

## 演算子法による各種の連続ばりの解析

### OPERATIONAL METHOD FOR VARIOUS CONTINUOUS BEAMS

吉 沢 孝 和\*・谷 本 勉之助\*\*

By Norikazu Yoshizawa and Bennosuke Tanimoto

#### 1. ま え が き

構造解析へのマトリクス代数の応用は、近年の電子計算機の普及と相まって、急速な発展を示してきた<sup>1)・2)</sup>。

ここに述べる演算子法 (operational method) もまた、マトリクス代数による構造解析の一法であるが、これは筆者の1人が先年、ASCE誌上に発表した2編の論文<sup>3)・4)</sup>にその発端をみるものである。

本文では、骨組構造解析の基礎ともなるべき連続ばりの解析について記述した。ここで取り扱ったものは、普通のはり、弾性床の上のはり、および軸圧力を受けるはりの3種類の系であるが、解析手順の上から共通な性質を有する事項については、すべて表にまとめ、全体として総合的な記述を試みた。なお、本文は、信州大学工学部紀要に発表した数編の論文<sup>5)・6)・7)・8)</sup>を集約したものである。

#### 2. 演算子法の概要

演算子法に関する基本的な思想とその手順を、連続ばりの場合について要約するとつぎのようである。

(1) 一般に、ネットワーク系構造物は、トポロジカルな構成単位 (ユニット) の集合体であると考えることができる。本文で取り扱う連続ばりの構造体系は、構成要素たるそれぞれの径間が相互に結合されて形成されたものである。したがって各径間をユニットとみだてて解析を進める。

(2) ユニットの力学的な挙動を支配するパラメータを1本の列ベクトルに並べ、これをそのユニットの固有マトリクス (eigenmatrix)<sup>9)・10)</sup>と名づける。連続ばりの解析では、この固有マトリクスの要素として、はりの曲げに関する微分方程式の一般解の積分定数群が用い

られる。

(3) 隣り合う径間 ( $i-1$ ) および径間 ( $i$ ) の間における適合条件と平衡条件とを系統的に処理すると、これら2つの径間の固有マトリクスの間につぎのような漸化式が導かれる。本法ではこれを移行公式 (shift formula) と呼ぶ。

$$N_i = S_i N_{i-1} + F_i K_{i-1} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $N_{i-1}$ 、 $N_i$  は径間 ( $i-1$ )、( $i$ ) の固有マトリクスである。 $S_i$  は一方の固有マトリクスを他方のそれに移行するための移行演算子 (shift operator)<sup>3)・4)</sup>、 $F_i$  は荷重の影響を導入する補給演算子 (feed operator)<sup>5)・6)</sup>、 $K_{i-1}$  は径間 ( $i-1$ ) の荷重項 (load term)<sup>6)</sup> である。

(4) 与えられた系について基準となる径間を選定し、その固有マトリクスを移行公式により系全体に流通させる。よってこのように選ばれた固有マトリクスを流通マトリクス (current matrix)<sup>6)</sup> と呼ぶ。

(5) 流通マトリクスの値は通常、考えている系の境界条件によって決定される。これもまた、系統的なマトリクス演算で処理されるが、その際、与えられた境界条件に完全対応する演算マトリクスが導かれる。これを境界マトリクス (boundary matrix)<sup>9)・10)</sup> と呼ぶ。

(6) 本法はこれを代数学的にみるならば、各種の性質の異なるデータを完全に分類整理して導かれたところのマトリクス演算子による解析法といえよう。流通マトリクスの移行演算は、各種の演算子の単なる内積計算に帰着し、解析の最終段階において、流通マトリクスの値を決定するための逆マトリクス計算を必要とするだけである。このような手法により、構造解析の思想も計算も、きわめて平易なものとなしうる。

また、本文で述べるはりの基本式に、事前に特定の境界条件を与えて処理することにより、三連モーメント法、たわみ角法、モーメント分配法等の在来の各種の曲げ理論式<sup>11)</sup>が得られ、演算子法的見地からそれらの特性を説明することができる<sup>12)</sup>。さらにレダクション法との関連性<sup>13)</sup>についても、同様の考察が可能である。なお、本法

\* 正会員 信州大学助手 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工博・理博 信州大学教授 工学部土木工学科

の思想と手順を仕米の心刀法、変形法等に心用し、かなり良い改良点と成果を得ている<sup>14),15)</sup>。これらの問題に関する記述はまた別の機会にゆずりたい。

### 3. 基本式

ここでは、はりの解析において用いられる基本式を示す。本法では座標はすべて無次元化したものを用いている。すなわち、はりの中立軸上の任意点の座標は  $\rho = x/L$  で与えられる。ここに  $x$  ははりの左端から右向きにとった流通座標、 $L$  ははりの長さである。

一般に、はりの任意点  $\rho$  における物理量は次式で与えられる：

$$W(\rho) = DP(\rho)[N + K(\rho)] \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $W(\rho)$  = 状態ベクトル、 $D$  = 係数マトリクス、 $P(\rho)$  = 座標マトリクス、 $N$  = 固有マトリクス、 $K(\rho)$  = 荷重マトリクスである。これらのマトリクスに関する定義を以下に示す。

#### (1) 状態ベクトル (state vector) $W(\rho)$ <sup>16),17)</sup>

はり上の一点  $\rho$  における物理量をひとつの列ベクトルに並べたものである。すなわち、

$$W(\rho) = \{w \ \theta \ M \ S\}_\rho \dots\dots\dots(3)$$

ここに、上式の列ベクトルの中の要素は順に、はりの  $\rho$  点でのたわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力を示している。

#### (2) 係数マトリクス (coefficient matrix) $D$ .

上記のそれぞれの物理量に関する係数を正方マトリクスの対角要素に並べたものである。これは各種のはりについてつぎのように与えられる：

a) 普通のはり

$$D = \text{diag} \left[ \frac{L^3}{6EI} \ \frac{L^2}{6EI} \ -\frac{L}{3} \ -1 \right] \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $E$  = 弾性係数、 $I$  = 断面二次モーメント

b) 弾性床上的はり

$$D = \text{diag} \left[ \frac{L^3}{2\beta^3 EI} \ \frac{L^2}{2\beta^2 EI} \ -\frac{L}{\beta} \ -1 \right] \dots\dots\dots(5)$$

ここに、

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{KL^4}{4EI}}, \ K = \text{地盤係数} \dots\dots\dots(6)^{18)}$$

c) 軸圧力を受けるはり

$$D = \text{diag} \left[ \frac{L^3}{\alpha^3 EI} \ \frac{L^2}{\alpha^2 EI} \ -\frac{L}{\alpha} \ -1 \right] \dots\dots\dots(7)$$

ここに、

$$\alpha = \sqrt{\frac{QL^2}{EI}}, \ Q = \text{軸圧力} \dots\dots\dots(8)^{18)}$$

#### (3) 座標マトリクス (abscissa matrix) $P(\rho)$

はりの座標に関連したマトリクスで、上記の状態ベクトルの各要素に対応してつぎのように与えられる：

a) 普通のはり

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ 0 & 1 & 2\rho & 3\rho^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

b) 弾性床上的のはり

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_1 - \psi_2 & \psi_1 + \psi_2 & -\psi_3 - \psi_4 & \psi_3 - \psi_4 \\ -\psi_2 & \psi_1 & \psi_4 & -\psi_3 \\ -\psi_1 - \psi_2 & \psi_1 - \psi_2 & \psi_3 - \psi_4 & \psi_3 + \psi_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= e^{\beta\rho} \cos \beta\rho, \ \psi_2 = e^{\beta\rho} \sin \beta\rho, \\ \psi_3 &= e^{-\beta\rho} \cos \beta\rho, \ \psi_4 = e^{-\beta\rho} \sin \beta\rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

c) 軸圧力を受けるはり

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha\rho & \cos \alpha\rho & \sin \alpha\rho \\ 0 & 1 & -\sin \alpha\rho & \cos \alpha\rho \\ 0 & 0 & -\cos \alpha\rho & -\sin \alpha\rho \\ 0 & 0 & \sin \alpha\rho & -\cos \alpha\rho \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

#### (4) 固有マトリクス (eigenmatrix) $N$

はりの曲げの微分方程式の一般解の積分定数群を列ベクトルに並べたもので、次式で与えられる：

$$N = \{A \ B \ C \ D\} \dots\dots\dots(13)$$

考えているはりの力学挙動はすべてこの固有マトリクスによって支配されることになる。

式(3)に示した状態ベクトル  $W(\rho)$  と固有マトリクス  $N$  とは全完に対応している。

#### (5) 荷重マトリクス (load-matrix) $K(\rho)$

図-1 はりに作用する外力に関する荷重マトリクスの取扱い方を示したものである。荷重の作用点の座標  $\xi$  もまた無次元化して  $\kappa = \xi/L$  で表わすことにしている。荷重の作用点において、状態ベクトルの連続条件を式

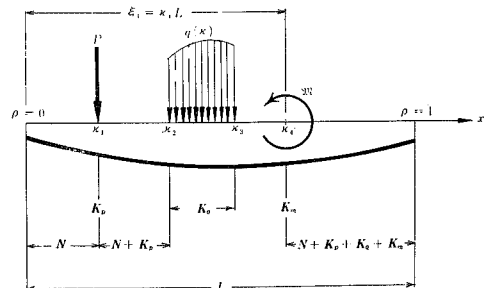


図-1 荷重マトリクス

(2) に注目して処理すると荷重マトリクスが得られる。これを用いると、荷重の影響は単に、固有マトリクス  $N$  にそれぞれの荷重点で当該荷重に関する荷重マトリクスを加えこむことによって処理されることになる。

$$\left. \begin{aligned} 0 < \rho < \kappa_1 : W(\rho) &= DP(\rho)N \\ \kappa_1 < \rho < \kappa_2 : W(\rho) &= DP(\rho)[N+K_p] \\ \kappa_2 < \rho < \kappa_3 : W(\rho) &= DP(\rho)[N+K_p+K_q(\rho)] \\ \kappa_3 < \rho < \kappa_4 : W(\rho) &= DP(\rho)[N+K_p+K_q] \\ \kappa_4 < \rho < 1 : W(\rho) &= DP(\rho)[N+K_p+K_q+K_m] \\ &\dots\dots\dots(14) \end{aligned} \right\}$$

b) 弾性床上的のはり

$$\left. \begin{aligned} K_p &= \frac{P}{4} \{-\psi_3 - \psi_4, \psi_3 - \psi_4, \psi_1 - \psi_2, \psi_1 + \psi_2\} \kappa_1 \\ K_q &= \frac{L}{4} \int_{\kappa_2}^{\kappa_3} q(\kappa) \{-\psi_3 - \psi_4, \psi_3 - \psi_4, \psi_1 - \psi_2, \psi_1 + \psi_2\} d\kappa \\ K_m &= \frac{\beta \mathfrak{M}}{2L} \{-\psi_4, \psi_3, \psi_2, -\psi_1\} \kappa_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

c) 軸圧力を受けるはり

$$\left. \begin{aligned} K_p &= P \{-\alpha \kappa_1, 1, \sin \alpha \kappa_1, -\cos \alpha \kappa_1\} \\ K_q &= L \int_{\kappa_2}^{\kappa_3} q(\kappa) \{-\alpha \kappa, 1, \sin \alpha \kappa, -\cos \alpha \kappa\} d\kappa \\ K_m &= \frac{\alpha \mathfrak{M}}{L} \{1, 0, -\cos \alpha \kappa_4, -\sin \alpha \kappa_4\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここにそれぞれ、 $K_p$  = 集中荷重、 $K_q$  = 分布荷重、 $K_m$  = 外力モーメントによる荷重マトリクスである。各種のばりについて、これらはつぎのように与えられる：

a) 普通のはり

$$\left. \begin{aligned} K_p &= -P \{-\kappa_1^3, 3\kappa_1^2, -3\kappa_1, 1\} \\ K_q &= L \int_{\kappa_2}^{\kappa_3} q(\kappa) \{-\kappa^3, 3\kappa^2, -3\kappa, 1\} d\kappa \\ K_m &= \frac{3}{L} \mathfrak{M} \{\kappa_4^2, -2\kappa_4, 1, 0\} \end{aligned} \right\} \dots(15)$$

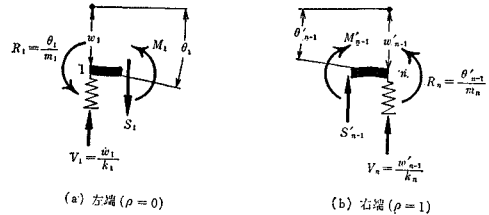


図-2 境界条件

4. 境界条件

つぎにはりの境界条件について述べる。はりの境界条件を一般的な形で表わすために、はりの両端が弾性的に支持されている場合を考える。その状態を 図-2 (a), (b) に示す。(a) は連続ばりの左端の支点、(b) は右端の支点である。支点番号は左端から順につけてある。こ

れらの支点においては、たわみ  $w$  に比例した垂直反力  $V$  と、たわみ角  $\theta$  に比例した抵抗モーメント  $R$  とが生じているものとする。これらの間のばね定数をそれぞれ  $k, m$  とすれば、各支点での力のつり合い条件はつぎのように表わされる：

表-1 境界マトリクス

	左 端 $B$	右 端 $B'$
普通のはり	$\begin{bmatrix} 0, & 1, & -\frac{2EIm_1}{L}, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & \frac{6Elk_1}{L^3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 2 + \frac{2EIm_n}{L}, & 3 + \frac{6EIm_n}{L} \\ 1, & 1, & 1, & 1 - \frac{6Elk_n}{L^3} \end{bmatrix}$
弾性床上的のはり	$\begin{bmatrix} 1, & 1 - \frac{2\beta EIm_1}{L}, \\ -1 + \frac{L^3}{2\beta^3 Elk_1}, & 1, \\ & -1, & 1 + \frac{2\beta EIm_1}{L} \\ & 1 + \frac{L^3}{2\beta^3 Elk_1}, & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \phi_1 - \left(1 + \frac{2\beta EIm_n}{L}\right) \phi_2, & \left(1 + \frac{2\beta EIm_n}{L}\right) \phi_1 + \phi_2, \\ \left(1 + \frac{L^3}{2\beta^3 Elk_n}\right) \phi_1 + \phi_2, & -\phi_1 + \left(1 + \frac{L^3}{2\beta^3 Elk_n}\right) \phi_2, \\ -\phi_3 - \left(1 - \frac{2\beta EIm_n}{L}\right) \phi_4, & \left(1 - \frac{2\beta EIm_n}{L}\right) \phi_3 - \phi_4 \\ \left(-1 + \frac{L^3}{2\beta^3 Elk_n}\right) \phi_3 + \phi_4, & -\phi_3 + \left(-1 + \frac{L^3}{2\beta^3 Elk_n}\right) \phi_4 \end{bmatrix}$ $\phi_1 = e^\beta \cos \beta, \phi_2 = e^\beta \sin \beta, \phi_3 = e^{-\beta} \cos \beta, \phi_4 = e^{-\beta} \sin \beta$
軸力はり	$\begin{bmatrix} 0, & 1, & \frac{\alpha EIm_1}{L}, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & -\frac{\alpha^3 Elk_1}{L^3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0, & -1, & \sin \alpha + \frac{\alpha EIm_n}{L} \cos \alpha, & -\cos \alpha + \frac{\alpha EIm_n}{L} \sin \alpha \\ 1, & \alpha, & \cos \alpha - \frac{\alpha^3 Elk_n}{L^3} \sin \alpha, & \sin \alpha + \frac{\alpha^3 Elk_n}{L^3} \cos \alpha \end{bmatrix}$

$$\text{左端 } (\rho=0) : \begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} \frac{\theta}{m} \\ -\frac{w}{k} \end{bmatrix}_1 = 0 \dots\dots\dots(18)$$

$$\text{右端 } (\rho=1) : \begin{bmatrix} M' \\ S \end{bmatrix}'_{n-1} + \begin{bmatrix} -\frac{\theta'_{n-1}}{m_n} \\ \frac{w'_{n-1}}{k_n} \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots(19)$$

ここに、各径間の右端 ( $\rho=1$ ) における物理量にはプライム (') をつけ、左端 ( $\rho=0$ ) におけるものには何もつけないで区別することにしてある。この記法は以後、本文全体に通用するものとする。さて、状態ベクトルの基本式 (2) を用いれば、式 (18), (19) に示される境界条件は結局、つぎの式を計算することに帰着する：

$$\text{左端 } (\rho=0) : \mathbf{B} \mathbf{N}_1 = 0 \dots\dots\dots(20)$$

$$\text{右端 } (\rho=1) : \mathbf{B}' \mathbf{N}'_{n-1} = \mathbf{B}' [\mathbf{N} + \mathbf{K}]_{n-1} = 0 \dots\dots(21)$$

ここに、 $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}'$  は境界マトリクス (boundary matrix) と呼ばれる 2 行 4 列の矩形マトリクスである。その値は各種のはりについて 表-1 のように与えられる。また  $\mathbf{K}_{n-1}$  は右端の第 ( $n-1$ ) 径間における荷重マトリクスの総計を示し、その径間の荷重項 (load term)<sup>6)</sup> と呼ばれる。

表-1 でばね定数  $k$ ,  $m$  の値のとり方によって、すべての境界条件を処理することができる。その例を 表-2 に示した。このほかにも

	$k$	$m$
弾性端	$k$	$m$
埋込端	0	0
単純端	0	$\infty$
自由端	$\infty$	$\infty$

$k, m$  の値の組み合わせ方によって、種々の境界条件を設定することができる。

### 5. 結合条件

ここでは、連続ばりの各個の構成径間をユニットにとる。そしてそれらが横方向に結合されてひとつの構造体系が形成されるものと考えて解析を進める。

隣り合う 2 つの構成径間の結合条件は、結合点におけるそれら両径間の状態ベクトルの適合条件および平衡条件を処理することによって満足する。ここで、連続ばりの中間支点が前記の境界条件の項で述べたのと同様に、弾性的に支持されているものとするれば、この点での結合条件はつぎのように表わされる：

$$-\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}'_{i-1} + \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \\ \frac{\theta}{m} \\ -\frac{w}{k} \end{bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 $k_i, m_i$  は中間支点  $i$  におけるばね定数である。

これらの値のとり方によって、各種の結合条件を表わすことができる。たとえば、 $k_i = m_i = \infty$  とおけば、プレートガーダーなどにみられる断面形状の階段的变化部における結合条件となる。また、 $k_i = 0, m_i = \infty$  とおけば、これは剛支承における結合条件を示す。

これが、剛支承とピンジョイントの組み合わせのみで構成されるような連続ばり<sup>5)</sup> の場合には、式 (22) の形を用いるよりも、つぎのような手順によるほうが思想上と能率上からみて、より有効である。すなわち、各構成径間について、径間の端部が剛支承につながる場合には、たわみが 0、ピンジョイントにつながる場合にはその端部の曲げモーメントが 0 という条件を、系全体について処理する。これにより、式 (13) に示した固有マトリクスの要素の値が 2 個確定し、未知量が半分に減る。このことを、たとえば、左端が剛支承、右端がピンジョイントにつながる構成径間をとって考えてみると、普通のはりの場合、固有マトリクスはつぎの形で表わされる：

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_i \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$\mathbf{A}_i = \{B D\} \dots\dots\dots(24)$$

また、 $\mathbf{K}_i$  は荷重項である。 $\mathbf{A}_i$  を半固有マトリクス (semi-eigenmatrix) と呼ぶ<sup>5)</sup>。事前に上のような処理をしたあとには、結合条件としてつぎのものを考えればよい：

剛支承：

$$-\begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}'_{i-1} + \begin{bmatrix} \theta \\ M \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\theta}{m} \end{bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots(25)$$

ピンジョイント：

$$-\begin{bmatrix} w \\ S \end{bmatrix}'_{i-1} + \begin{bmatrix} w \\ S \end{bmatrix}_i - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w}{k} \end{bmatrix}_i = 0 \dots\dots\dots(26)$$

さて、式 (22) に示した結合条件は、式 (2) によってつぎの形に書きかえられる：

$$\mathbf{C}_i \{ \mathbf{N}'_{i-1} \mathbf{N}_i \} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

これが中間支点における結合条件式である。 $\mathbf{C}_i$  を結合マトリクス (connection matrix) と呼ぶ。その値は各種のはりに対して 表-3 のように与えられる。

式 (25), (26) から同様な手法で結合マトリクスが得られるが、その次数は式 (24) に示した半固有マトリクスの次数に対応したものとなる。この場合、構成径間の両端の支持方式の組み合わせによって 7 種類の結合マトリクスが誘導される<sup>5)</sup>。

表-3 結合マトリクス  $C_i$

普通 の は り	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma\mu & \gamma & 0 \\ \frac{\lambda}{6} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i$
弾性 床 上 の は り	$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1 - \phi_2 & \phi_1 + \phi_2 & -\phi_3 - \phi_4 & \phi_3 - \phi_4 \\ -\phi_2 & \phi_1 & \phi_4 & -\phi_3 \\ -\phi_1 - \phi_2 & \phi_1 - \phi_2 & \phi_3 - \phi_4 & \phi_3 + \phi_4 \end{bmatrix}_{i-1}, - \begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{\varepsilon\xi^3} & 0 & \frac{\gamma^3}{\varepsilon\xi^3} & 0 \\ \frac{\gamma^2}{\varepsilon\xi^2} & \frac{\gamma^2}{\varepsilon\xi^2} & -\frac{\gamma^2}{\varepsilon\xi^2} & \frac{\gamma^2}{\varepsilon\xi^2} \\ -\frac{\gamma\mu}{2\beta\xi} & \frac{\gamma}{\xi}\left(1 - \frac{\mu}{2\beta}\right) & \frac{\gamma\mu}{2\beta\xi} & -\frac{\gamma}{\xi}\left(1 + \frac{\mu}{2\beta}\right) \\ \frac{\lambda}{2\beta^3} - 1 & 1 & \frac{\lambda}{2\beta^3} + 1 & 1 \end{bmatrix}_i$
軸 力 は り	$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 1 & -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}_{i-1}, - \begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{\varepsilon\nu^3} & 0 & \frac{\gamma^3}{\varepsilon\nu^3} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\varepsilon\nu^2} & 0 & \frac{\gamma^2}{\varepsilon\nu^2} \\ 0 & -\frac{\gamma\mu}{\alpha\nu} & -\frac{\gamma}{\nu} & \frac{\gamma\mu}{\alpha\nu} \\ \frac{\lambda}{\alpha^3} & 0 & \frac{\lambda}{\alpha^3} & -1 \end{bmatrix}_i$
$\gamma_i = \frac{L_i}{L_{i-1}}, \quad \varepsilon_i = \frac{EI_i}{EI_{i-1}}, \quad \lambda_i = \left(\frac{L^3}{EIk}\right)_i, \quad \mu_i = \left(\frac{L}{EI m}\right)_i, \quad \nu_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \xi_i = \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}$	

6. 移行演算子

表-3 に示した結合マトリクスはいずれも

$$C_i = [c'_{i-1} \ c_i] \dots\dots\dots(28)$$

の形で与えられている。 $c'_{i-1}$ ,  $c_i$  はそれぞれ4次の正方マトリクスである。これを式(27)に代入して整理すれば、隣り合う2つの径間の固有マトリクス  $N_{i-1}$ ,  $N_i$  の間の関係がつぎのように表わされる。

$$N_i = -c_i^{-1} c'_{i-1} [N + K]_{i-1} = S_i [N + K]_{i-1} \dots\dots(29)$$

$$S_i = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\gamma^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon\mu}{2\gamma^2} & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ -\frac{\varepsilon\lambda}{6\gamma^3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i-1} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{\gamma^3} & \frac{\varepsilon}{\gamma^3} & \frac{\varepsilon}{\gamma^3} & \frac{\varepsilon}{\gamma^3} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{\gamma^2} & \frac{2\varepsilon}{\gamma^2} & \frac{3\varepsilon}{\gamma^2} \\ 0 & \frac{\varepsilon\mu}{2\gamma^2} & \frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{\varepsilon\mu}{\gamma}\right) & \frac{3}{\gamma}\left(1 + \frac{\varepsilon\mu}{2\gamma}\right) \\ -\frac{\varepsilon\lambda}{6\gamma^3} & -\frac{\varepsilon\lambda}{6\gamma^3} & -\frac{\varepsilon\lambda}{6\gamma^3} & 1 - \frac{\varepsilon\lambda}{6\gamma^3} \end{bmatrix}_i \dots\dots(31)$$

$$S'_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i-1} \begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma\mu & \gamma & 0 \\ \frac{\lambda}{6} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^3}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{6} & \gamma\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} - \frac{\mu}{2}\right) & \gamma & -1 \\ \frac{\lambda}{2} & \gamma\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} + \mu\right) & -2\gamma & 3 \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{1}{2}\gamma\mu & \gamma & -3 \\ \frac{\lambda}{6} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \dots\dots\dots(32)$$

$N_{i-1} = -c'_{i-1} c_i N_i - K_{i-1} = S'_i N_i - K_{i-1} \dots\dots(30)$   
 式(29)によって左径間(i-1)の固有マトリクス  $N_{i-1}$  が右径間(i)の固有マトリクス  $N_i$  に移行する。このような意味でマトリクス  $S_i$  を右移行演算子(rightward shift operator)と呼ぶ。同様に、式(30)の  $S'_i$  を左移行演算子(leftward shift operator)<sup>9)</sup>と呼ぶ。普通のはりの場合のこれらの移行演算子の値を式(31), (32)に示した。弾性床の上のはりや軸圧力を受けるはりについては、 $c'_{i-1}$ ,  $c_i$  の逆マトリクスの姿が複雑になるので、これを数式の形で与えずに数値的に解いていくのが望ま

しい。

これが剛支承またはピンジョイントのみの組み合わせによって構成されるような連続ばりの解析では、式(25)または式(26)の条件を処理することにより、両径間の半固有マトリクス  $A_{i-1}$ ,  $A_i$  の間の移行演算をつぎの形で進めることができる<sup>5)</sup>：

$$A_i = L_i A_{i-1} + Q_i K_{i-1} + R_i K_i \dots \dots \dots (33)$$

$$A_{i-1} = L'_i A_i + Q'_i K_{i-1} + R'_i K_i \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 $L_i$ ,  $L'_i$  は半固有マトリクスの移行演算子で、その次数は2行2列である。一方、 $Q_i$ ,  $Q'_i$ ,  $R_i$ ,  $R'_i$  はそれぞれ2行4列の矩形マトリクスで、関係する径間の荷重項の影響を導入するための演算子である。これらを補給演算子 (feed operators) と呼ぶ<sup>5),6)</sup>。式(29)はたまたま、移行演算子と補給演算子とが同一のマトリクスで与えられる場合である。

### 7. 移行演算

式(29), (30), (33), (34) は、連続ばりのたがいに

$$N_1 = - \left[ \begin{matrix} B \\ B' S_n S_{n-1} \dots S_2 \end{matrix} \right]^{-1} \left[ \begin{matrix} B' [S_n S_{n-1} \dots S_2 K_1 + \dots + S_n S_{n-1} K_{n-2} + S_n K_{n-1} + K_n] \\ 0 \end{matrix} \right] \dots \dots \dots (35)$$

ここに4次の逆マトリクスの計算が介入する。これが、剛支承とピンジョイントのみの組み合わせで構成されるような系の場合には、式形は多少複雑にはなるが、上記のような手順を用いたときの最終段階での逆マトリクスの次数は2次となる。

与えられた系に対する解析手順の設計は、移行チャート (shifting chart)<sup>6)</sup> を用いて進めると都合がよい。図-3 にその一例を手計算による場合について示した。ここでは最終条件は右端の境界条件で与えられ、逆マトリクスの次数は2次となる。図の中で、 $\odot$  の中の数字は各径間の固有マトリクスの初期の次数、 $\circ$  は条件式の処理によって低減した次数、 $\square$  は各径間で独立に与えうる境界条件の数、 $\diamond$  は隣り合う径間同士の結合条件の数を示す。また、 $\Rightarrow$  は移行の方向である。

### 8. 図形マトリクス

流通マトリクスの値が決定すれば、これを移行公式に代入して系全体の固有マトリクスの値を直ちに求めることができる。この場合の解は、つぎの形で表わされる。

ただし、考えている系を  $n$  径間の連続ばりとした。

$$\{N\}_n = [G] \{K\}_n \dots \dots \dots (36)$$

ここに、

$$\{N\}_n = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_n\} \dots \dots \dots (37)$$

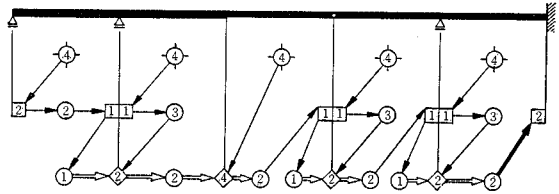


図-3 移行チャート

隣り合う径間の固有マトリクスまたは半固有マトリクスの間に導かれた漸化式で、本法ではこれを移行公式 (shift formula) と呼ぶ<sup>5),6)</sup>。このような式を反復して用いることにより、基準にえらんだ径間の固有マトリクスを考えている系の径間全体に流通させることができる。したがって、これを流通マトリクス (current matrix)<sup>6)</sup> と呼ぶ。このような移行演算を行なったあとに、両端の境界条件を式(20), (21)の形で処理すると、流通マトリクスの値が決定される。以上が本法の標準的な手順である。

隣接する固有マトリクス間の関係が単に、式(29)または式(30)で与えられるような系では、左端の第1径間の固有マトリクス  $N_1$  を基準にとって系全体に流通させたとき、その解はつぎのようになる：

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & \dots & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (38)$$

$$\{K\}_n = \{K_1 \ K_2 \ K_3 \ \dots \ K_n\} \dots \dots \dots (39)$$

マトリクス  $[G]$  は  $4n$  次の正方マトリクスである。これは、構成部材の材質  $E$  と図形量  $I, L$  のみによって決定し得るものであって、荷重条件とは全く無関係である。よってこれを図形マトリクス (geometry matrix)<sup>6)</sup> と名づける。この値を求めておけば、どのような荷重条件についてでも、それに対応する固有マトリクスの値がただちに計算され、すべての物理量の値が式(2)によって与えられることになる。また、図形マトリクスを用いて、各種の影響線も数式の形で得ることができる。具体例については以下の例題に示す。

### 9. 計算例

#### 例題 1.

図-4 に示した2径間の連続ばりについて、 $E, I, L$  が両径間ともに等しいものとして計算すれば、図形マトリクスはつぎのように得られる：

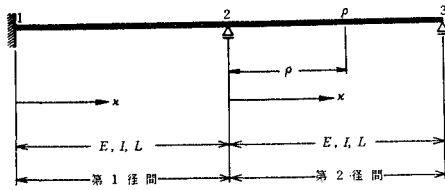


図-4 2 径間の連続ばり

$$[G] = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -12 & -7 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & -7 & -3 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & -6 & -6 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -7 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(40)$$

この値を用いて各種物理量の影響線を求めた結果をつぎに示した。ただし、 $\kappa$  は単位荷重  $P=1$  の無次元座標で、図のように各径間の左端からとるものとする。

(a) 埋込端 1 の曲げモーメントの影響線の式

$$\left. \begin{aligned} \text{第 1 径間:} \\ M_1 = L(-0.714 \kappa^3 + 1.714 \kappa^2 - \kappa) \\ \text{第 2 径間:} \\ M_1 = L(0.143 \kappa^3 - 0.429 \kappa^2 + 0.286 \kappa) \end{aligned} \right\} \dots\dots(41)$$

(b) 中間支点 2 のたわみ角の影響線の式

$$\left. \begin{aligned} \text{第 1 径間:} \\ \theta_2 = \frac{L^2}{EI}(0.143 \kappa^3 - 0.143 \kappa^2) \\ \text{第 2 径間:} \\ \theta_2 = \frac{L^2}{EI}(0.071 \kappa^3 - 0.214 \kappa^2 + 0.143 \kappa) \end{aligned} \right\} \dots\dots(42)$$

(c) 左支点 3 の反力の影響線の式

$$\left. \begin{aligned} \text{第 1 径間:} \\ V_3 = 0.429(-\kappa^3 + \kappa^2) \\ \text{第 2 径間:} \\ V_3 = 0.286 \kappa^3 - 0.857 \kappa^2 - 0.429 \kappa \end{aligned} \right\} \dots\dots(43)$$

(d) 第 2 径間の任意点  $\rho$  におけるたわみの影響線の式

$$\left. \begin{aligned} \text{第 1 径間:} \\ w_\rho = \frac{L^3}{2EI}(\rho^3 - 3\rho^2 + 2\rho)(\kappa^3 - \kappa^2) \\ \text{第 2 径間 } \rho \text{ 点より左側:} \\ w_\rho = \frac{L^3}{6EI}[(-2\rho^3 + 6\rho^2 + 3\rho - 7)\kappa^3 \\ + (6\rho^3 - 18\rho^2 + 12\rho)\kappa^2 \\ + (3\rho^3 - 12\rho^2 + 6\rho)\kappa] \\ \text{第 2 径間 } \rho \text{ 点より右側:} \end{aligned} \right\}$$

$$w_\rho = \frac{L^3}{6EI} [(-2\rho^3 + 6\rho^2 + 3\rho)(\kappa^3 - 3\kappa^2) + 3(\rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho)\kappa - 7\rho^3] \dots\dots\dots(44)$$

例題 2<sup>9)</sup>

図-5 は簡単なドルフィンを示す。①の部分は普通の

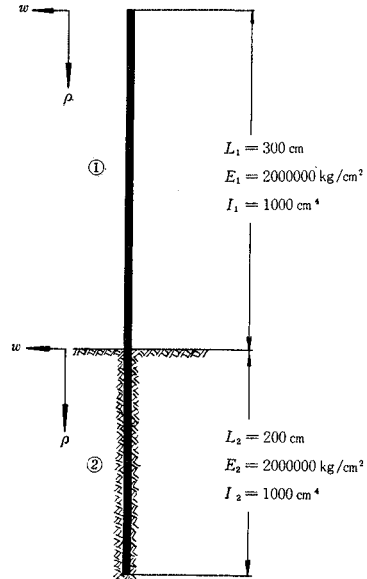


図-5 ドルフィン

はりとしての力学挙動を示し、②の地盤内に埋めこまれた部分は、そこに生ずるたわみと地盤反力とが比例するものと仮定すれば、これを弾性床上的のはりとして取り扱うことができる。よってこのような系を解くことは、普通のはりと弾性床上的のはりとを結合する問題に帰着する。まず、①および②のはりについて、端部の境界条件を個別に処理して、それぞれの固有マトリクスの次数を 2 次に低減させる。このようにしたのちに、おのおのはりの基本式に注目しながら結合点における状態ベクトルの結合条件を処理すればよい。この場合の解はつぎの形で与えられる：

$$\{N_0, N_e\} = [G]\{K_0, K_e\} \dots\dots\dots(45)$$

ここに、 $N_0, N_e$  はそれぞれ、はり①、②の固有マトリクスである。また、 $K_0$  には式 (15) で与えられるような普通のはりの荷重マトリクスを用い、 $K_e$  には式 (16) で与えられるような弾性床上的のはりの荷重マトリクスを用いることになる。

図-5 に示したような値について電算を用いて計算した結果、図形マトリクスはつぎのように得られた。ただし、地盤係数  $K=10 \text{ kg/cm}^2$  とした。

$$[G] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4.204 & 14.655 & -2.629 & 9.375 & 1.572 & -1.402 \\ 0 & -1 & -4.491 & -12.612 & 1.195 & -7.270 & -1.195 & 1.109 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.014 & 0.080 & -1.040 & 0.063 & 0.040 & 0.017 \\ 0 & 0 & -0.363 & -1.407 & 0.317 & -1.928 & -0.317 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1.335 & 5.678 & -1.674 & 3.919 & 0.674 & -0.571 \\ 0 & 0 & -0.958 & -3.191 & 0.317 & -1.928 & -0.317 & 0.294 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(46)$$

例題 3<sup>2)</sup>

軸圧力を受けるはりの基本式は、連続長柱の固有値問題に適用することができる。危険荷重は、式(35)の姿を参照すれば結局、条件式

$$\begin{vmatrix} B \\ B^T S_n S_{n-1} \dots S_2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

を満足させるような軸力値  $Q$  を見出す問題となることがわかる。図-6 に示すような4種類の系について危険荷重の値を求めたところ、表-4 のような結果を得た。2次、3次の固有値も一応、参考までに記載した。

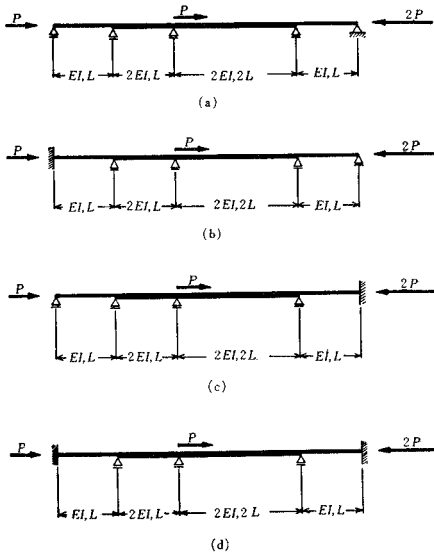


図-6 軸圧力を受ける連続ばり

表-4 危険荷重 ( $\times \frac{EI}{L^2}$ )

	系 (a)	系 (b)	系 (c)	系 (d)
1 次	4.266	4.286	5.052	5.087
2 次	8.556	8.461	10.933	11.197
3 次	12.943	13.471	15.364	17.563

例題 4<sup>2)</sup>

図-7 のようなラーメンは、各部材の伸縮を無視すれば、連続ばりの場合と同じ手順で解くことができる。この系の図形マトリクスを求め、それより第1径間の任意点  $\rho$  におけるたわみの影響線の式を書きだせば、つぎのようである：

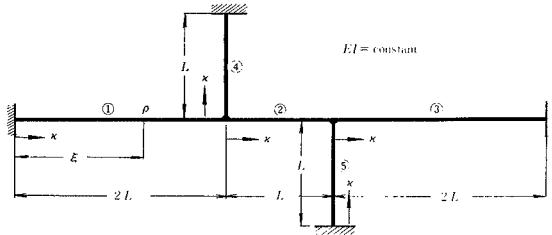


図-7 節点移動の生じないラーメン

第1径間  $\rho$  点より左側：

$$w = \frac{4L^3}{3EI} [-\kappa^3 + 3\kappa^2\rho + (2.688\kappa^3 - 5.688\kappa^2)\rho^2 + (1.688\kappa^3 + 2.688\kappa^2)\rho^3]$$

第1径間  $\rho$  点より右側：

$$w = \frac{4L^3}{3EI} [(2.688\kappa^3 - 5.688\kappa^2 + 3\kappa)\rho^2 + (1.688\kappa^3 + 2.688\kappa^2 - 1)\rho^3]$$

第2径間：

$$w = \frac{4L^3}{3EI} (0.125\kappa^2 - 0.281\kappa + 0.156)(\rho - 1)\kappa\rho^2$$

第3径間：

$$w = \frac{4L^3}{3EI} (-0.062\kappa^2 + 0.125\kappa - 0.063) \cdot (\rho - 1)\kappa\rho^2$$

第4径間：

$$w = \frac{4L^3}{EI} (0.052\kappa^2 - 0.104\kappa + 0.052)(\rho - 1)\kappa\rho^2$$

第5径間：

$$w = \frac{0.04L^3}{EI} (-\kappa + 1)(\rho - 1)\kappa^2\rho^2$$

.....(48)

10. あとがき

本法は、ネットワーク系構造物のトポロジカルな性質に注目した解析法である。ここでは、連続ばりの解法を普通のはり、弾性床上的はりおよび軸圧力を受けるはりの3種類の系について総括的に述べた。これと全く同じ手順で、軸圧力を受ける弾性床上的連続ばり、連続ばりの自由振動等の解析もできる。

演算子法では、はりの未知量をその微分方程式の一般解の積分定数群に選んでおり、状態ベクトル<sup>16), 17)</sup>は式(2)の形で与え、これを移行の対象としていない。ま



た本法は性質の異なるデータをそれぞれのマトリクスによって完全に分類した形から解析が出發しているため、構成径間の両端の状態ベクトルの関係は、単に座標マトリクス  $P$  と荷重項  $K$  の値をかえるだけのことになる。移行演算は常に、未知量たる固有マトリクス  $N$  と、既知量たる荷重項  $K$  とが完全に分離された姿で進められる。そして結果として図形マトリクスが得られる。図形マトリクスは、例題1にも示したように、実用上、設計問題に応用すると有効である。

本研究にあたって筆者らは、信州大学助教授 夏目正太郎先生からは、電算のプログラミングに関して、数多くのご指導をいただいた。本文の例題2, 例題3は、当学の FACOM 231 によるものである。また、信州大学工学部 浜野浩幹教官、石川清志技官からは、数式の検算について多大のご協力を得た。終りにあたって、上記の諸氏に対して深く感謝の意を表します。

記号

本文で用いた記号をつぎに示す。各種のマトリクスについては、[ ] の中にその次数を示した。[ $m \times n$ ] は  $m$  行  $n$  列のマトリクスを表わす。

$A$  = 半固有マトリクス [2×1] (式 24)

$A, B, C, D$  = 固有マトリクスの要素 (式 13)

$B, B'$  = 境界マトリクス [2×4] (式 20, 21) (表—1)

$C$  = 結合マトリクス [4×8] (式 27) (表—2)

$D$  = 係数マトリクス [4×4] (式 4, 5, 6)

$E$  = 弾性係数

$F$  = 補給演算子 [4×4]

$G$  = 図形マトリクス (式 38)

$I$  = 断面二次モーメント

$K$  = 荷重項 [4×1] (式 21)

$K(\rho)$  =  $\rho$  点の荷重マトリクス [4×1] (式 15, 16, 17)

$K$  = 地盤係数

$k = w/V$  = ばね定数 (図—2)

$L, L'$  = 半固有マトリクスの移行演算子 [2×2] (式 33, 34)

$L$  = はりの長さ

$M$  = 曲げモーメント

$m = \theta/R$  = ばね定数 (図—2)

$\mathcal{M}$  = 外力モーメント

$N$  = 固有マトリクス [4×1] (式 13)

$P(\rho)$  =  $\rho$  点の座標マトリクス [4×4] (式 9, 10, 12)

$P$  = 集中荷重

$Q, Q'$  = 半固有マトリクスの補給演算子 [2×4] (式

33, 34)

$Q$  = 軸力

$q(\kappa)$  = 分布荷重の強度

$R, R'$  = 半固有マトリクスの補給演算子 [2×4] (式 33, 34)

$S, S'$  = 移行演算子 [4×4] (式 31, 32)

$S$  = せん断力

$W(\rho)$  =  $\rho$  点における状態ベクトル [4×1] (式 2, 3)

$w$  = たわみ

$x$  = はりの流通座標

$\alpha = \sqrt{QL^3/EI}$  (式 8)

$\beta = \sqrt[3]{KLI^3/4EI}$  (式 6)

$\theta$  = たわみ角

$\kappa = \xi/L$  = 無次元荷重座標

$\xi$  = 荷重座標 (図—1)

$\rho = x/L$  = 無次元流通座標

参考文献

- 1) S.U. Bencoscer : "Matrix Analysis of Continuous Beams", Transactions of the ASCE, Vol. 112, 1947, pp. 1109-1140.
- 2) B.E. Gatewood and N. Ohanian : "Tri-Diagonal Matrix Method for Complex Structures", Proceedings of the ASCE, Structural Division, April, 1965, pp. 27-41.
- 3) B. Tanimoto : "Operational Method for Continuous Beams", Proceedings of the ASCE, Structural Division, Dec., 1964, pp. 213-242.
- 4) B. Tanimoto : "Operational Method for Pin-Jointed Trusses", Proceedings of the ASCE, Structural Division, June, 1966, pp. 179-198.
- 5) N. Yoshizawa and B. Tanimoto : "Operational Method for Continuous Beams, First Report, Rigid Support and Pin Joint", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 20, June, 1966, pp. 1-29.
- 6) N. Yoshizawa and B. Tanimoto : "Operational Method for Continuous Beams, Second Report, Generalized Continuous Beams", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 20 June, 1966, pp. 31-60.
- 7) N. Yoshizawa and B. Tanimoto : "Subsidiary Operational Method for Continuous Beam-Columns", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 23, Dec., 1967, pp. 15-34.
- 8) S. Natsume, N. Yoshizawa, H. Hamano, K. Ishikawa and B. Tanimoto : "Operational Method for Various Continuous Beams", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 24, July, 1968, pp. 1-21.
- 9) B. Tanimoto : "Eigen-Matrix Method for Beams and Plates", Proceedings of the ASCE, Structural Division, Oct., 1963, pp. 173-215.
- 10) 谷本勉之助・吉沢孝和 : "詳説マトリクス応用力学", オーム社, 1966, pp. 23-266.
- 11) 小西一郎・横尾 義貫・成岡 昌夫 : "構造力学", 丸善, pp. 95-215.

- 12) N. Yoshizawa and B. Tanimoto, "Comments on Prevailing Methods of Structural Analysis", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 22, July, 1967, pp. 49-64.
- 13) 中川健治・成岡昌夫: "変形法と Reduction 法との相互関係について", 土木学会論文集, 141号, 1967, pp. 23-30.
- 14) N. Yoshizawa and B. Tanimoto: "Operational Method for Clapeyron's Theorem", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 18, Dec., 1964, pp. 1-39.
- 15) N. Yoshizawa and B. Tanimoto: "Operational Method for Displacement Analysis, First Report, Slope-Deflection Method for Rigid Frames", Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Vol. 22, July, 1967, pp. 13-25.
- 16) E.C. Pestel and F.A. Leckie, "Matrix Methods in Elastomechanics", Mc-GRAW Hill Book Co. Inc., 1963, pp. 51-60.
- 17) 伊藤 学訳: R. ケルステン, "構造力学における還元法", 技報堂, 1968, p. 17.
- 18) S. Timoshenko: "Strength of Materials, Part II", D. Van Nostrand Co. Inc., 1956, pp. 1-56.

(1968.8.12・受付)

---