



Influence Surface of Reaction of Support No. 2 [Experimental]

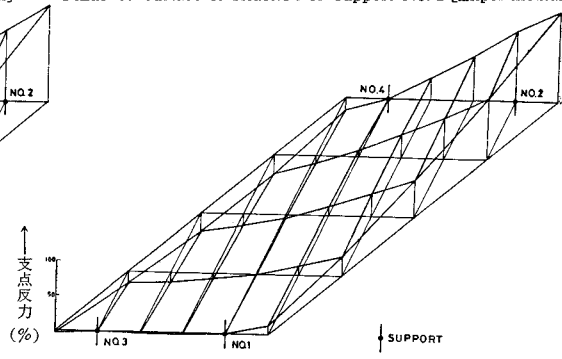
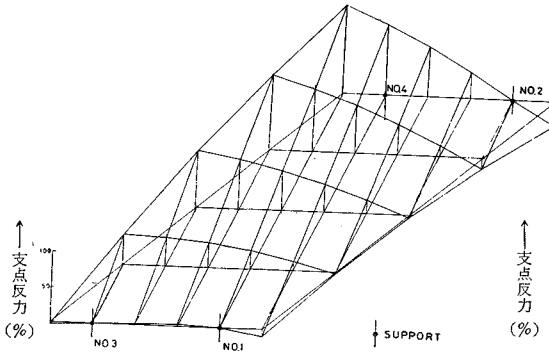


図-28

Influence Surface of Reaction of Support No. 4 [Theoretical]



Influence Surface of Reaction of Support No. 4 [Experimental]

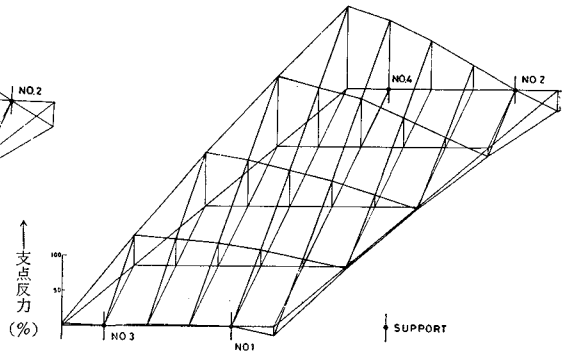
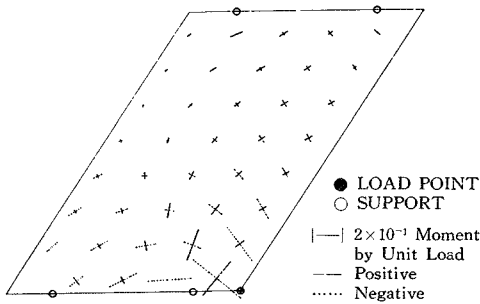


図-29

Principal Moment Distribution [Theoretical]



Principal Moment Distribution [Experimental]

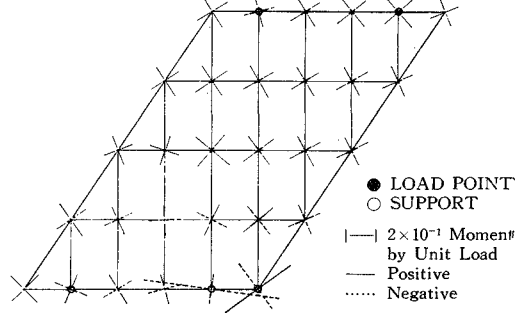
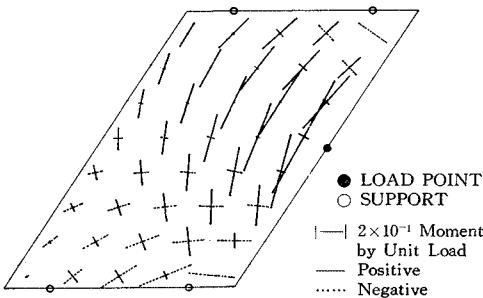


図-30

Principal Moment Distribution [Theoretical]



Principal Moment Distribution [Experimental]

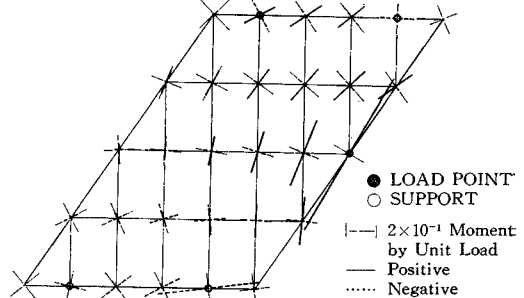
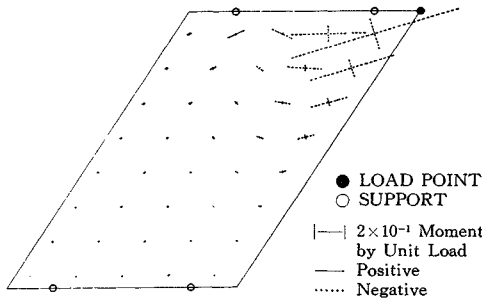


図-31

Principal Moment Distribution [Theoretical]



Principal Moment Distribution [Experimental]

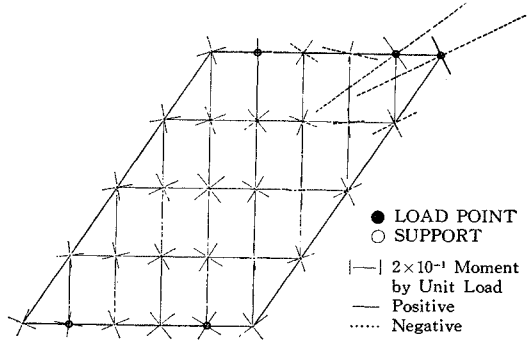


図-32

8. 六点で支持された S 字形の板の解析

ここに取り上げた問題は、従来解析が困難であった点支承を持つ S 字形の板のような問題も、ここに提示した解析法によって容易に解析できることを示すことを目的として選んだものである。解析結果より、一様分布荷重下の主モーメント分布図をここに示す。

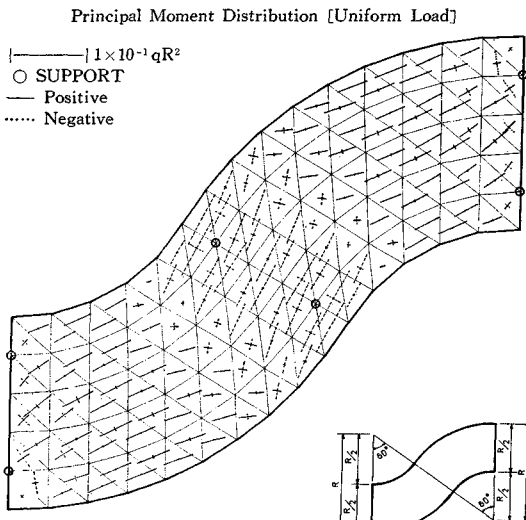


図-33

9. 考 察

表-1 に結果を示した矩形板の解析の際には、対象の対称性を考慮して全体の 1/4 を扱っているために、(A) では全体を 図-34 (a) のような分割で考えていることになり、他の節点に比べて中央点の支配領域が小さく、また中央の要素は二辺がたわみ角を拘束されるので、この要素だけが非常に拘束度が高くなる。また、(B) では、図-34 (b) のような分割で解析していることになり、中央節点の支配領域が他の節点にくらべて大きくなり、

そのために節点 $i-1$ と i との間で紹介する誤差が大きくなる。すなわち、対称性を考慮して全体の 1/4 で解析したために、中央節点の変位の誤差は他の節点の変位の誤差にくらべて特に大きくなっているのである。したがって、表-1 に示された値は、このような特性に大きく影響されているので、解析法の全体的精度というよりはむしろ、上記のような局所的な要素の境界条件などの扱い方の精度をより大きく反映していることになる。たとえば、図-35(a) のように対象を一様に分割して全体を解析するか、または、1/4 を扱うにしても 図-35 (b) のような分割をすると、その未知節点数に対してたわみの精度がずっとよくなることを確認されている。

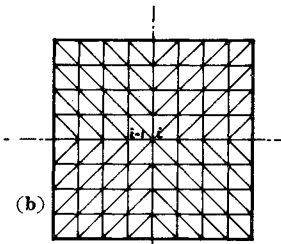
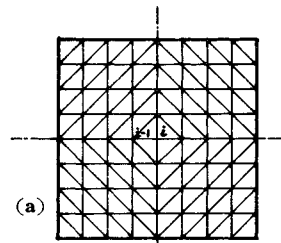


図-34

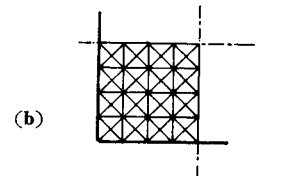
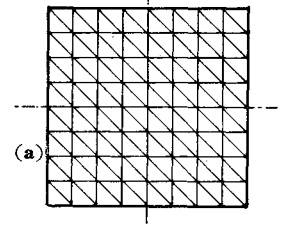


図-35

また同様な理由で、図-17 に示した周辺単純支持斜板の応力解析の結果においても、中央点の曲げモーメントの値は、その隣りの節点の値と連続的な値が得られず、中央点の値は割愛せざるをえなかった。このような点に関しては、もう一方の対角線を加えて要素を

分割すると、よい結果が得られる。

このような問題点がある一方、正方形板のねじりの問題では、図-14 に示したように種々の分割法に対してすべて正解が得られている。これは、具体的な解析の結果から偶然確認された事実であるが、この例題のように、点支承を持ち集中荷重を受けるような問題に対しては、このような解析法によって正解が得られる場合があることは注目すべきであって、とくにこれまでの解析法では、境界条件におけるねじりの評価が重大な障害となっていることを考えれば、ねじれの問題に対して正しく評価できるということは、本解析法の持つ大きな特質であると考えることができる。表-3 に示した周辺単純支持平行四辺形板の Morley の差分解を見て分るように、 $\alpha=30^\circ$ の場合には、正解と考えることができる Morley の級数解 (表-2) とくらべてかなりの誤差がある。したがって本方法による解が普通の差分解より精度がずっとよいことが明らかである。また、図-17 に示した $\alpha=30^\circ$ の場合の短対角線上の曲げモーメントの値の比較のグラフを見て、このような解析法では、局所的な曲げモーメントを評価することがかなり困難であることがわかる。その原因は、本解析法ではその節点の支配領域の平均曲げモーメントの値を評価しているからである。また、曲線の境界も支障なく扱うことができるので、そのような条件を有する問題として、中央集中荷重を受ける弾性基礎上の円板を選び、その解析結果を比較したものが表-4 であり図-19 である。その結果、この解析法が非常に精度よくこのような問題の変位や曲げモーメントを評価していることが認識される。

周辺固定の変厚円板によって変厚板の問題を扱ってみたが、連続して板厚が変化している対象を各要素は等厚で階段状に厚さが変わる板に置き換えてモデル化するという点や、またこのようにしてモデル化したものに対する境界条件などの考え方に変厚であることをどのように解釈して考慮するかといった点に重要な問題が内在し、たとえば、二、三の要素の間で板厚が極端に変わるような問題に対してはあまりよい精度が得られなかった。しかし、板厚が徐々に変化するような問題に対して、ある程度分割を細かくすれば変厚板の問題もかなりの精度で評価できることが確認されている。

これまでの解析結果から、本方法に残された問題点は、得られたたわみ系から曲げモーメントを分離する方法である。すなわち、モーメントの計算値について不連続性が認められる。たとえば、図-36 の三角形要素 A のモーメントの計算に関する影響領域と三角形要素 B の影響領域に示されるように、要素 A, B は隣接した要素でありながら、それぞれ異なった特定の方向の弯曲が強調され、モーメントの計算値に不連続性を示してしまう。

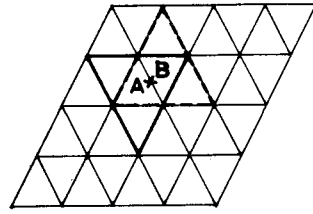


図-36

この解決策として A, B 二つの要素の平均値を取って二つの要素によって構成される四辺形の重心の位置のモーメントの値を評価するといった

方法が考えられる。しかし、このような方法をとる場合には、ある点の曲げモーメントを評価するために、かなり広い領域が影響するために、その間に反曲点などが存在すれば、その結果から得られる値は信頼性が薄くなってしまふ。それゆえに、ある程度以上の精度を得るためには、それ相当の細かい分割が必要になる。また、同様の理由から正三角形に近い要素によって比較的規則的に構成される場合には精度よく曲げモーメントを評価できるが、鈍角三角形の要素などでは、ずっと精度が悪くなる。また、図-36 のように規則的な平行線で構成されるような場合は、変位系が得られた後に、新たに差分法によってモーメントを計算するなどの方法をとることもできる。測定結果との比較の項に示した平行四辺形板の解析において、応力は各要素の平均応力といった形で求め、測定は図-22 に示したような格子の交点で行なったため、正しい対応はできないが、全体的な応力分布の特性は、はっきり捉えており、測定結果と比較して、このような解析によって十分な精度で実際問題を評価し得ることがわかる。とくに、支点反応の影響面に関しては、ほぼ完全な解が得られている。

10. おわりに

この論文をまとめるにあたって、ご指導戴き、また、その都度適切なご助言を戴きました奥村敏恵教授に心から感謝致します。また、その間、佐藤暢彦、松本徳久、前野陽治、窪田元仮、芹沢影清、伊藤邦興、山田健一の各氏および安田和枝さんには、実験や資料の整理など研究の過程において直接、間接に絶大なご支援を戴きました。ここに心から感謝の意を表します。

参考文献

- 1) R.W. Clough and J.L. Tocher: Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plates in Bending, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965 (October).
- 2) L.S.D. Morley: Skew Plates and Structures, Pergamon Press, 1963.
- 3) S.P. Timoshenko & S.W. Krieger: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959. (1969.3.6・受付)