

# 円柱状ぜい性材料供試体の一軸圧縮試験における加圧面拘束が変形状態および圧縮強度におよぼす影響について

## ON THE EFFECT OF END RESTRAINT OF CYLINDRICAL BRITTLE SPECIMEN ON ITS STATES OF DEFORMATION AND COMPRESSIVE STRENGTH

梶田 建夫\*・秋本 昌胤\*\*・川本 眺万\*\*\*  
By Tateo Kajita, Masatugu Akimoto and Toshikazu Kawamoto

### 1. 緒 言

モルタル、コンクリートや岩石などのぜい性材料の円柱供試体による一軸圧縮試験において、圧縮強度に影響を与える条件としては、供試体の縦横比、供試体の大きさ、圧縮試験機の加圧板と供試体の加圧面との間の接触状態、荷重速度などがあげられる。このような試験条件を一定に保つことは、圧縮強度を求めるために必要なことである。

このうち、試験機の加圧板と供試体の加圧面との摩擦については、一定に保つことが困難であるとともに、得られた圧縮強度への摩擦の影響を正確に知ることも困難である。この圧縮強度への摩擦の影響については、得られた圧縮強度を補正するための係数が R. Hill により計算されている<sup>1)</sup>。その場合、応力が軸方向に変化せず、半径方向と接線方向の応力が等しいとして、応力のつりあい式を解き、Von Mises の降伏条件を用いている。

供試体の加圧面は、上にあげた摩擦による半径方向へのふくらみの拘束を受けているほかに、通常の一軸圧縮試験の場合に仮定されるように等分布荷重を受けているのではなく、等変位の変形を受けていると考えられる。このような問題を弾性論的に取り扱うことは、一般に困難であるが、加圧面が完全に拘束され、等分布荷重をうける場合の解析については、L.N.G. Filon の式を用いた数値計算が木村によって行なわれている<sup>2)</sup>。供試体の加圧面の拘束状態により、圧縮強度、破壊形状がかなり

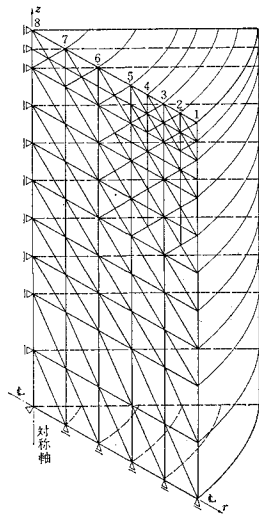
の影響を受けることが当然考えられるが、この問題については、接触面に潤滑剤を入れて摩擦を減じた実験<sup>3)</sup>や、加圧面付近に鋼の輪をはめて半径方向へのふくらみを拘束した実験<sup>4)</sup>などが行なわれ、加圧面の拘束の大小による圧縮強度、破壊形状の比較が行なわれている。

最近、種々の問題に適用されている有限要素法は、上に述べたような変位で境界条件が与えられるような問題や、非線形を考慮するような問題に対して、比較的容易に取り扱うことができる解法である。ここでは、まず、円柱状供試体を線形弾性の軸対称体とし、有限要素法を用いて、加圧面の種々の条件のもとでの供試体内の応力、ひずみ、せん断ひずみエネルギー分布などを求めた。加圧面の条件としては、等分布荷重を与えた場合、および、軸方向に等変位を与えた場合のそれぞれに対して、加圧面の半径方向の変位を完全に拘束した場合、摩擦抵抗を考慮した場合、拘束をなくした場合などを取り扱った。つぎに、破壊前の供試体内の応力状態を求めるため、応力とひずみの非線形関係を考慮した非線形解析を行なった。この非線形解析では、漸増法、および、反復法を用い、両者による結果を比較検討した。数値解析とは別に、加圧面を拘束した場合、拘束をなくした場合に対して、モルタル供試体について一軸圧縮試験を行ない、破壊までの供試体表面におけるひずみ分布、圧縮強度、見かけの弾性係数、および、破壊形状を調べて、有限要素法による結果と対比した。

### 2. 弾性領域における変形、応力状態およびエネルギー分布

一般にモルタルなどのぜい性材料の一軸圧縮試験によって求められた応力-ひずみ関係は非線形性を示す

\* 学生員 工修 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻博士課程在学  
\*\* 正会員 工修 名古屋大学助手 工学部土木工学教室  
\*\*\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学教室



図一1 円柱供試体のモデル化

が、応力の小さい範囲ではその関係は直線的であるとみなせる。いまこのように材料が線形弾性性質を示す範囲での円柱供試体の変形、応力状態、および、エネルギー分布などを軸対称問題に対する有限要素法<sup>5)</sup>を用いて計算する。図一1に示すように高さ  $h=30$  cm, 直径  $d=15$  cm の円柱供試体の  $1/4$  の領域を考え、それを三角形断面の軸対称要素に分割し、各節点における半径方向、および、軸方向の節点変位と節点力をそれぞれ  $u_r$ ,  $u_z$ , および、 $F_r$ ,  $F_z$  で表す。なお、加圧面上の節点に関する量に添字  $u$  を用いるものとする。ここでは、つぎのような荷重、および、境界条件のもとで解析を行ない、端面拘束が供試体の応力、変形におよぼす影響について比較検討する。

(1) 加圧面の半径方向変位を固定し、軸方向に単位変位を与える。すなわち、 $\{u_r^u\}=0$ ,  $\{u_z^u\}=\{I\}$ 。

(2) 加圧面の半径方向変位を自由とし、軸方向変位を単位変位とする。すなわち、 $\{u_r^u\}=\{I\}$ 。

(3) 加圧面の半径方向変位を固定し、軸方向に単位荷重を作用させる。すなわち、 $\{u_r^u\}=0$ ,  $\{F_z^u\}=[P_1, P_2, \dots, P_i]^T$ 。

ここで  $P_i$  は加圧面に等分布荷重  $p=1$  kg/cm<sup>2</sup> を与えたときのそれに等価な各節点外力で、 $\Sigma P_i = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$  である。

(4) 加圧面の半径方向変位を自由とし、軸方向に単位荷重を作用させる。すなわち、 $\{F_z^u\}=[P_1, P_2, \dots, P_i]^T$ 。

(5) 加圧面に単位の軸方向変位  $\{u_z^u\}=\{I\}$  を与え、半径方向変位に対しては摩擦による拘束を考える。

通常の軸圧縮試験における加圧面の状態は、(1) と (2) との条件の間、すなわち、(5) の条件に相当し、

かなり (1) の条件に近いことが考えられる。(3), (4) の条件での実験は困難であるが、(1) と (2) の条件に対応させるために考慮したものである。

(1) 摩擦を考慮しない両極端の場合

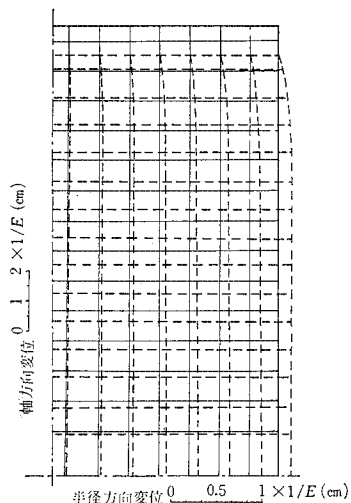
(1)~(4) の条件のように加圧面の半径方向拘束が無限大(固定)か零(自由)の両極端の場合の計算結果を示すとつぎのようである。計算より得られるものは、各節点の  $r, z$  方向の変位、各要素の重心における応力成分  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ , および、主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  とせん断ひずみエネルギーである。せん断ひずみエネルギーは  $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$  より二つの主応力  $\sigma_1, \sigma_2$  を求め、 $\sigma_\theta = \sigma_3$  として、次式

$$W_s = \frac{1}{12G} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} \dots\dots\dots (1)$$

より求められる。

(2), (4) の条件(加圧面の半径方向拘束がない場合)では、変位はポアソン比分だけ一様に半径方向にふくれ出し、応力は各要素ですべて等しくなる。これに対して(1), (3) の条件(半径方向変位を完全拘束)の場合の供試体の変形状態は図一2に示すようになる。また、加圧面における応力状態を示すと図一3のようである。応力は加圧面を拘束することにより、加圧面周辺で大きく集中するが、(3) の条件では加圧面の軸方向変位の拘束が少ないため、(1) の条件より小さい値となる。図一4にせん断ひずみエネルギーの分布を示す。(1), (3) どちらの条件でも、加圧面周辺と、内部の中心線上に大きな値を生ずる。

(2) 摩擦による拘束を考慮した場合



図一2 境界条件(1)で加圧面の軸方向変位  $u_z^u = 1/E$  (cm) の場合の供試体の変形状態

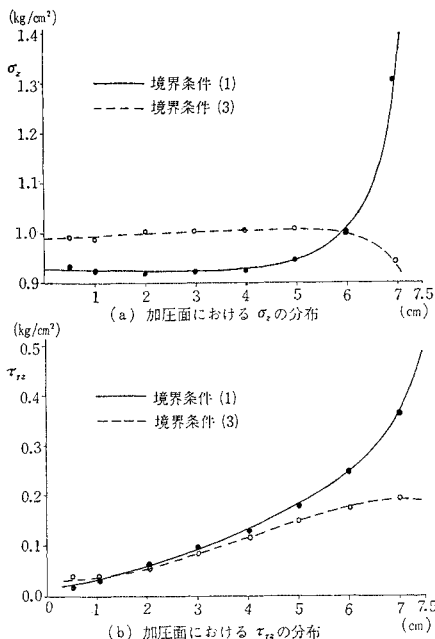


図-3 供試体 (15 cm  $\phi$  x 30 cm) の加圧面における半径方向変位を完全に拘束した場合の加圧面の応力分布

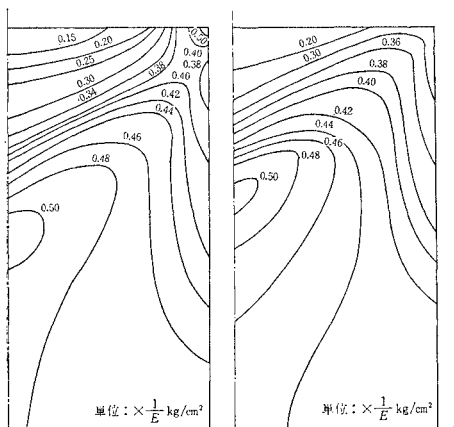


図-4 加圧面の半径方向変位を完全に拘束した場合の供試体内のせん断ひずみエネルギー分布

加圧面と軸方向変位に伴っておころうとする半径方向への変位は、加圧面と供試体との間の摩擦によってある程度拘束されるが、この摩擦による拘束の程度をどのようにモデル化して表現するかが問題となる。ここではつぎのような計算過程を考えた。まず、半径方向変位を固定した場合の加圧面の各節点における半径、軸方向の節点力を計算し、半径方向節点力と軸方向節点力の比が一定値（摩擦係数に相当する） $f$  以上である節点については、この節点の半径方向変位を自由として、摩擦による

抵抗力を節点に作用させる。この摩擦抵抗力  $F_f$  をつぎのように仮定する。

$$F_{fi} = A_i \cdot k \cdot u_{ri}$$

ここで、 $k$  は定数、 $A_i$  は各節点の影響面積である。したがって、この場合の供試体の節点変位と外力との関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} F^u \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r^u \\ r \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\{F^u\}$ 、 $\{r^u\}$  は加圧面上の節点の外力、変位をあらわし、 $\{F\}$ 、 $\{r\}$  はそれ以外の節点の外力、変位をあらわす。このように摩擦による剛性行列の修正を行なった後、通常解析を行ない、その結果、半径、軸方向節点力の比がまだ一定値  $f$  以上である節点があれば、半径方向変位を自由とする節点を変えて計算を続ける。

$k=0$  の場合には、節点の半径方向変位は摩擦の影響をうけず、完全に自由となり、 $k=\infty$  の場合には、完全に固定されるが、実際の摩擦による拘束を表現する  $k$  の値は  $0$  と  $\infty$  の間の定数である。なお、一般に摩擦による拘束度が節点外力あるいは節点変位に対して非線形の場合も考えられ、その場合には加圧面変位増分に対する逐次解析を行なう必要がある。しかし、ここでは一応  $k$  の値は節点変位に無関係に一定であるとし、摩擦抵抗を表わす  $k$  の値が、供試体の応力や変位状態におよぼす影響について調べた。いま、 $f$  および  $k$  を一定と考え、ある載荷状態における円柱供試体（以下の計算では、実験モデルに等しく、直径  $d=10 \text{ cm}$ 、高さ  $h=20 \text{ cm}$  の寸法のもの）を計算の対象にする）内の応力、および、ひずみの終局状態を解析する場合には、上述のように逐次加圧面上の節点の半径方向変位の固定をはずして、節点変位の安定する状態まで解析を続ければよい。しかし、ここでは、載荷状態が一定 ( $\{u_z^u\} = \{I\}$ ) のもとで、 $f$  の種々の値の場合を考え、それに相当して、加圧面周辺（加圧面の水平変位を固定した場合、この位置で半径、軸方向節点力の比は最大となる）から適当個数の節点で固定がとかれてすべるものとして、近似的に各終局段階での計算を行なった。供試体の弾性係数を  $E_0 = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  とし、 $k = 1.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  とし、加圧面上で周辺からそれぞれ 1 個、2 個、および 4 個の節点の固定がはずされた場合と、加圧面上の全節点の固定がはずされた場合について計算した結果を示すと、図-5 のようである。図-5 には加圧面での軸方向主応力  $\sigma_z$  とせん断応力  $\tau_{rz}$  の分布が示されており、これより、 $\sigma_z$  は加圧面の半径方向変位が固定された場合も、摩擦抵抗を考えた場合でもあまり変化しないが、せん断応力  $\tau_{rz}$  は、摩擦抵抗を考えることにより、固定の場合より加圧面周辺

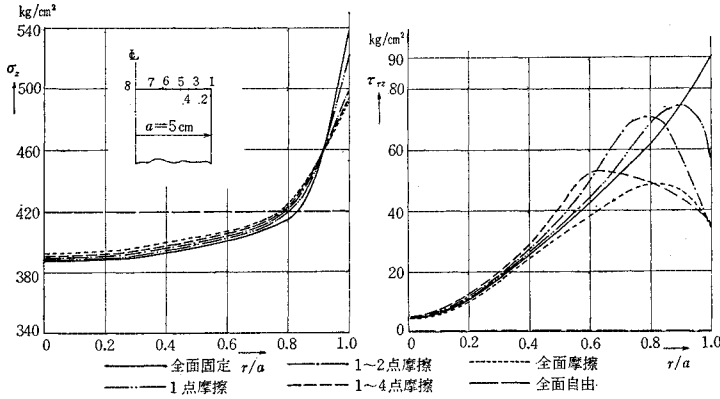


図-5 加圧面の摩擦の作用範囲と応力分布の関係 ( $u_z^u=0.02\text{ cm}$ ,  $k=1.0 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$ )

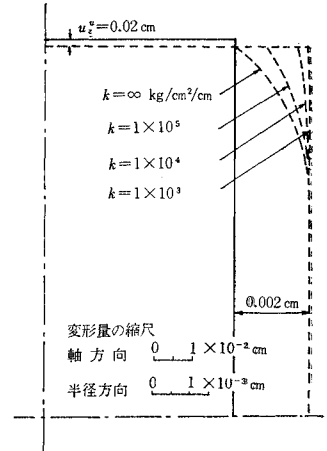


図-6 加圧面の摩擦抵抗係数  $k$  と供試体側面の半径方向変形状態の関係 ( $u_z^u=0.02\text{ cm}$ ,  $E_0=2.1 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.2$  の場合)

で値が小さくなることわかる。つぎに、供試体の弾性係数を  $2.1 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$  とし、 $k$  の値を、(a)  $k=1.0 \times 10^3\text{ kg/cm}^2$ 、(b)  $k=1.0 \times 10^4\text{ kg/cm}^2$ 、(c)  $k=1.0 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$  として加圧面上の節点全部の固定がとかれ、摩擦力が作用する場合の解析を行なった。その結果、それぞれの供試体の変形状態を示すと図-6 のようである。(a) では拘束の影響がほとんどなく、供試体内の応力や変位状態は一様で、加圧面の水平方向変位を自由とした場合とほぼ同じ状態となり、(b) では拘束の影響がいくらかあらわれ、(a) より応力分布のよー性がいくぶんくずれ、(c) ではかなり拘束の影響があらわれて、応力状態は加圧面の水平方向変位を固定した場合のものにかなり近づくことがわかった。また、図-7 に  $k=1.0 \times 10^4$  および  $1.0 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$  として、摩擦による拘束力を加圧面の全節点に作用させた場合の供試体内のせん断ひずみエネルギー分布を、 $k=\infty$  の場合と同時に示す。加圧面の半径方向変位を固定にした場合には図-7 に示したように加圧面周辺と、内部の中心線上に高い値を生ずるが、加圧面の摩擦抵抗を考慮した場合には、固定の場合とくらべて、加圧面近傍をのぞいてエネルギー分布がよーな状態に近づく傾向がある。破壊理論における最大せん断ひずみエネルギー説により、弾性領域より直接破壊の領域に達すると仮定すると、加圧面の半径方向変位を自由とした場合は、任意の軸対称断面、あるいは、これに平行な軸方向断面の全断面が同時に破壊域に達し、固定とした場合や、摩擦抵抗を考えた場合は、加圧面の周辺か、内部の中心線上が最初に破壊域に達することになる。また、ひずみエネルギーの等高線の尾根にあたる部分は加圧面周辺と内部のピークの点を結び、荷重方向に対してはほぼ  $45^\circ$  の方向を向いている。このことからただちに最大せん断ひずみエネルギー説による破壊を説明することはできないが、興味ある結果を示している。

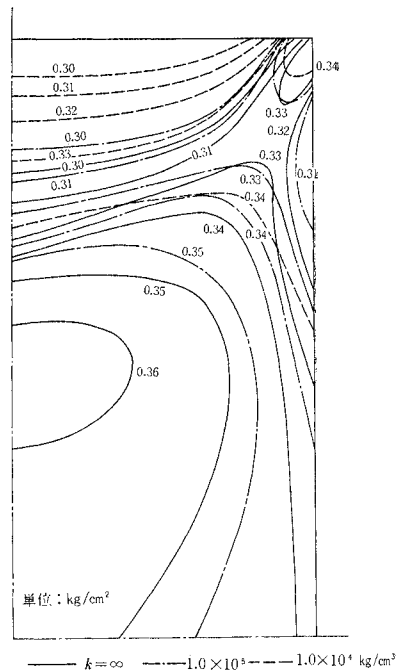


図-7 加圧面の摩擦抵抗と供試体 ( $E=2.1 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.2$ ) 内のせん断ひずみエネルギー分布の関係 ( $u_z^u=0.02\text{ cm}$  の場合)

### 3. 材料の非線形性質を考慮した場合の供試体の変形および応力状態 (弾塑性解析)

非線形解析には、応力とひずみの関係が非線形である問題と、大変形の問題があるが、ここでは前者を取り扱い、荷重(あるいは変位)漸増法による解析結果と、反復法による解析結果との対比を行なうとともに、材料の

非線形性が供試体の変形や応力状態におよぼす影響を明らかにし、さらに、荷重の増加による供試体内の塑性領域の変化について検討した。荷重漸増法では各荷重段階における弾塑性域のひろがりあるいは弾性係数の変化状態が順次求められ、荷重の増加に伴う供試体の状態変化を逐次追跡して行くことができる。この場合には、各荷重段階からの荷重増分に対して、応力-ひずみ関係におけるその応力レベルでの接線弾性係数が用いられる。これに対して反復法は、ある荷重状態に対する最終的な供試体の状態を求めるのに用いられ、繰返し解析を行なう各回で、そのときの応力レベルに対応した割線弾性係数を用い、供試体内の状態が一定値に収束するまで計算が繰返される。したがって、この場合には荷重の増加に伴う状態の変化は得られない。この二方法の適用は解析すべき問題によって適当に選択されねばならないが、実際には、漸増法における各荷重増分に対する解析において反復法を適用し、この二方法の組み合わせである荷重状態までの解析を続け、最終状態を求めるべきであろう。

(1) 漸増法による解析

材料の応力とひずみの関係や降伏条件についての情報が十分でないので、ここでは一応、ぜい性材料を考え、その応力-ひずみ関係を図-8で示すように、降伏するまでは線形に変化し、降伏後は完全塑性に近い状態になると考える。したがって、加圧面の任意のある変位量に対して任意の要素の応力状態が降伏条件を満足していないときには、それからの変位増分に対しては一定の弾性係数  $E$ 、および、ポアソン比を用い、変位の増加につれて、降伏条件を満たした要素がでてくれば、その要素の変形係数、および、ポアソン比を変化させて順次計算を

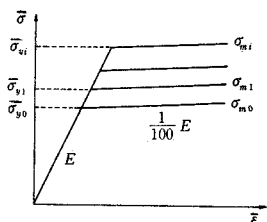


図-8 漸増法による非線形解析の場合の応力-ひずみ関係

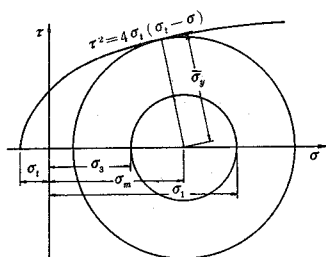


図-9 Griffith 理論にもとづく Mohr の包絡線

進めていくものである。ここでは降伏条件として、Griffith 理論を考慮した Mohr の包絡線  $\tau^2 = 4\sigma_1(\sigma_1 - \sigma)$  を用いる (図-9 参照)。これは、材料の引張強度を  $\sigma_t$ 、最大および最小主応力を  $\sigma_1, \sigma_3$  (ここでは圧縮応力を正とする) とすると、次式

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_m \leq -\sigma_t \text{ では } \bar{\sigma}_y = (\sigma_m - \sigma_t) \dots\dots\dots (3) \\ \sigma_m \geq -\sigma_t \text{ では } \bar{\sigma}_y = 2\sqrt{-\sigma_t \cdot \sigma_m} \dots\dots\dots (4) \end{array} \right.$$

で示される。ここで、 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 、 $\sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$  である。

モルタルの圧裂試験によって得られた引張強度  $\sigma_t = -30 \text{ kg/cm}^2$  を上の降伏条件式に用い、弾性状態にある要素に対しては、 $E_0 = 2.1 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu = 0.2$  とし、降伏条件を満たし、塑性状態になった領域の要素に対しては、その変形係数を弾性係数  $E$  の  $1/100$  倍とし、ポアソン比を  $0.45$  とし、加圧面の半径方向変位を完全に拘束した場合の塑性領域の拡がり、載荷重との関係を求めた。図-8 に示した応力-ひずみ関係として、弾性-完全塑性を考える場合には材料の降伏後の変形係数は  $0$  となり、また、そのときのポアソン比は  $\nu = 0.5$  となるが、平面ひずみ状態に対する有限要素法ではそれらの値を用いることができないため、上記の値を用いた。計算結果を示すと 図-10 のようである。この解析では最初に一要素だけが降伏条件を満たすように加圧面の軸方向変位量を求め、それに続いて、順次、任意の数の要素が降伏条件を満たすように変位増分を定めながら、各変位段階における塑性域の拡がりが求められた。なお、図中に記入されている各塑性域に対応した荷重による平均応力の大きさは、モルタルの一軸圧縮試験における見かけの圧縮強度  $P_{\max}/A$  (ここに  $P_{\max}$  は最大荷重、 $A$  は供

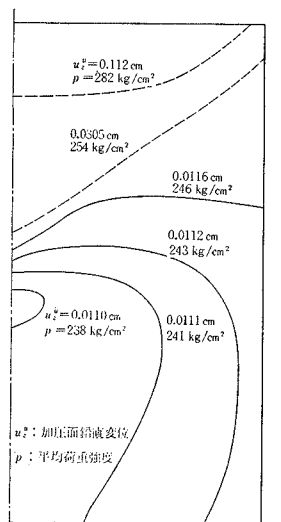


図-10 漸増法による非線形解析で求められた塑性域の拡がり

試体の断面積)に対応させるために、各段階における加圧面の軸方向変位に相当した全荷重  $P$  を求め、さらに  $\sigma_{mean}=P/A$  として求められているものである。この結果によると、加圧面の平均応力  $\sigma_{mean}=246 \text{ kg/cm}^2$  で、軸方向変位  $\delta=0.012 \text{ cm}$  まで荷重を増加させると、降伏した領域が供試体を横切って広がるのがわかる。この状態を破壊と考えるかどうかについては後であらためて検討されるだろう。

(2) 反復法による解析

モルタルの応力-ひずみ関係は一般に非線形性を示し、その程度は拘束応力としての平均主応力  $\sigma_m$  の値によって影響されると考えられる。この特性については、現在行なっている純三軸圧縮試験機によるモルタルの三軸圧縮応力下の変形挙動の測定値からも認められている<sup>9)</sup>。この応力-ひずみ関係を有限要素解析に導入する場合、その関係が数式化されていると便利である。そこでここではつぎのような仮定のもとでモデル化した一つの応力-ひずみの関係式を求め、非線形解析に導入し

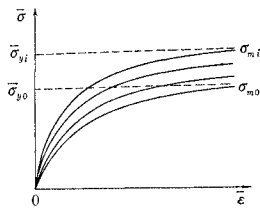


図-11 反復法による非線形解析の場合の応力-ひずみ関係

た。まず、応力とひずみの関係としては、図-11 に示すように、最大と最小の主応力の差の半分  $\sigma=(\sigma_1-\sigma_3)/2$  とそれに対応する主ひずみ差  $\bar{\epsilon}=\epsilon_1-\epsilon_3$  との関係を考え、パラメーターとしてそれらの平均主応力  $\sigma_m=(\sigma_1+\sigma_3)/2$  の値をとる。図に示されているような  $\bar{\sigma}\sim\bar{\epsilon}$  の関係は、つぎのような事項を考慮して仮定される。

- (a)  $\bar{\epsilon}=0$  において  $\bar{\sigma}=0$
- (b)  $\bar{\epsilon}\rightarrow\infty$  において、応力状態はそのモール円が破壊包絡線に接するような状態となる。したがって  $\bar{\sigma}_y$  となる。 $\bar{\sigma}_y$  は破壊時の最大せん断応力に相当する(図-9 参照)。
- (c) 破壊時に  $\bar{\epsilon}\rightarrow\infty$  となるとともに、せん断弾性係数  $G=\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}\rightarrow 0$  になる。
- (d) 一軸圧縮試験における  $\sigma_1-\epsilon_1$  関係曲線より初期弾性係数 ( $\epsilon_1=0$  のときの立ち上り) が求められ、さらにポアソン比が既知であるとする。したがって、初期せん断弾性係数  $G_0$  が既知となる。

以上の条件のうち、(b) から  $\sigma_m$  が一定であれば一つの曲線が与えられ、 $\sigma_m$  をパラメーターとする  $\bar{\sigma}\sim\bar{\epsilon}$  曲

線群が得られることがわかる。上記の条件を満足するものとして、次式で表わされる関係式を仮定する。

$$\bar{\sigma}=(\alpha+\beta\sigma_m+\gamma\sigma_m^{1/2})(1-e^{-\delta\bar{\epsilon}}) \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  は定数であり、 $\delta > 0$  とする。いま破壊包絡線としてさきに述べた Griffith-Mohr の包絡線を用いると、式(3)、(4)を考慮して、上記の4個の条件より、式(5)中の各定数はつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m \leq -\sigma_t \text{ のとき, } & \alpha = -\sigma_t, \beta = 1, \gamma = 0, \\ & \delta = G_0/(-\sigma_t) \\ \sigma_m \geq -\sigma_t \text{ のとき, } & \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 2\sqrt{-\sigma_t}, \\ & \delta = G_0/(-\sigma_t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

したがって、応力-ひずみ関係式、任意の応力レベルにおける接線弾性係数  $G$  および割線弾性係数  $\bar{G}$  はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m \leq -\sigma_t \text{ のとき} \\ \bar{\sigma} &= (\sigma_m - \sigma_t)(1 - e^{\frac{G_0}{\sigma_t}\bar{\epsilon}}) \\ G &= \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = -\frac{G_0}{\sigma_t}(\sigma_m - \sigma_t)e^{\frac{G_0}{\sigma_t}\bar{\epsilon}} \\ \bar{G} &= \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = (\sigma_m - \sigma_t)(1 - e^{\frac{G_0}{\sigma_t}\bar{\epsilon}})/\bar{\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{また, } \sigma_m \geq -\sigma_t \text{ のとき} \\ \bar{\sigma} &= 2\sqrt{-\sigma_t \cdot \sigma_m}(1 - e^{\frac{G_0}{\sigma_t}\bar{\epsilon}}) \\ G &= \frac{2G_0}{\sqrt{-\sigma_t}}\sqrt{\sigma_m} \cdot e^{\frac{G_0}{\sigma_t}\bar{\epsilon}} \\ \bar{G} &= 2\sqrt{-\sigma_t \cdot \sigma_m}(1 - e^{\frac{G_0}{\sigma_t}\bar{\epsilon}})/\bar{\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

以上の式を用いて、反復法による計算はつぎのように行なわれる。ある荷重状態に対して、まず、すべての要素の弾性係数として初期値  $E_0$  を用いて計算を行なう。それによって得られた最大および最小主応力  $\sigma_1, \sigma_3$  および、最大および最小主ひずみ  $\epsilon_1, \epsilon_3$  から  $\sigma_m, \bar{\epsilon}$  を計算し、式(7)あるいは式(8)に代入すると  $\bar{\sigma}$  が求められる。この場合、 $G_0, \sigma_t$  は実験値より得られた値が用いられる。 $\bar{G}=\bar{\sigma}/\bar{\epsilon}$  より、各要素の新しい弾性係数  $E$  を計算し(ここではポアソン比に関する適当な資料がなかったため、ポアソン比をつねに一定と仮定して計算しているが、応力に対してポアソン比の変化する状態が測定されている場合には、その関係を用いればよい)、この値を用いて最初と同じ荷重状態で弾性計算を行なう。この計算過程を反復させ、解が収束するまで繰返す。

供試体材料の初期弾性係数  $E_0=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比  $\nu=0.2$ 、 $\sigma_t=-30 \text{ kg/cm}^2$  として、破壊荷重に近いと思われる数個の荷重状態について、反復法による解析を行ない、それぞれの供試体内の応力、ひずみなどの状態を比較した。

加圧面の半径方向変位を固定し、鉛直変位  $u_z''$  を、

㊶ 0.01 cm, ㊷ 0.015 cm, ㊸ 0.02 cm, ㊹ 0.025 cm とした場合の計算を行なった。計算結果を示すとつぎのようである。まず、供試体の変形状態を加圧面の変位量  $u_z^u=0.02$  cm の場合について示すと、図-12 のように、非線形解析によると、側面は単純な凸形をせず、波をうつことがわかる。線形弾性解析では側面中央の半径方向変

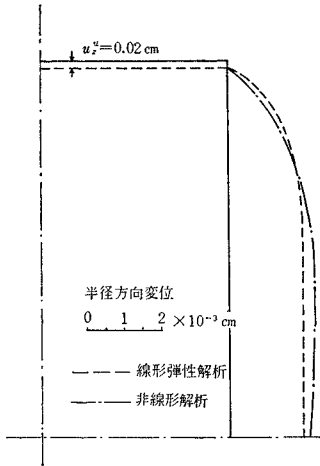


図-12 加圧面の半径方向変位を拘束した場合の線形弾性解析および非線形解析(反復法)による供試体の変形状態の比較 ( $u_z^u=0.02$  cm,  $\nu=0.2$  の場合)

位が最大になるが、式(7)および(8)で与えられるような材料の非線形性質を考慮した場合には中央よりわずかに離れた位置でもっとも側方へふくらむ。この結果は Gramberg<sup>7)</sup> が示している実験結果と同じ傾向を持っていて興味深い。つぎに、各荷重段階における供試体内の弾性係数およびポアソン比の変化の様子を見ると、図-13 のようである。この供試体の初期接線弾性係数は  $E_0=2.1 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup> であり、各点の数値は上より順次加圧面軸方向変位が  $u_z^u=0.01$  cm (全荷重  $P=16.6$  ton, 平均荷重強度  $p=210$  kg/cm<sup>2</sup> に相当),  $u_z^u=0.02$  cm ( $P=19.5$  ton,  $p=248$  kg/cm<sup>2</sup>),  $u_z^u=0.03$  cm ( $P=19.7$  ton,  $p=251$  kg/cm<sup>2</sup>) に対するものである。この計算では荷重状態の変化、したがって、弾性係数の変化にかかわらずポアソン比を一定とし、 $\nu=0.2$  と仮定している。この図から、 $u_z^u=0.01$  cm 程度までは供試体全体にわたって弾性係数の低下はほとんどなく、線形な弾性変形を示し、 $u_z^u=0.02$  cm 以上になると、供試体の中央の大部分では、最初に仮定したせん断弾性係数の変化に応じた弾性係数の低下を示しているが、載荷面近傍では加圧面の变形拘束の影響によって弾性係数の低下が急激にはおこらないことがわかる。また、供試体の軸方向全変形量と平均応力(全荷重/断面積)より見かけの弾性係数を求めると、それぞれ、 $u_z^u=0.01$  cm の場合に  $E=2.1 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $u_z^u=0.02$  cm の場合に  $E=1.24 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $u_z^u=0.03$  cm の場合に  $E=0.84 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup> となる。なお、供試体の一軸圧縮試験における側面での軸方向、半径方向、二方向の表面ひずみ測定と中心軸上での埋設ひずみ計によるひずみ測定を考慮して、側面と中心軸における各要素の局部的な二方向のひずみの値よりポアソン比を求めた。その結果は図-13 に示されているが、加圧面近傍では最初に仮定した値  $\nu=0.2$  よりかなり小さい値を与えている。供試体全体の变形を考えて、軸方向全変形量  $\Delta h$  に対する中央横断面上での半径方向全変形量  $\Delta d$  としての見かけのポアソン比を  $\nu_z^u = \Delta d / 2 = 0.02$  cm に対して求めると、 $\nu = -(\Delta d/d) / (\Delta h/h) = -(0.00447/10) / (0.04/20) = 0.224$  となる。

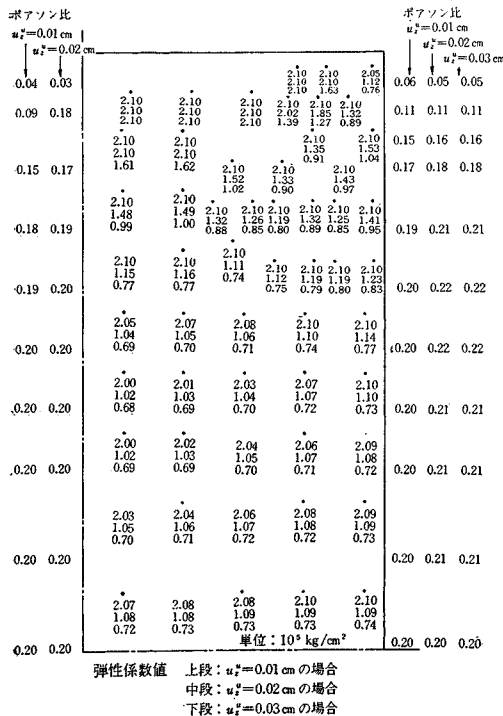
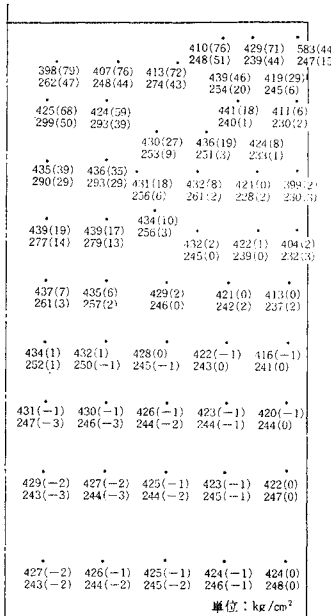


図-13 供試体内の各点における弾性係数およびポアソン比 ( $\nu = \epsilon_r / \epsilon_z$ ) の変化

応力およびひずみの状態を見るとつぎのようである。図-14 に、供試体内の各位置における最大、最小主応力の値を、加圧面での変位  $u_z^u=0.02$  cm (平均荷重強度  $p=210$  kg/cm<sup>2</sup>) に対して、線形弾性解析と非線形解析の場合について与えている。非線形解析の結果では、応力レベルが高まるにつれて弾性係数が減少するため、線形弾性解析の場合にくらべて一様に応力が小さく、最大値で 300 kg/cm<sup>2</sup> 程度となる。最大応力の生ずる位置は前者の場合では加圧面周辺であるが、後者の場合では加圧面中央部の近傍に移る。また引張応力は供試体中央部にわずかに出るだけであり、非線形解析ではその値を



上段: 線形弾性解析, 左側: 最大主応力  $\sigma_1$   
 下段: 非線形解析, 右側カッコ内: 最小主応力  $\sigma_2$   
 負号は引張応力を表わす

図-14 主応力状態 ( $u_z^u = 0.02$  cm,  $\nu = 0.2$  の場合)

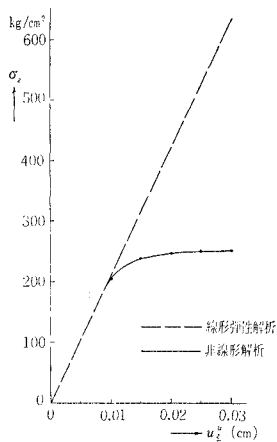


図-15 中央横断面の平均応力  $\sigma_z$  と加圧面の変位  $u_z^u$  との関係

増す傾向にある。いま供試体中央横断面における平均軸方向応力 ( $\sigma_z$ )<sub>m</sub> の値と加圧面の軸方向変位  $u_z^u$  との関係を示すと、図-15 のようになる、なお、同時に線形弾性解析の場合の関係も示されている。この図から、 $u_z^u = 0.01$  cm までは線形関係をもつが、 $u_z^u > 0.01$  cm 以上になると平均応力の増加率は急激に減少して、荷重強度が上昇しないことがわかる。一方、供試体内の主ひずみ分布は図-16 に示すようである。図には  $u_z^u = 0.02$  cm の場合が示されているが、 $u_z^u = 0.01$  cm あるいは 0.03 cm の場合にも同様な分布形状を示し、加圧面周辺と内部の中心軸上 1/3 付近に大きいひずみを生じ、最大ひず

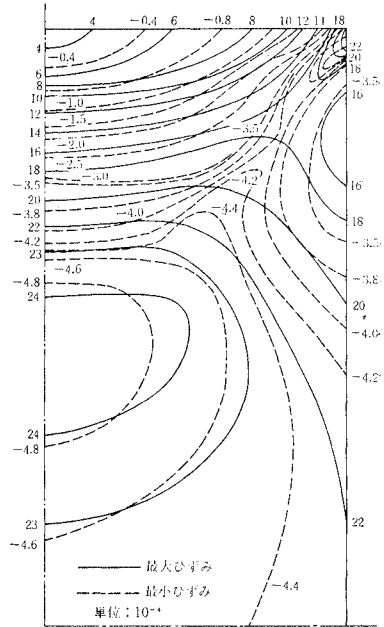


図-16 加圧面の半径方向変位を拘束した場合の供試体内のひずみ分布 ( $u_z^u = 0.02$  cm の場合)

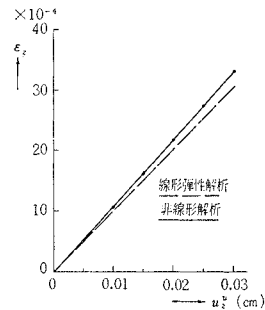


図-17 中央横断面の軸方向平均ひずみ  $\epsilon_z$  と加圧面の変位  $u_z^u$  との関係

み (圧縮), 最小ひずみ (引張り) ともその等高線はせん断ひずみエネルギーに対するものと類似の形をしていることがわかる。また、引張り応力が供試体中央部におずかに出るのに対して、引張りひずみは供試体全体にわたって生じ、その圧縮ひずみに対する割合もかなり大きい。このことはいわゆる分離破壊の現象を引張りの状態と関連づけて考える場合に、引張応力よりもむしろ引張ひずみの大きさが問題になることを示唆している。供試体の中央横断面における平均軸方向応力 ( $\sigma_z$ )<sub>m</sub> が加圧面の変形量の増大に対して頭うちの状態 (図-15 参照) になるのに対して、その面における平均軸方向ひずみ ( $\epsilon_z$ )<sub>m</sub> は図-17 に示すようにほぼ直線的に増加する。

(3) 漸増法と反復法の結果について

荷重あるいは変位漸増法と反復法とについては、この



章の始めに説明したように、解析の対象によって、それらを適宜選択しなければならないが、ここで示した供試体の一軸圧縮試験時の応力や変形状態の非線形解析では、ある一つの荷重状態に対する最終的な状態を得るために両方の解法が適用されている。しかし、ここでは前記のように応力-ひずみ関係として漸増法に対しては弾性-完全塑性的な関係を、反復法に対しては指数関数的な非線形関係を与えて解析しているため、この両解析法による結果の直接の比較はできないが、いずれの解析にも材料の降伏条件には同一のものが用いられているので、つぎのように破壊を定義すると、かなりよく一致した結果を与えることがわかった。すなわち、漸増法では降伏した領域が供試体を横切って広がったときを破壊と考えると、そのときの加圧面の平均応力は  $\sigma_m = 246 \text{ kg/cm}^2$ 、軸方向変位  $u_z'' = 0.012 \text{ cm}$  となり、一方、反復法においては 図-15 から明らかなように、 $u_z'' = 0.01 \text{ cm}$  ( $\sigma_m = 210 \text{ kg/cm}^2$ ) と  $u_z'' = 0.015 \text{ cm}$  ( $\sigma_m = 242 \text{ kg/cm}^2$ ) のあいだで供試体中央断面の平均応力と加圧面変位の関係が急激に非線形性を増し、この間で破壊を定めると、破壊時の  $u_z''$  も平均応力も漸増法の場合とかなり近い値となる。しかし、この場合の平均応力として  $\sigma_m = 246 \text{ kg/cm}^2$  を考えると、そのときの加圧面の軸方向変位は  $u_z'' = 0.02 \text{ cm}$  程度となり、漸増法の場合よりも大きい変位を与え得ることになる。

以上の考察は応力-ひずみ曲線の異なるものの比較であるにもかかわらず、降伏条件が同一である場合にはかなり似かよって破壊時の加圧面変位および破壊荷重が与えられることを示している。なお、これらの値の実験結果との比較は次章で示されている。

#### 4. 一軸圧縮試験による変形形状と破壊強度の測定

緒言でも述べたように加圧面の拘束状態を変えた岩石やコンクリートの一軸圧縮試験はいままで多く行なわれているが、ここでは上記数値解析と比較するために、三つの端面拘束の条件下で直径 10 cm、高さ 20 cm のモルタル円柱供試体の一軸圧縮試験を行ない、加圧面に与える変位（ならびにこの場合の全荷重）と供試体の局所的なひずみや軸方向の全体変形、破壊荷重、ならびに破壊形状などの測定を行なった。モルタルの水・セメント比 65%，セメント・砂比 50% で、材令 28 日で各ケースとも 20 個の供試体について、試験を行なった。加圧面拘束の三つの条件はつぎのようである。

(1) 加圧面の半径方向変位を固定するため、供試体の上下面に直径 10 cm、厚さ 2.5 cm の鋼製円板を接着剤（アラルダイトD）で取り付け、この円板を

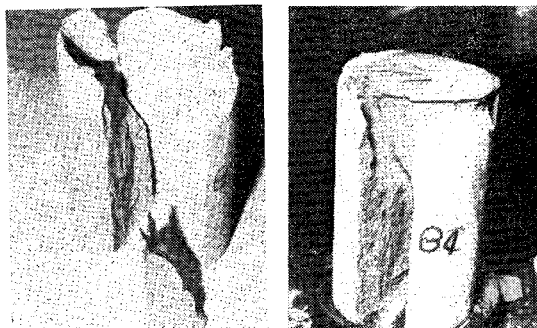
通じて載荷した場合

- (2) 通常の一軸圧縮試験の場合と同様に、供試体をそのまま試験機加圧板間に置いて載荷した場合
- (3) 加圧面の半径方向変位を自由にするため、加圧板と供試体端面との間にシリコングリースを塗布したゴムスリーブ（厚み 0.3 mm）を挿入し、加圧面の摩擦を減じた場合（この場合、端面の摩擦係数は 0.002 であった）。

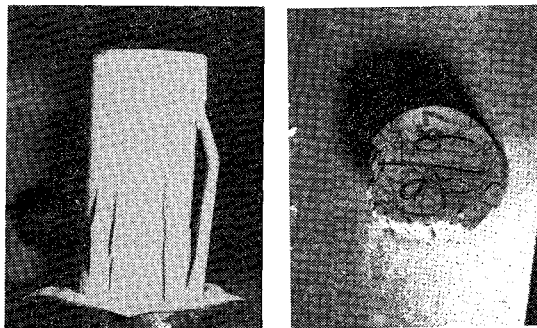
それぞれの場合の破壊時の平均応力（破壊荷重を供試体断面積で割った値）を示すと、(1)  $335.6 \pm 16.0 \text{ kg/cm}^2$ 、(2)  $322.8 \pm 11.6 \text{ kg/cm}^2$ 、(3)  $282.7 \pm 12.2 \text{ kg/cm}^2$  であり、また、破壊形状を示すと、写真-1 のようである。加圧面の半径方向変位の拘束が大きい場合には円錐状のブロックが押し込まれるような形で最終破壊がおこ



(a) 条件 (1) の場合



(b) 条件 (2) の場合



(c) 条件 (3) の場合

写真-1 破壊形状

る。また、拘束がない場合には供試体内のあらゆる位置でいわゆる分離破壊を起こし、巨視的には縦割れした柱状体の集りとなり、さらにそれらが座屈するようにして破壊(最大荷重)に達する。通常行なわれている試験のように加圧面にある程度の摩擦が作用する場合の破壊形状はむしろ加圧面の半径方向変位を固定した場合の破壊形状に近くなることわかる。供試体側面におけるひずみは荷重の小さい間は各位置においてあまり大きい差異を示さないが、荷重が増加し、変形がかなり大きくなると、それぞれの位置におけるひずみにかなりの差異を生じ、また内部的な破壊の発生の仕方によって、側面のひずみ分布は供試体によってかなりのバラツキを見る。いま、側面中央におけるひずみと平均荷重強度との関係をいくつかの供試体について示すと図-18 のようになる。また、加圧面の変位量  $u_z^0$  あるいは平均ひずみと平均荷重、および、ポアソン比の関係を図示すると図-19 のようである。図-19 からわかるように、加圧面が拘束された供試体の破壊時の加圧面の変形量(各荷重段

階における供試体の軸方向変形量の半分を取る)は条件(1)の場合には  $0.03\text{ cm} \sim 0.04\text{ cm}$ 、条件(2)の場合には  $0.025\text{ cm} \sim 0.035\text{ cm}$  の範囲にある。したがって、破壊時のひずみは条件(1)の場合には  $3 \sim 4 \times 10^{-3}$ 、条件(2)の場合には  $2.5 \sim 3.5 \times 10^{-3}$  程度になるが、条件(1)の場合の値は図-18 に示す抵抗線ひずみ計による側面中央のひずみ測定法の範囲に対応している。図-18 および 19 よりわかるように加圧面の拘束度は最終的な破壊形状や強度には大きく影響をおよぼすが、破壊までの変形特性(応力-ひずみ関係)について見れば、あまり大きい影響をうけないようである。

ポアソン比の実測値は加圧面の拘束状態によりわずかに異なるが、破壊をおこす直前までほぼ0.2前後の値であり、軸方向全変形量の大きさにかかわらずほぼ一定である。供試体内半径方向ひずみと軸方向ひずみの比、 $\epsilon_r/\epsilon_z$ 、 $\epsilon_\theta/\epsilon_z$  の値が中央横断面上の各位置で大きく異なるという結果を与えている報告<sup>8)</sup>があるが、解析結果(図-13)によると、中央横断面上では  $\epsilon_\theta/\epsilon_z$  の値は変わらず、また加圧面の軸方向変位にも関係しないようである。

## 5. 解析結果と実験結果の比較考察

図-19 の実線で示されている平均荷重強度と軸方向全変形量との関係は、非線形解析によって求められている図-15 の関係に対応している。加圧面の軸方向変位を軸方向全変形量の半分と考えると、これらの関係を比較すると、実験値では初期弾性係数がわずかに低く、直線性を示す範囲は解析値とほぼ同じであるが、 $u_z^0 = 0.01\text{ cm}$  あたりからのこの関係の非線形性は解析値ほど著しくはない。それに対して解析値では  $u_z^0 = 0.01\text{ cm}$  あたりから変形係数の急激な変化がおり、平均荷重強度が頭うちの状態で増加せず、変位のみが増大する。

さきにも述べたように、解析結果においてどのような状態を破壊と定義するかによって破壊荷重や破壊時の変位量などが異なるが、解析では破壊荷重強度が  $245 \sim 250\text{ kg/cm}^2$  であり、そのときの加圧面軸方向変位が  $0.012 \sim 0.020\text{ cm}$  であるのに対して、実験値では荷重-変形曲線において平均荷重強度に頭うちの状態は見られず、破壊強度は  $310 \sim 350\text{ kg/cm}^2$ 、破壊時加圧面変位は  $0.03 \sim 0.04\text{ cm}$  といずれもかなり大きい。これらの相違は、解析に用いられた供試体材料の応力-ひずみ関係や降伏条件が、用いられた材料のそれらを忠実に表現しているかどうか、またここで用いた有限要素解析法が連続体の力学に基礎を置いているのに対して、破壊は不連続性の発生およびその逐次進行現象として取り扱われねばならないことなどに原因しているものと考えられる。解析結果より推定された破壊強度が低いことは、明らかに、仮定さ

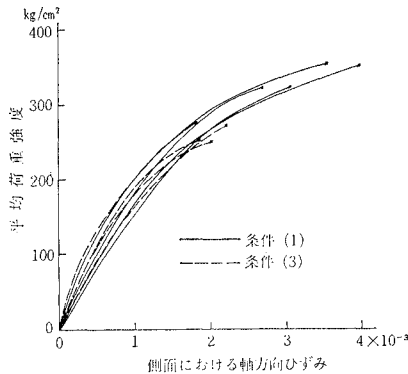


図-18 平均荷重強度と供試体側面中央における軸方向ひずみの関係

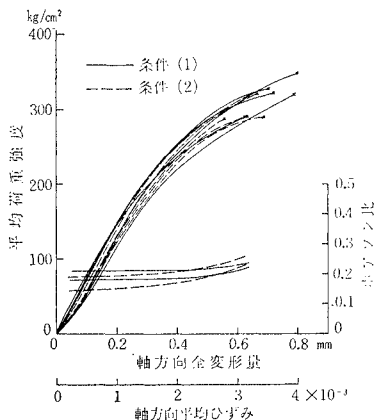


図-19 軸方向全変形量(または平均ひずみ)と平均荷重強度およびポアソン比の関係

れた降伏条件に大きく関係している。ここでは Griffith-Mohr の破壊包絡線 (図-9) を用いたが、その引張強度の値よりも、むしろ圧縮側の包絡線が  $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  の低い値のところからすでにかなりフラットになっていることによって、破壊強度が頭うちの状態になって高まらないような結果を与えているように考えられる。したがって、供試体材料の破壊包絡線としては、圧縮側でむしろ直線的に変化するような形をとるものと推定されるが、この点についてはさらに検討を要する。

つぎに、線形ならびに非線形解析で得られたせん断ひずみエネルギー分布 (図-4) や等最大引張りひずみ線 (図-16) の形状について見ると、実験による破壊形状と関連があると思われる興味ある結果を示している。これらは加圧面の半径方向変位が固定された場合のものであるが、加圧面周辺と中心軸の 1/3~1/4 点付近からピークがでて、それらを結ぶ線に沿って等高線の尾根を形成している。この状態が、最大せん断ひずみエネルギー説を通して、破壊面の形成に関係するか、また、引張りひずみがある一定値に達して、破壊面が進展するかなどについては、まだ十分明らかにすることはできない。加圧面の半径方向変位の固定が順次解け、摩擦抵抗をもつようになると、ひずみエネルギーの高い部分は中心軸上で徐々に加圧面に近づき、供試体中央部のひずみエネルギーは一樣になってくる (図-7 参照)。さらに、加圧面の半径方向変位を自由にすると、ひずみエネルギーのピークはなくなり、供試体全体にわたって一様となり、写真-1 (c) に示すように軸方向に平行に縦割れした、いわゆる分離破壊を生じる。この分離破壊を上記のせん断ひずみエネルギー分布の形状や非線形解析による塑性領域の拡がりから考えることはむずかしく、むしろ、引張りひずみの大きさから定められるべきものと考えられる。

一方、図-10 に示すように、解析では平均荷重強度が  $p = 243 \text{ kg/cm}^2$  (前記のように破壊包絡線の形状によってさらに高まるが) まで増加すると塑性域が供試体の断面全体にわたって拡がるが、その後、その部分の変形能が増大することによって、加圧面下の円錐形の部分 (この部分の弾性係数の低下は他にくらべて小さい。図-13 参照) が剛体的に中央部に運動することにより、二次的に円錐状の破壊面が形成されるという解釈が可能である。実験による破壊後の供試体を見ると、解析で求められた塑性域にあたる部分では材料がかなり破砕された状態にあり、また、破壊面はすべりを生じたように白色化している。R. Kvapil<sup>9)</sup> は加圧面に摩擦が作用する場合と作用しない場合の岩石の円柱供試体による一軸圧縮試験を行ない、両者の分離破壊の形状を観察して、前者では蓄積ポテンシャルエネルギー量と変形量との相違がもっとも大きいところ、すなわち、供試体の外周域

で分離破壊し、後者では蓄積ポテンシャルの等しいところを通して分離破壊面が形成されると説明しているが、定量的なことは明らかでなく、ポテンシャルエネルギーの分布も、彼が考えたような形状のものはここで行なった解析では得られなかった。

いま、非線形解析結果として反復法によるものとして考えると、加圧面の水平変位が固定された場合には、破壊時の鉛直変位が 0.02~0.03 cm で、平均応力 (圧縮強度) は  $\sigma_z = 250 \text{ kg/cm}^2$  程度であり、加圧面の摩擦抵抗を考えた場合には、 $\sigma_z = 244 \text{ kg/cm}^2$  (加圧面軸方向変位 0.02 cm の場合) となり、一方、加圧面の半径方向変位を自由とした場合、すなわち、供試体内での応力が一様 ( $\sigma_z = \sigma_1$ ,  $\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0$ ) になる場合には、Griffith-Mohr の降伏条件で  $\sigma_1 = -30 \text{ kg/cm}^2$  としているから、それより  $\sigma_z = 240 \text{ kg/cm}^2$  のときに供試体は降伏することになる。これらの値は実験値 (固定:  $335.6 \text{ kg/cm}^2$ , 摩擦抵抗:  $322.8 \text{ kg/cm}^2$ , 自由:  $282.7 \text{ kg/cm}^2$ ) とはかなり異なった値であるが、加圧面の強度におよぼす影響は両者で同じ傾向を持ち、この結果からもやはり解析に用いた降伏条件が大きく影響しているように思われる。

## 6. 結 語

ぜい性材料の弾性性質や破壊強度を測定する目的で、円柱供試体による一軸圧縮試験が行なわれているが、その場合の加圧板と供試体端面間の摩擦による加圧面の半径方向変位拘束の影響を明らかにするため、軸対称問題に対する有限要素法を適用して、数値実験を行なった。まず、材料が線形弾性を示す範囲における供試体内の応力、ひずみ、せん断ひずみエネルギー分布の状態などが、等分布荷重、等変位荷重および加圧面の拘束状態などを考慮して計算され、比較されたが、加圧面から供試体長の 1/4 の部分までのそれらの状態は加圧面の拘束状態によって著しく影響をうけ、とくにせん断ひずみエネルギーは破壊形状に関連すると思われる興味ある分布状態を示した。

加圧面の摩擦による半径方向変位の拘束を摩擦抵抗係数によって表現し、摩擦抵抗の大小による拘束度の影響を調べたが、加圧面のすべり発生範囲やせん断応力分布はかなり影響をうけるのに対して、軸方向応力分布には大きい変化を生じないことがわかった。

以上の線形弾性解析により、標記の問題への有限要素法の適用は、従来から行なわれている純弾性論的解法による計算より容易であり、また、供試体表面に貼付したり、内部に埋設された電気抵抗線型ひずみ計によってひずみ分布を求めるよりも容易であることがわかった。

つぎに、有限要素解析法の特徴を生かして、材料の性

質が非線形性を有する場合に対して非線形解析を行ない、種々の荷重段階における荷重—変形関係および供試体内の各位置での応力—ひずみ関係、変形係数の変化の状態などを求め、さらに、弾塑性解析を行なって、供試体内の塑性領域が広がる過程、破壊時の全変形量およびひずみ分布、せん断ひずみエネルギー分布などを求め、それらの結果から、破壊荷重（圧縮強度）や破壊形状について考察した。この場合、解析には変位漸増法と反復法が用いられたが、解析に用いられる材料の応力—ひずみ関係や降伏条件が重要な要素となる。ここでは、材料としてモルタルを対象とし、その圧裂試験より引張強度を推定して Griffith-Mohr 包絡線を定め、一方、応力—ひずみ関係としては、モルタルの三軸試験による十分な資料がないため、有限要素法に非線形の応力—ひずみ関係を導入する場合に、ある関数関係で表わされている方が便利であることなどの理由で、ある仮定のもとで応力—ひずみ関係を導き、使用した。その結果、解析結果と実験結果とは質的にはかなりよい一致が見られたが、量的にはかなりの差異が認められた。また、解析によるひずみ分布やせん断ひずみエネルギー分布の状態、弾塑性領域の発達過程などの比較から、加圧面の拘束状態による破壊形状の差異について考察したが、実験による破壊形状と一致するような結果を得た。しかし、有限要素法を逐次進行する現象としての破壊状態の解析に適用するためには、今後、不連続性の発生を合理的に表現するモデルを考えた解析を進め、さらに検討が加えられるべきであると思う。

本論文の主題からそれて、非線形解析において漸増法と反復法による結果の比較を行なったが、これは有限要素法をこの種の問題に適用する場合の参考のために示したものであり、両者において仮定された応力—ひずみ関係が異なるにもかかわらず、同一の圧縮強度が求められた。これは、用いられた降伏条件が同じものであるから当然のことかも知れないが、興味ある結果である。仮定

された降伏条件では、圧縮強度の解析値は実験値よりもかなり低い。これは前記のようにもっぱら降伏条件の不適合に原因しているものであり、それゆえ、ここに示した有限要素解析を逆に用いて、モルタルなどの材料の降伏条件式を数値実験的に定めることも可能であるように考えられる。

終りに、本研究を行なうにあたり、終始、ご指導いただいた名古屋大学 成岡昌夫教授、ならびに、電子計算機のプログラミングに関してご忠言いただいた当教室の水島章次助手に感謝の意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) R. Hill : The Mathematical Theory of Plasticity, Carendon Press (Oxford), 1950.
- 2) 木村二郎 : 耐圧試験の際に生ずる円筒形物体内の応力分布およびその破壊状態について, 土木学会誌, 17 (1931), 713.
- 3) J. Znancki : Criteria of the Gradual and Sudden Collapses of Surrounding Rock into Mining Excavations, Proc. of International Conference on Strata Control, Paris, Paper C 4, (1960).
- 4) R. Seldenrath and J. Gramberg : Stress-Strain Relations and Breakage of Rock, Mechanical Properties of Non-Metallc Brittle Materials (edited by W. Walton), Butterworths Scientific Publications (1958), 79.
- 5) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967.
- 6) 川本眺万・富田和政・秋本昌胤 : モルタルのようなぜい性材料の変形特性, 土木学会第5回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要, (1969).
- 7) J. Gramberg : Axial Cleavage Fracturing, A Significant Process in Mining and Geology, Engineering Geology, 1-1 (1965), 31.
- 8) A. Brandt : Ratios between the Linear Components of the Strain in Concrete, BULLETIN DE L'ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES, Serie des sciences techniques, Vol. XIII, No. 9 (1965), 483.
- 9) R. Kvapil : Concerning the Theory of Rock Destruction, Proc. of International Strata Control Congress, Leipzig (1958), 64.

(1969.2.4・受付)