

# はりの高精度差分式について

## FINITE DIFFERENCE FORMULAE OF GREATER ACCURACY FOR BEAM ANALYSIS

佐 武 正 雄\*

By Masao Satake

### 1. ま え が き

はりの微分方程式

$$\frac{d^4}{dx^4}y(x) = \frac{1}{EI}p(x) \dots\dots\dots(1.1)$$

を差分化し、

$$\begin{aligned} \Delta^4 y_x &= y_{x-2} - 4y_{x-1} + 6y_x - 4y_{x+1} + y_{x+2} \\ &= \frac{h^4}{EI} p_x \dots\dots\dots(1.2) \end{aligned}$$

(ただし、 $h$  は分割長)として数值的に解くことは広く行なわれているが、この際

- i) 不連続な分布荷重や集中荷重列 ( $p_x = P_x/h$  とする) に対しても、式 (1.2) を適用する。
- ii) 境界条件に対して、 $dy/dx, d^2y/dx^2$  等を差分化した式を用いる。したがって、中央差分を用いるために、境界を越え、架空の分点を設定する。

等のことが行なわれている。しかし、差分式は、元来、関数の Taylor 展開を基礎としているので、たわみ  $y(x)$  の高次の微係数 (すなわち、せん断力、分布荷重等) が不連続となるような場合に、連続な範囲を越えて適用することは根拠がなく、したがって誤差も大きくなる。

本文は、すでに板の問題などに用いられている<sup>1)2)</sup> 考え方 (Mehrstellenverfahren<sup>3)</sup>) を取り入れ、図-1 に示すような、各区間で区分的に連続な分布荷重と分点に集中荷重をうける場合に適用できる差分式を導いたものである。 $y$  の7次導関数以上を省略しているの、分布荷重が2次以下の関数であれば、この差分式で正解が得られる。また、 $y$  の代りに  $y', y''$  等の微係数を含む式

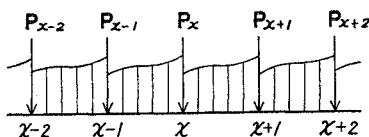


図-1

も導いているが、これらにより、境界条件の適用や、モーメント値の計算を容易に正確に (同一精度で) 行なうことができる。3. では、同様の考え方で、振動解析に応用できる差分式を導いている。

### 2. 式 の 誘 導

図-2 に示すように分割長を  $h$  とすれば、分点 0 の両隣点 1, -1 のたわみは、Taylor 展開を用いそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{hD} y_0 = y_0 + h y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' \\ &\quad + \frac{h^4}{24} y_0^{IV} + \frac{h^5}{120} y_0^V + \frac{h^6}{720} y_0^{VI} + O(h^7) \\ y_{-1} &= e^{-hD} y_0 = y_0 - h y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' - \frac{h^3}{6} y_0''' \\ &\quad + \frac{h^4}{24} y_0^{IV} - \frac{h^5}{120} y_0^V + \frac{h^6}{720} y_0^{VI} + O(h^7) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.1)$$

と書くことができる。ここに、 $y_0'''$  以上についてとくに subscript "O" と "O+" を用い分点 0 の左右の値を区別したのは、 $y_0 \sim y_0''$  は 0 点の両側で相等しい値をもつが、 $y_0'''$  以上は 0 点の両側で、荷重状態によって異なった値をもつからである\*\*。

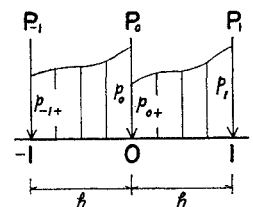


図-2

図示の荷重に対して明らかに

$$y_{0+}''' = y_0''' + \frac{P_0}{EI} \dots\dots\dots(2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{0+}^{IV} &= \frac{1}{EI} p_{0+}, & y_0^{IV} &= \frac{1}{EI} p_0 \\ y_{0+}^V &= \frac{1}{EI} p_{0+}', & y_0^V &= \frac{1}{EI} p_0' \\ y_{0+}^{VI} &= \frac{1}{EI} p_{0+}'' , & y_0^{VI} &= \frac{1}{EI} p_0'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

\*\* 本文ではモーメント荷重を考慮していない。もし集中モーメント荷重を考慮すれば、 $y_0''$  から区別しなければならぬ。

\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

である。p に関する Taylor 展開

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_{0+} + hp_{0+}' + \frac{h^2}{2} p_{0+}'' + 0(h^3) \\ p_{-1+} &= p_0 - hp_0' + \frac{h^2}{2} p_0'' + 0(h^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

を用い、 $0(h^3)$  の誤差を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} h^2 p_{0+}'' &= 2(p_1 - p_{0+} - hp_{0+}') \\ h^2 p_0'' &= 2(p_{-1+} - p_0 + hp_0') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

とかけるから、式 (2.1) は結局

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' \\ &+ \frac{h^4}{360 EI} (p_1 + 14 p_{0+} + 2 hp_{0+}') + \frac{h^3}{6 EI} P_0 \end{aligned} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\begin{aligned} y_{-1} &= y_0 - hy_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' - \frac{h^3}{6} y_0''' \\ &+ \frac{h^4}{360 EI} (p_{-1} + 14 p_0 - 2 hp_0') \dots\dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

と変形される。式 (2.4) で  $0(h^3)$  を無視したことは、式 (2.6), (2.7) において  $0(h^7)$  の誤差を無視したことと相当し、p が 2 次以下 (y が 6 次以下) の関数であれば誤差を生じないことになる。

y の微係数に関する Taylor 展開を用いれば、同様にして

$$\begin{aligned} hy_1' &= hy_0' + h^2 y_0'' + \frac{h^3}{2} y_0''' + \frac{h^4}{120 EI} \\ &\times (2 p_1 + 18 p_{0+} + 3 hp_{0+}') + \frac{h^3}{2 EI} P_0 \end{aligned} \dots\dots\dots(2.8)$$

$$\begin{aligned} h^2 y_1'' &= h^2 y_0'' + h^3 y_0''' + \frac{h^4}{12 EI} (p_1 + 5 p_{0+} + hp_{0+}') \\ &+ \frac{h^3}{EI} P_0 \dots\dots\dots(2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hy_{-1}' &= hy_0' - h^2 y_0'' + \frac{h^3}{2} y_0''' - \frac{h^4}{120 EI} \\ &\times (2 p_{-1} + 18 p_0 - 3 hp_0') \dots\dots\dots(2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2 y_{-1}'' &= h^2 y_0'' - h^3 y_0''' + \frac{h^4}{12 EI} (p_{-1} + 5 p_0 - hp_0') \\ &\dots\dots\dots(2.11) \end{aligned}$$

等が得られる。

式 (2.6)~(2.11) の中 4 式を組合わせて、 $y_0', y_0'', y_0'''$  の消去を行なえば 表-1 の結果を得、また  $y_0'$  の消去から 表-2 の結果を得る。これらの表の意味は、たとえば

$$\begin{aligned} h^2 y_{-1}'' - 2 y_{-1} + 4 y_0 - 2 y_1 + h^2 y_1'' \\ = \frac{h^4}{180 EI} (14 p_{-1+} + 61 p_0 + 61 p_{0+} + 14 p_1 \\ - 13 hp_0' + 13 hp_{0+}') + \frac{2 h^3}{3 EI} P_0 \dots\dots\dots(A-1) \end{aligned}$$

表-1

$h^2 y_{-1}'', hy_{-1}', y_{-1}, y_0, y_1, hy_1', h^2 y_1''$	$\frac{h^4}{EI} (p_{-1+}, p_0, p_{0+}, p_1, hp_0', hp_{0+}'), \frac{h^3}{EI} P_0$	式番号
1	$\frac{14}{180} \quad \frac{61}{180} \quad \frac{61}{180} \quad \frac{14}{180} \quad -\frac{13}{180} \quad \frac{13}{180} \quad \frac{2}{3}$	A-1
-6	$\frac{5}{72} \quad \frac{34}{72} \quad \frac{46}{72} \quad \frac{11}{72} \quad -\frac{16}{180} \quad \frac{25}{180} \quad \frac{7}{6}$	A-2
-1	$\frac{2}{180} \quad \frac{13}{180} \quad \frac{13}{180} \quad \frac{2}{180} \quad -\frac{5}{360} \quad \frac{5}{360} \quad \frac{1}{6}$	A-3
2	$\frac{31}{360} \quad \frac{74}{360} \quad \frac{14}{360} \quad \frac{1}{360} \quad -\frac{10}{180} \quad \frac{1}{180} \quad \frac{1}{6}$	A-4

表-2

$y_{-1}, h^3 y_0''', h^2 y_0'', y_0, y_1, hy_1', h^2 y_1''$	$\frac{h^4}{EI} (p_{-1+}, p_0, p_{0+}, p_1, hp_0', hp_{0+}'), \frac{h^3}{EI} P_0$	式番号
1	$\frac{1}{360} \quad \frac{14}{360} \quad \frac{14}{360} \quad \frac{1}{360} \quad -\frac{1}{180} \quad \frac{1}{180} \quad \frac{1}{6}$	A-5
-1	$\frac{5}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad 1$	A-6
-2	$\frac{8}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{7}{60} \quad 2$	A-7

表-3

$y_{-2}, h^2 y_{-1}'', hy_{-1}', y_{-1}, h^3 y_0''', h^2 y_0'', y_0, y_1, y_2$	$\frac{h^4}{360 EI} (p_{-2+}, p_{-1}, p_{-1+}, p_0, p_0, p_1, p_{1+}, p_2)$	$\frac{h^5}{180 EI} (p_{-1}', p_{-1+}', p_0', p_0+', p_1', p_1+', p_2')$	$\frac{h^3}{6 EI} (P_{-1}, P_0, P_1)$	式番号
1	1	-1	1	A-8
	[60		[1	A-8'
1	28		4	A-9
	[29		[4	A-9'
-6	25	-16	7	A-10
	[18		[7	A-10'
	151	15	6	A-11
	[106		[6	A-11'

等である。さらに、式 (A-1), (A-2), (A-6) と式 (A-5) (ただし分点を一つ右または左にずらしたもの) とを組合わせて  $y_1''$  または  $y_{-1}''$  を消去すれば、表-3 に示す諸式が得られる。表-3 において、分布荷重が考える区間で一つの 2 次式で表わされるような場合には、 $p_{-1}$  と  $p_{-1+}$  等を区別する必要がなく、また

$$\left. \begin{aligned} p_{-2}-4 p_{-1}+6 p_0-4 p_1+p_2 &=0 \\ p_{-1}-3 p_0+3 p_1-p_2 &=0 \\ p_{-1}-p_1+2 h p_0' &=0 \\ 3 p_0-4 p_1+p_2+2 h p_0' &=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.12)$$

等の関係があるから、式の右辺は表中 [ ] で示したように簡易化することができる。

ここに得られた差分式\* は、例題にも示すように境界条件をそのまま入れて用いることができるので便利である。また、たわみからモーメントを求める場合には、中間分点に対して式 (A-5) また固定端に対して式 (A-4) を用いればよい。これらの諸式を、左右入れ替えて用いようとする場合には、奇数次の微係数の符号を変えることに注意する。

3. 振動解析の差分式

つぎに振動解析に応用できる差分式について考察する。はりの固有振動において、単位長当り質量を  $\mu$ 、固有振動数を  $\omega$  とすれば、その振動波形  $y(x)$  は

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \mu \omega^2 y = 0 \dots\dots\dots(3.1)$$

を満足し、したがって

$$y^{IV} = \beta^4 y, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu \omega^2}{EI}} \dots\dots\dots(3.2)$$

とおくことができる。図-3 に示すように、分点 0 に集中質量  $m_0$  が存在する場合、

$$\begin{aligned} y_{0+}''' &= y_0''' + \frac{1}{EI} \omega^2 m_0 y_0 \\ &= y_0''' + \frac{\beta^4 m_0}{\mu} y_0 \dots\dots\dots(3.3) \end{aligned}$$

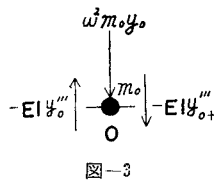


図-3

が成立つから、 $\beta$  が一定値ならば式 (2.1) の Taylor

\* これらの式の誘導には差分計算を用いていないが、慣用に從ってこの名称を用いた。もっとも、集中荷重列に対しては厳密に

$$D^4 y_x = \frac{h^3}{EI} \left(1 + \frac{1}{6} D^2\right) P_x$$

が成立ち、また、連続な分布荷重に対しては

$$\begin{aligned} D^4 y_x &= \left(\frac{D}{D}\right)^4 D^4 y_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{D}{D}\right)^4 P_x \\ &= \frac{h^4}{EI} \left(1 + \frac{1}{6} D^2 - \frac{1}{720} D^4 + \dots\right) P_x \\ &\doteq \frac{h^4}{EI} \left(1 + \frac{1}{6} D^2\right) P_x \end{aligned}$$

となるから、これらの差分式を重ね合わせて、式 (A-8') を得ることもできる。

展開の第 1 式はつぎのようにかくことができる。

$$\begin{aligned} y_1 &= s_0(\beta h) y_0 + \beta^{-1} s_1(\beta h) y_0' + \beta^{-2} s_2(\beta h) y_0'' \\ &\quad + \beta^{-3} s_3(\beta h) y_0''' \\ &= \left\{ s_0(\beta h) + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3(\beta h) \right\} y_0 + \beta^{-1} s_1(\beta h) y_0' \\ &\quad + \beta^{-2} s_2(\beta h) y_0'' + \beta^{-3} s_3(\beta h) y_0''' \dots\dots\dots(3.4) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} s_0(\beta h) &\equiv \frac{1}{2} (\cosh \beta h + \cos \beta h) \\ &= 1 + \frac{1}{4!} \beta^4 h^4 + \frac{1}{8!} \beta^8 h^8 + \dots\dots \\ s_1(\beta h) &\equiv \frac{1}{2} (\sinh \beta h + \sin \beta h) \\ &= \beta h + \frac{1}{5!} \beta^5 h^5 + \frac{1}{9!} \beta^9 h^9 + \dots\dots \\ s_2(\beta h) &\equiv \frac{1}{2} (\cosh \beta h - \cos \beta h) \\ &= \frac{1}{2!} \beta^2 h^2 + \frac{1}{6!} \beta^6 h^6 + \frac{1}{10!} \beta^{10} h^{10} + \dots\dots \\ s_3(\beta h) &\equiv \frac{1}{2} (\sinh \beta h - \sin \beta h) \\ &= \frac{1}{3!} \beta^3 h^3 + \frac{1}{7!} \beta^7 h^7 + \frac{1}{11!} \beta^{11} h^{11} + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

である。式 (3.5) の関数は、明らかに

$$\left. \begin{aligned} s_0(-\beta h) &= s_0(\beta h), \quad s_1(-\beta h) = -s_1(\beta h) \\ s_2(-\beta h) &= s_2(\beta h), \quad s_3(-\beta h) = -s_3(\beta h) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

を満足するから、 $s_0(\beta h)$  等を更に  $s_0$  等と略記することにすれば、

$$y_{-1} = s_0 y_0 - \beta^{-1} s_1 y_0' + \beta^{-2} s_2 y_0'' - \beta^{-3} s_3 y_0''' \dots\dots\dots(3.7)$$

また、 $y$  の微係数について

$$\begin{aligned} y_1' &= \beta \left( s_3 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_2 \right) y_0 + s_0 y_0' \\ &\quad + \beta^{-1} s_1 y_0'' + \beta^{-2} s_2 y_0''' \dots\dots\dots(3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'' &= \beta^2 \left( s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1 \right) y_0 + \beta s_3 y_0' \\ &\quad + s_0 y_0'' + \beta^{-1} s_1 y_0''' \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1''' &= \beta^3 \left( s_1 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_0 \right) y_0 + \beta^2 s_2 y_0' \\ &\quad + \beta s_3 y_0'' + s_0 y_0''' \dots\dots\dots(3.10) \end{aligned}$$

$$y_{-1}' = -\beta s_3 y_0 + s_0 y_0' - \beta^{-1} s_1 y_0'' + \beta^{-2} s_2 y_0''' \dots\dots\dots(3.11)$$

$$y_{-1}'' = \beta^2 s_2 y_0 - \beta s_3 y_0' + s_0 y_0'' - \beta^{-1} s_1 y_0''' \dots\dots\dots(3.12)$$

$$y_{-1}''' = -\beta^3 s_1 y_0 + \beta^2 s_2 y_0' - \beta s_3 y_0'' + s_0 y_0''' \dots\dots\dots(3.13)$$

等の諸式を得る。これらの諸式は 2. の場合と異なり、近似式でなく厳密式であることに注意する。

式 (3.4), (3.7)~(3.13) の中から 4 式を組合わせ

$y_0', y_0'', y_0'''$  の消去を行なえば、つぎのような諸式が得られる。

$$\beta^{-3}s_0y_{-1}''' + \beta^{-2}s_3y_{-1}'' + \left(2 \begin{vmatrix} s_1 & s_3 & \beta m_0 s_0 & s_3 \\ s_2 & s_0 & \mu & s_1 & s_0 \end{vmatrix} \right) y_0 + \beta^{-2}s_3y_{-1}'' - \beta^{-3}s_0y_{-1}''' = 0 \dots\dots\dots (B-1)$$

$$\beta^{-2}s_2y_{-1}'' - s_0y_{-1} \left(2 \begin{vmatrix} s_2 & s_0 \\ s_0 & s_2 \end{vmatrix} \frac{\beta m_0}{\mu} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix} \right) y_0 - s_0y_{-1} + \beta^{-2}s_2y_{-1}'' = 0 \dots\dots\dots (B-2)$$

$$\beta^{-1}s_2y_{-1}' + s_1y_{-1} + \left(2 \begin{vmatrix} s_3 & s_1 \\ s_0 & s_2 \end{vmatrix} + \frac{\beta m_0}{\mu} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix} \right) y_0 + s_1y_{-1} - \beta^{-1}s_2y_{-1}' = 0 \dots\dots\dots (B-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta^{-2}y_{-1}'' - \left(s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1\right) y_0 \quad s_3 \quad s_0 \quad s_1 \\ y_{-1} - \left(s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ \beta^{-2}y_{-1}'' - s_2y_0 \quad -s_3 \quad s_0 \quad -s_1 \\ \beta^{-3}y_{-1}''' + s_1y_0 \quad s_2 \quad -s_3 \quad s_0 \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (B-4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta^{-1}y_{-1}' - \left(s_3 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_2\right) y_0 \quad s_0 \quad s_1 \quad s_2 \\ y_{-1} - \left(s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ \beta^{-2}y_{-1}'' - s_2y_0 \quad -s_3 \quad s_0 \quad -s_1 \\ \beta^{-3}y_{-1}''' + s_1y_0 \quad s_2 \quad -s_3 \quad s_0 \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (B-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta^{-2}y_{-1}'' - \left(s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1\right) y_0 \quad s_3 \quad s_0 \quad s_1 \\ y_{-1} - \left(s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ y_{-1} - s_0y_0 \quad -s_1 \quad s_2 \quad -s_3 \\ \beta^{-1}y_{-1}' + s_3y_0 \quad s_0 \quad -s_1 \quad s_2 \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (B-6)$$

また、同様にして

$$\left. \begin{array}{l} y_{-1} - \left(s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ y_{-1} - s_0y_0 \quad -s_1 \quad s_2 \quad -s_3 \\ \beta^{-1}y_{-1}' + s_3y_0 \quad s_0 \quad -s_1 \quad s_2 \\ \beta^{-2}y_{-1}'' - s_2y_0 \quad -s_3 \quad s_0 \quad -s_1 \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (B-7)$$

を得るが、とくに  $y_{-1} = y_{-1}' = 0$  (分点  $-1$  が固定端) の場合

$$\beta^{-2}y_{-1}'' \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_1 & s_2 & -s_3 \\ s_0 & -s_1 & s_2 \end{vmatrix} = -y_0 \begin{vmatrix} s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_0 & -s_1 & s_2 & -s_3 \\ -s_3 & s_0 & -s_1 & s_2 \\ s_2 & -s_3 & s_0 & -s_1 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} -s_1 & s_2 & -s_3 \\ s_0 & -s_1 & s_2 \\ -s_3 & s_0 & -s_1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (B-7')$$

となる。一方、式 (3.4), (3.7) より  $y_0', y_0'''$  を消去して

$$2\beta^{-2}s_2y_0'' = y_{-1} - \left(2s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_2\right) y_0 + y_1 \dots\dots\dots (B-8)$$

を得るが、式 (B-7'), (B-8) は、分点のたわみから曲げモーメントを求めるのに応用することができる。

式 (B-8) (ただし、分点を左右に一つずらしたもの) を式 (B-2), (B-4), (B-6) に代入し、さらに  $y_1''$  または  $y_{-1}''$  の消去を行なえば、つぎの諸式が得られる。

$$y_{-2} - \left(4s_0 + \frac{\beta m_{-1}}{\mu} s_3\right) y_{-1} + \left(2 - 4 \begin{vmatrix} s_2 & s_0 \\ s_0 & s_2 \end{vmatrix} - \frac{2\beta m_0}{\mu} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix} \right) y_0 - \left(4s_0 + \frac{\beta m_1}{\mu} s_3\right) y_1 + y_2 = 0 \dots\dots\dots (B-9)$$

$$2\beta^{-2}s_2y_{-1}'' - 2s_0y_{-1} + \left(1 - 4 \begin{vmatrix} s_2 & s_0 \\ s_0 & s_2 \end{vmatrix} - \frac{2\beta m_0}{\mu} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix} \right) y_0 - \left(4s_0 + \frac{\beta m_1}{\mu} s_3\right) y_1 + y_2 = 0 \dots\dots\dots (B-10)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_2 - \left(2s_0 + \frac{\beta m_1}{\mu} s_3\right) y_1 + \left\{1 - 2s_2 \left(s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1\right)\right\} y_0 \quad 2s_2s_3 \quad 2s_2s_0 \quad 2s_2s_1 \\ y_{-1} - \left(s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ \beta^{-2}y_{-1}'' - s_2y_0 \quad -s_3 \quad s_0 \quad -s_1 \\ \beta^{-3}y_{-1}''' + s_1y_0 \quad s_2 \quad -s_3 \quad s_0 \end{array} \right\} = 0 \dots\dots\dots (B-11)$$

$$\begin{vmatrix} y_2 - \left(2s_0 + \frac{\beta m_1}{\mu} s_3\right) y_1 + \left\{1 - 2s_2 \left(s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1\right)\right\} y_0 & 2s_2 s_3 & 2s_2 s_0 & 2s_2 s_1 \\ y_1 - \left(s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ y_{-1} - s_0 y_0 & -s_1 & s_2 & -s_3 \\ \beta^{-1} y_{-1}' + s_3 y_0 & s_0 & -s_1 & s_2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (B-12)$$

これらの諸式を応用すれば、各種のはりの固有振動数を求める固有方程式を容易につくることができる。また、固有振動数  $\omega$  が求められた後に、振動波形、曲げモーメントを必要なだけ分割した分点について求めることもできる。つぎに、その応用上の注意を2, 3述べる。

(1) 分点に集中荷重が作用する場合

分点  $i$  に集中荷重  $P_i \sin \omega t$  が作用している場合は、集中質量  $m_i$  による項  $\frac{\beta^4 m_i}{\mu} y_i$  を  $\left(\frac{\beta^4 m_i}{\mu} y_i + \frac{P_i}{EI}\right)$  で置換えればよい。したがって、たとえば  $P_{-1}, P_0, P_1$  が存在する場合、式 (B-9) の右辺は0でなく

$$\frac{\beta^{-3}}{EI} (s_3 P_{-1} + \begin{vmatrix} s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 \end{vmatrix} P_0 + s_3 P_1)$$

となる。

(2) はりの分布質量を無視する場合

$\mu \rightarrow 0$  の場合、当然  $\beta \rightarrow 0$  で、式 (3.5) より

$$s_0 \rightarrow 1, \quad s_1, s_2, s_3 \rightarrow 0$$

となる。したがって、このまま公式に代入すると  $\infty$  や  $0/0$  の項を生じたり、行または列が全部0となり無意味になったりする。こういう場合には

$$\begin{aligned} \frac{\beta^4}{\mu} &\rightarrow \frac{\omega^2}{EI} \\ \beta^{-1} s_1 &\rightarrow h, \quad \beta^{-2} s_2 \rightarrow \frac{h^2}{2}, \quad \beta^{-3} s_3 \rightarrow \frac{h^3}{6} \\ \beta^{-2} s_1^2 &\rightarrow h^2, \quad \beta^{-3} s_1 s_2 \rightarrow \frac{h^3}{2} \end{aligned}$$

等を用い、上記のようなことを避けなければならない。たとえば式 (B-9) は

$$\begin{aligned} y_{-2} - 4y_{-1} + 6y_0 - 4y_1 + y_2 \\ = \frac{\omega^2 h^3}{6EI} (m_{-1} y_{-1} + 4m_0 y_0 + m_1 y_1) \dots\dots (B-9') \end{aligned}$$

となり式 (A-8) の形となる。この例でもわかるように、 $\mu \rightarrow 0$  の場合は、B-系の公式を用いるより A-系の公式を用い、集中荷重の項で

$$P_i = \omega^2 m_i y_i \dots\dots\dots (3.14)$$

とおく方が簡単である。

(3) 中間支点が存在する場合

連続ばりのように中間支点が存在すると、そこに未知反力が作用するので、その点をまたいで上記公式を適用することはできない。この場合、その点の  $y', y''$  を未知数に加えれば解くことができるが、次式\* を用いる方が便利な場合も多い (0点が中間支点)。

$$\beta^{-2} s_3 y_{-1}'' + 2\beta^{-2} \begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ s_0 & s_1 \end{vmatrix} y_0'' + \beta^{-2} s_3 y_1''$$

$$= s_1 y_{-1} - 2 \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_2 & s_1 \end{vmatrix} y_0 + s_1 y_1 \dots\dots\dots (B-13)$$

この式に、 $y'' = -\frac{M}{EI}$  を代入すれば

$$\begin{aligned} s_3 M_{-1} + 2 \begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ s_0 & s_1 \end{vmatrix} M_0 + s_3 M_1 + \beta^2 EI \\ \times (s_1 y_{-1} - 2 \begin{vmatrix} s_0 & s_3 \\ s_2 & s_1 \end{vmatrix} y_0 + s_1 y_1) = 0 \dots\dots\dots (B-13') \end{aligned}$$

となるが、これは動的3連モーメント式<sup>9)</sup>に他ならない。

(4) 曲げ剛性や分布質量が変化する場合

曲げ剛性  $EI$  や分布質量  $\mu$  が変化する場合は、式 (3.2) により  $\beta$  が一定でなくなり式 (3.4) 等は成立しない。こういう場合は必要なだけ細分して、各分割区間内で近似的に  $\beta$  を一定とし、たとえば第  $i$  区間 ( $i-1$  点と  $i$  点の間) の  $\beta$  を  $\beta_i$  とし、このことを考慮に入れて式 (B-1)~(B-7) を求める消去を行なわなければならない。式 (B-8) 以下については更に複雑になるが、ここではその詳細を省略する。

4. 例 題

例題 1

図-4 に示す固定ばり

$$y_0 = y_0' = 0, \quad y_3 = y_1$$

であるから、式 (A-10), (A-8) により、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 18+2 & -9 \\ -4-4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \frac{ph^4}{360EI} \\ \times \begin{bmatrix} 170+232+83+28+2 \\ 14+42+123+123+42+14 \end{bmatrix} &+ \frac{ph^4}{180EI} \begin{bmatrix} -16 \\ -1-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 20 & -9 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \frac{ph^4}{360EI} \begin{bmatrix} 483 \\ 354 \end{bmatrix} \\ \therefore y_1 &= \frac{169}{480} \frac{ph^4}{EI} = \frac{169}{122880} \frac{pl^4}{EI} \\ y_2 &= \frac{19}{30} \frac{ph^4}{EI} = \frac{19}{7680} \frac{pl^4}{EI} \end{aligned}$$

また、式 (A-4), (A-5) より

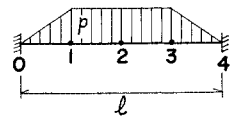


図-4

\* 注意(1)を参照し、0点の未知反力を  $R_0$  (下向きを+) とすれば

$$\begin{aligned} y_1' + y_{-1}'' &= \beta^2 \left(2s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1\right) y_0 + 2s_0 y_0'' + \frac{\beta^{-1} R_0}{EI} s_1 \\ y_1 + y_{-1} &= \left(2s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3\right) y_0 + 2\beta^{-2} s_2 y_0'' + \frac{\beta^{-3} R_0}{EI} s_3 \end{aligned}$$

が成り立つから、この2式から  $R_0$  を消去すれば式 (B-13) が得られる。

$$\begin{aligned}
 2h^2 y_0'' &= 8y_1 - y_2 + \frac{ph^4}{360EI} (74 + 14 + 1 - 20) \\
 &= \frac{19}{8} \frac{ph^4}{EI} \\
 h^2 y_2'' &= (1+1)y_1 - 2y_2 - \frac{ph^4}{360EI} (1+14+14+1) \\
 &= -\frac{31}{48} \frac{ph^4}{EI} \\
 \therefore M_0 &= -EI y_0'' = -\frac{19}{16} ph^2 = -\frac{19}{256} pl^2 \\
 M_2 &= -EI y_2'' = \frac{31}{48} ph^2 = \frac{31}{768} pl^2
 \end{aligned}$$

を得る。荷重が区分的線形荷重(2次関数以下)であるから、これらの値は当然正解値である。↗

$$\frac{h^4}{360EI} \begin{pmatrix} 28 & 245 & 56 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 56 & 246 & 56 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 56 & 246 & 56 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 56 & 245 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \frac{h^3}{6EI} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{pmatrix}$$

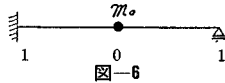
が成り立つ。この関係を  $\frac{h^4}{EI} \mathbf{s}(p_i) = \frac{h^3}{EI} \mathbf{S}(P_i)$  と記せば、 $(P_i)$  は  $(P_i) = h\mathbf{S}^{-1}\mathbf{s}(p_i)$  で与えられる。ここに

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{s} = \frac{1}{230} \begin{pmatrix} 209 & -56 & 15 & -4 & 1 \\ -56 & 224 & -60 & 16 & -4 \\ 15 & -60 & 225 & -60 & 15 \\ -4 & 16 & -60 & 224 & -56 \\ 1 & -4 & 15 & -56 & 209 \end{pmatrix} \mathbf{s} = \frac{1}{3900} \begin{pmatrix} 483 & 4007 & -103 & 45 & -12 & 3 & 2 \\ -112 & -103 & 4052 & -115 & 48 & -12 & -8 \\ 30 & 45 & -115 & 4055 & -115 & 45 & 30 \\ -8 & -12 & 48 & -115 & 4052 & -103 & -112 \\ 2 & 3 & -12 & 45 & -103 & 4007 & 483 \end{pmatrix}$$

である。

**例題 3**

図-6 に示すはりの固有振動数を求めよ。



式(B-6)に、境界条件

$$y_1' = y_3 = y_{-1} = y_{-1}' = 0$$

を入れれば、ただちにつぎの固有方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} s_2 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_1 & s_3 & s_0 & s_1 \\ s_0 + \frac{\beta m_0}{\mu} s_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_0 & -s_1 & s_2 & -s_3 \\ -s_3 & s_0 & -s_1 & s_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\mu \rightarrow 0$  の場合は、3. の注意(2)により

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2 h}{EI} m_0 & 0 & 1 & h \\ 1 + \frac{\omega^2 h^3}{6EI} m_0 & h & \frac{h^2}{2} & \frac{h^3}{6} \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^3}{6} \\ 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} = 0$$

から解くこともできるが、式(A-2)を用いれば

$$16y_0 = \frac{7}{6} \frac{h^3}{EI} \omega^2 m_0 y_0$$

**例題 2**

図-5 に示す分布荷重(a)を、等価な集中荷重列(b)に置き換えること。ここに、等価とは、各分点で等しいたわみを生じることという。

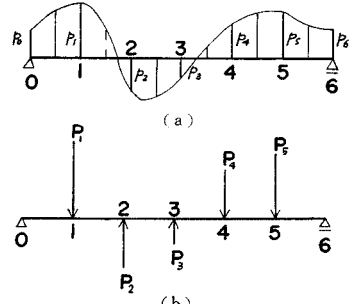


図-5

与えられた分布荷重を  $(p_i)$ 、求める集中荷重列を  $(P_i)$  とすれば、式(A-8)、(A-9)より

となるから、ただちに

$$\omega^2 = \frac{96}{7} \frac{EI}{m_0 h^3} = \frac{768}{7} \frac{EI}{m_0 l^3}$$

が得られる。

**5. あとがき**

Taylor 展開の適用範囲を考慮して、はりの解析に適用できる精度の高い差分式を導いた。この考え方は、さらに弾性床の上のはりの問題や板、シエル等の解析にも適用できると思われるが、後者の場合はりの場合ほど単純ではない。また、例題2に示したような、分布荷重と集中荷重列との等価置換の問題は実用上重要であるが、この問題については別の機会に詳しく述べたいと思っている。

**参考文献**

- 1) Zurmühl, R.: Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren, Z. angew. Math. Mech. **37** (1957), 1-16.
- 2) Collatz, L.: Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben, Z. angew. Math. Mech. **30** (1950), 385-388.
- 3) Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer-Verlag (1951).
- 4) 岡本舜三: 建設技術者のための振動学, オーム社 (1967), 122.

# IMV 振動計には 現場の技術が活かされています

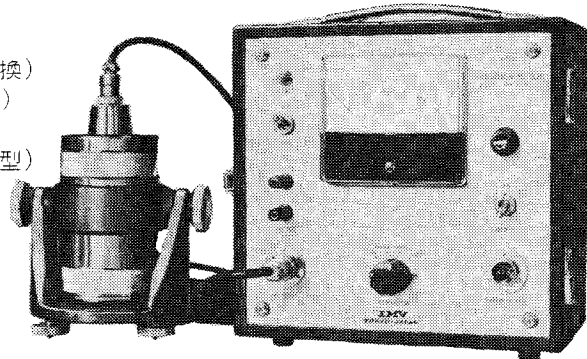
## IMV 低域振動計 VM-3300LL

### ●標準仕様

測定周波数範囲	1~50Hz
振幅測定範囲	0~±5mm (5段切換)
加速度	0~1.5g (4段切換)
出力	10kΩ
検出器	VP-3300LL (動電型)
電源	AC100V±10V 50,60Hz

### ●用途

- ダム工事
- ビル工事
- 鉄骨・橋梁工事
- 杭打工事
- その他土木・建築工事



## 株式会社 国際機械振動研究所

本社・大阪営業所	大阪市北区牛丸町54	東洋ビル	TEL 06(372)3296 (代)
東京営業所	東京都千代田区神田錦町1の8	伊藤ビル	TEL 03(292)3681 (代)
名古屋営業所	名古屋市中区新栄町2の12	万津元ビル	TEL 052(251)7708・2778
九州出張所	福岡市箱崎下社家町1935の1		TEL 092(65)3476

カタログ請求券  
土木学会  
論文集



トンネルの  
ライニングに  
的確な急結効果  
を発揮する……

乾式吹付コンクリート用  
セメント急結剤!!

# QP 500

(クイックセットP-500)

- トンネルの一時ライニングに「クイックセットP-500」はその経済性、速効性を、青函トンネル試堀坑を始め、各所に於て認められ採用されております。
- 湿砂使用に急結効果を発揮する。
  - 使用上の安全性が優れている。
  - 付着性が大きく跳返り損失が少ない。
  - 吸湿性が小さいため保存性がよい。

カタログ・技術資料贈呈

東京都港区六本木3-16-26 ☎ 582-8611  
大阪市東区北浜3-7 (広銀ビル) ☎ 292-3294  
仙台市青二番丁6-6 (誠生ビル) ☎ 24-1631

**ボソリス物産株式会社**

名古屋市中区新栄町1-6 (朝日生命館) ☎ 282-3661  
広島市八丁堀12-22 (築地ビル) ☎ 21-5571  
福岡・二本木・高岡・札幌・千葉・高松