

# アースダムの震動解析

## SEISMIC ANALYSIS OF EARTH DAMS

畑野 正\*・渡辺 啓行\*\*

By Tadashi Hatano and Hiroyuki Watanabe

### 1. 緒 言

土からなる構造物，土中に基礎をおく構造物等の耐震問題はきわめて重要な課題であると考えられるが，これらに対して動的解析を合理的に行なうことができるという段階には残念ながら未だ至っていないと思われる。その主要な問題点は動的解析を行なうにあたっての基本となる土の弾性，粘性，ポアソン比等の物理定数が適確に得られていないというところにある。解析法については，種々の提案がなされており，電子計算機の取扱いの問題に帰せられるであろう。著者達は別論文<sup>1)</sup>において粘土，砂，岩くずの各一種ずつの代表試料につき動的三軸圧縮試験を行なって得た非線型表示による物理定数の例を示した。ここにアースダムの震動解析の問題を一例として，上述物理定数のうち，粘土におけるものを用いて動的解析を行なうことを試みたい。

アースダムの耐震設計の現状は剛体の力学を基としたすべり円弧法によっているが，研究としての動的解析については古く松村・高田博士らのせん断振動としての研究<sup>2)</sup>がある。これに関しては実物アースダムの起振実験による振動減衰の測定も行なわれていて動的解析法として一応の実用的結果を与えることができるものである。しかしアースダムの振動がせん断振動としての取扱いで十分であるか否かは疑問であって，石崎・島山教授<sup>3)</sup>は extentional 振動として取扱うべきものとして変位表示による力のつりあい方程式を finite difference 法により解く法を提案した。土材料の動荷重に対する変位応答は明らかに extentional であり，また実物アースダムの振動挙動の観測結果も extentional 振動の取扱いの方がよいことを示しているように思われる。しかしこの解法は土材料を完全弾性体として取扱う段階に止まり

振動減衰を含めた実用的解法にまで至らなかった。その後 Clough 教授<sup>4)</sup>らは finite element 法によりアースダムの extentional 振動解を土材料が一定の弾性をもち，かつ限界減衰比が各モードにつき 20% であると想定して求め，近接した多くの振動モードおよびこれに対応した応力分布を示した。この解析もまた土の物性には直接関係のない解であり，また本質的に非線型である土の物性を考えれば，振動モードを求めて見ても，あまり意味がないと思われる。

粘土の性質として非線型性であり，また周波数特性をもつ Maxwell-Kelvin 体のごとき表現が合理的であることはすでに著者達<sup>1)</sup>のべた通りであるが，この物性を使用して，finite difference 法によるアースダムの震動解を求め，アースダムの振動挙動，内部応力，変位の分布を解析したい。なお動的解析の出発点として自重や静水圧による堤体内部の応力，変位の分布をも知る必要があり，さらに貯水時における震動において，堤体内間げき水圧の変動がいかになるかをも推論したい。

### 2. 土の力学的性質の表現

土に関連した構造物の解析には土の複雑な物性を実用的な形に表現することが先決条件である。ここにアースダムの震動解析を行なうにあたって，前述のごとく著者達がすでに求めた粘土の物性を使用するのであるが，粘土の性質といってもその多様な種類に応じて大幅に変化するであろう。しかし，少なくとも粘性土としての力学モデルは大きな変化はなく，その種類に応じて物理定数の数値を変えれば足りると考えられる。

この意味で著者達の先に求めた粘土の物理定数を，その数値のまま使用して見ることとする。これら物理定数については前記のごとく別論文に詳細に述べてあるが，その概要を記すればつぎのごとくである。

粘土材料としては，均一な性質のものを容易に多量に

\* 正会員 工博 電力中央研究所技術研究所

\*\* 正会員 電力中央研究所技術研究所

入手できることから、市販の Bentonite (組成: SiO<sub>2</sub>-77.3%, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-13.5%, 比重: 2.58, 粒度 0.053 mm 以下 99%) を選んだ。

含水量を 27~29% として、直径 7.5 cm, 高さ 15 cm の円筒に 14 層につきかため密度 1.76~1.81 g/cm<sup>3</sup> として供試体を製作した。その乾燥密度は 1.38~1.40 g/cm<sup>3</sup> である。静的、動的三軸試験を実施するに際して、ゴム膜を介しての周圧 σ<sub>2,3</sub> を 0~4 kg/cm<sup>2</sup> とし、軸方向圧力 σ<sub>1</sub> を最大 10 kg/cm<sup>2</sup> 程度まで加えた。

軸圧力および周圧は S.R. ゲージ型圧力計により、上下方向変形は S.R. ゲージによる π ゲージにより測定し、ポアソン比を求めるための供試体横方向の変形は周圧を与える円筒中の水中において小型 π ゲージを用いて測定した。

(1) 静的物理定数

自重、静水圧による堤体内応力、変位の解析のための静的物理定数を求めた実験の結果を要約して示すと図-1~3 のごとくである。

軸圧力と軸方向変形の関係は、周圧の大きさに応じて図-1 のごとき soft-spring の特性を示し、これから軸応力 σ<sub>1</sub> のレベルに応じた静的割線弾性率 E<sub>0S</sub> を周圧 σ<sub>2,3</sub> の各段階別に描くと図-2 となる。これらからつぎのごとき表現が得られた。

$$E_{0S} = \exp \left[ 2.31 \frac{14 + 1.1 \sigma_{2,3}^2 - \sigma_1}{4.8 + 0.45(\sigma_{2,3})^{1.6}} \right] \text{ kg/cm}^{-2}$$

ただし、E<sub>0S</sub> < 490 - 27 σ<sub>1</sub>

$$\exp \left[ 2.31 \frac{14 + 1.1 \sigma_{2,3}^2 - \sigma_1}{4.8 + 0.45(\sigma_{2,3})^{1.6}} \right] \geq 490 - 27 \sigma_1$$

となるときは

$$E_{0S} = 490 - 27 \sigma_1 \text{ kg/cm}^{-2} \dots\dots\dots(1)$$

静的ポアソン比 ν<sub>S</sub> に対する σ<sub>1</sub>, σ<sub>2,3</sub> の影響は図-3 のごとくで、σ<sub>1</sub> による影響が大きいことから、ν<sub>S</sub> を簡単につぎのごとく表現した。

$$\nu_S = 0.245 + 0.0164 \sigma_1 \dots\dots\dots(2)$$

Relations between vertical load intensity and vertical deformation for various levels of confined pressures. (Static test)

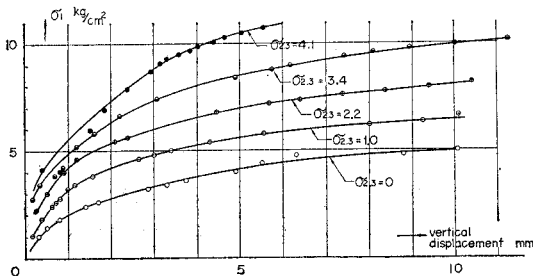


図-1

E<sub>0S</sub> curves for various levels of confined pressures (Static test)

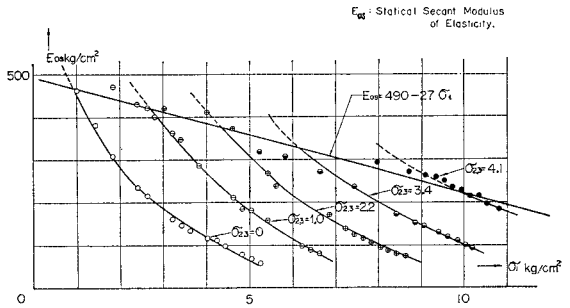


図-2

ν<sub>S</sub> ~ σ<sub>1</sub> relations for various levels of confined pressures σ<sub>2,3</sub> (Static test)

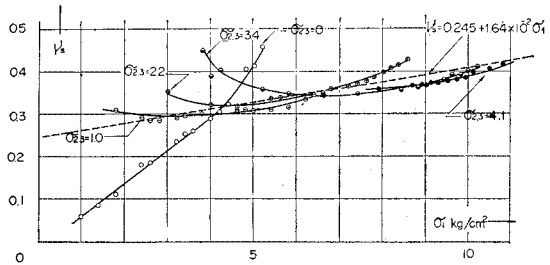


図-3

(2) 動的物理定数

周圧 σ<sub>2,3</sub> を加えさらに動的軸応力 a + b sin ωt を加えた場合の軸応力 σ<sub>1</sub> = σ<sub>2,3</sub> + a + b sin ωt と軸方向ひずみ ε<sub>1</sub> との経過の例を図-4 に示す。おのおのの荷重サイクルにおいて (σ<sub>2,3</sub> + a - b) に対応する ε<sub>1</sub>, および (σ<sub>2,3</sub> + a + b) に対応する ε<sub>1</sub> の二点を結ぶ直線の勾配、すなわち動的割線弾性率 E<sub>0</sub> は、荷重周波数 f が増すにつれて相当増大するという粘性土の周波数特性を明瞭に示している。この一例を図-5 に示してある。また荷重履歴を経るごとに永久ひずみが累積して行くことも図-4 に見ることができる。これらの特性から粘土の力学モデルとして、Maxwell-Kelvin 体が考えられるのである。実験から得られた E<sub>0</sub> の、σ<sub>2,3</sub>, a, K = a/b おのおのの段階における f = 2π/ω による変化および永久ひずみから Maxwell-Kelvin 体としての各要素 E, η, E<sub>1</sub>, η<sub>1</sub> を求め、ついでこれらの物理定数が σ<sub>2,3</sub>, a, K = a/b の変化によりいかに影響されるかを調べた。

この結果 E, η, E<sub>1</sub>, η<sub>1</sub> ともにつぎの特性のあることが明らかにされた。

α) σ<sub>2,3</sub> および a を一定に保ち、K を減少させると、すなわち b を増大せしめると、物理定数はともに減少する。この場合 K の減少に対する物理定数の減少の割合は、α の値が大きいほど小さい。

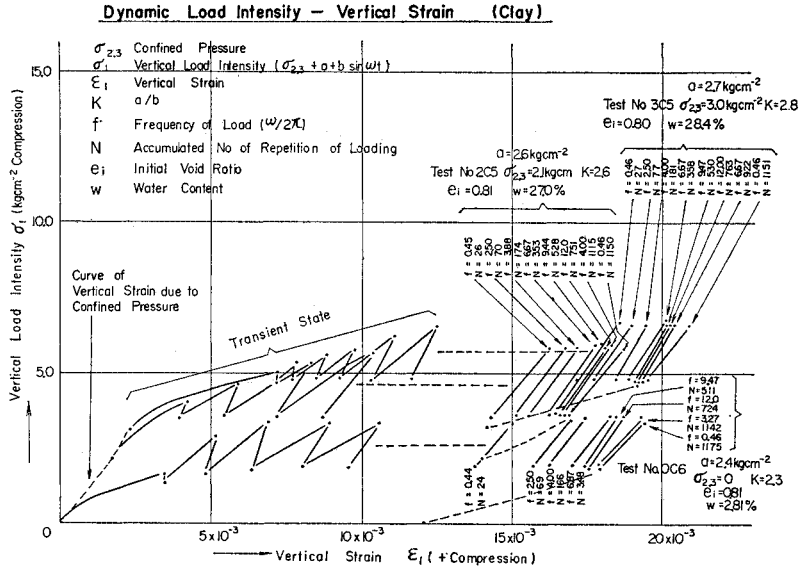


図-4

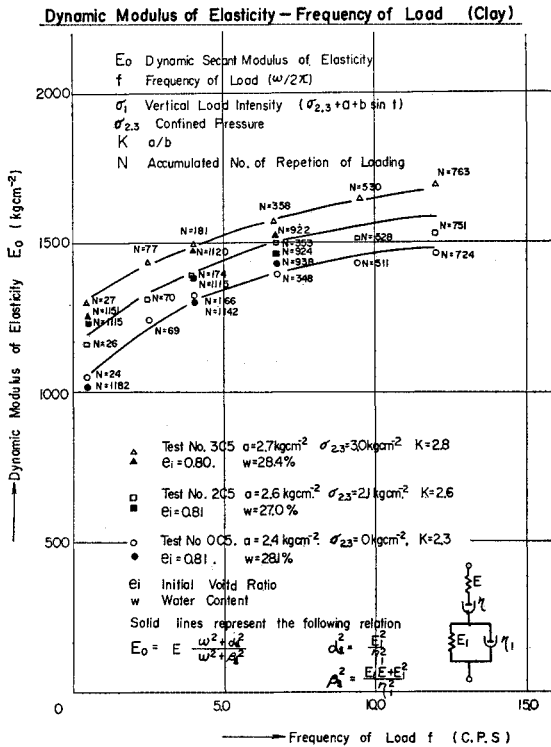


図-5

Dynamic Poisson's Ratio - Mean Level of Dynamic Load a (Clay)

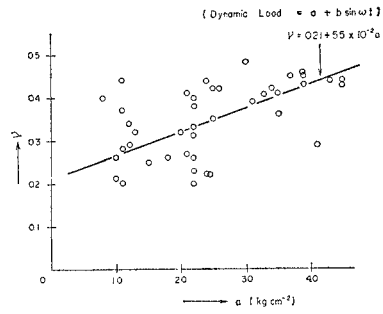


図-6

$E, \eta, E_1, \eta_1 = C_1 - C_2 a + (C_3 - C_4 a) K + C_5 \sigma_{2,3}$   
 とおき全実験データから最適な係数  $C$  を求めてつぎの結果を得た。

$$\left. \begin{aligned} E &= 6.76 \times 10^2 - 1.11 \times 10^2 a \\ &\quad + (3.84 \times 10^2 - 3.85 \times 10^2 a) K + 1.52 \times 10^2 \sigma_{2,3} \\ \eta &= 1.37 \times 10^5 - 2.5 \times 10^3 a \\ &\quad + (5.17 \times 10^4 - 8.5 \times 10^3 a) K + 1.17 \times 10^4 \sigma_{2,3} \\ E_1 &= 2.44 \times 10^3 - 3.44 \times 10^2 a \\ &\quad + (1.28 \times 10^3 - 1.30 \times 10^2 a) K + 1.60 \times 10^2 \sigma_{2,3} \\ \eta_1 &= 8.72 \times 10 - 1.31 \times 10 a \\ &\quad + (4.76 \times 10 - 5.0 a) K + 6.0 \sigma_{2,3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

b)  $a$  と  $K$  を一定に保ち,  $\sigma_{2,3}$  を増加すると物理定数は増大する。

c)  $\sigma_{2,3}$  と  $K$  を一定に保ち  $a$  を増大せしめると物理定数は減少する。

以上から簡単に各物理定数を

$$0.8 \leq a \leq 4.5, 0 \leq \sigma_{2,3} \leq 4.4, 1.1 \leq K \leq 7.5$$

$$0.5 \leq f \leq 12 \text{ (単位 kg, cm, sec)}$$

動的ポアソン比については周波数特性および動荷重振幅  $b$  について明瞭な関係は見られず 図-6 に示したごとく動荷重平均レベル  $a$  の関数として次式のごとく簡単に

表現することとした。

$$\nu = 0.21 + 5.5 \times 10^{-2} a \dots\dots\dots(4)$$

$$0.5 \leq f \leq 12 \quad 0.8 \leq a \leq 4.5$$

(単位 kg, cm, sec)

式(3)に明らかなように、粘土の動的物性には Maxwell 体のばね  $E$  が最も大きな影響を与える要素であり、Kelvin 体のばね  $E_1$  とともに soft spring 性を示しているのである。

### 3. アース ダム震動の解法

#### (1) 基本式とその解法の概要

アース ダムを多質点系と考え、変位で表現した運動方程式をたて、これを finite difference 法により解くことを考える。以下二次元解を求めるが、全くの理論的困難なしにただちに三次元問題に拡張できる。前節にのべた粘土材料により全堤体が構成されると、ここでは簡単に想定するが、その位置に応じて応力が異なり、したがって場所により物理定数が異なることになる。この意味で各部分異なった材料で堤体が構成されていても以下の議論が適用できる。

$x, y$  方向の絶対変位を  $u, v$  とし、場所により物性の異なることを考慮して運動方程式をたてれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(x, y) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ &+ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \\ &\times \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

ここに、

$$\mu = \frac{1}{2(1+\nu)} E_0, \quad \lambda = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E_0$$

$\rho(x, y)$  : 土の密度,  $\nu$  : 動的ポアソン比,  
 $E_0$  : 動的弾性率

以上を解くにあたっての境界条件はつぎのごとく取扱う。

- (i) 上流面：これに平行方向のせん断応力および直角方向の応力 0
- (ii) 堤 頂：            "
- (iii) 下流面：           "

- (iv) 堤 底： $u=f(x, t)$  堤底の水平変位を任意の地震変位波動とする。

.....(7)

【注：貯水時の動的解析は、自重および静水圧による堤体内部の応力を計算し(後述)この応力に対応する堤体各点の物性を出発点として初期値問題として行なう。

動水圧については、その仮想質量を考えて振動に対する影響を加味することができるが、アース ダムの場合堤体質量に比しきわめて小さいから、ほとんど影響を生じないと考え、ここでは省略することとした。後に述べる高さ 50 m のアース ダムの例では厚さ 1 m につき堤体重量約 13000 t に対し、動水圧の仮想重量はわずか 300 t である。したがって動的解析には貯水時においても上流面においては(i)の条件を使用し、得られた動的応力に自重および静水圧による応力を加算して内部応力の検討を行なうものとする。

式(5), (6)を式(7)の条件で解くにあたり、時間間隔  $\Delta t$ , 座標メッシュ  $h, k$  として差分化し、初期値問題として  $\Delta t$  ごとに変位, 応力を計算して行く。前節に求めた所にしたがって各点の応力によって定まる  $\lambda, \mu$  の値を用い、つぎの  $\Delta t$  時間後の変位応力を求め、この応力によって定まる  $\lambda, \mu$  を用い、さらにつぎの  $\Delta t$  時間後の変位, 応力を求める。これを繰返して非線型振動の近似解を得るものとする。

#### (2) Maxwell-Kelvin 体としての取扱い

応力とひずみの比  $E_0$  を Maxwell-Kelvin 体における周知の関係式を用いてつぎのごとく表現する。

$$\begin{aligned} E_0 &= E \frac{P^2 + PE_1/\eta_1}{P^2 + P(E/\eta_1 + E_1/\eta_1 + E/\eta) + EE_1/\eta\eta_1} \\ &= E - E \left( \frac{\gamma}{P + \alpha} + \frac{\delta}{P + \beta} \right) \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ただし、 $P = \frac{d}{dt}$

上式からつぎの関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= E/\eta_1 + E_1/\eta_1 + E/\eta, \\ \gamma + \delta &= E/\eta + E/\eta_1, \\ \alpha\beta &= EE_1/\eta\eta_1, \\ \beta\gamma + \alpha\delta &= EE_1/\eta\eta_1, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

変位  $u, v$  に対し operator  $E_0$  を用いて次式のごとくおく。

$$\left. \begin{aligned} E_0 u &= E[u - \gamma \bar{u} - \delta \bar{\bar{u}}] \\ E_0 v &= E[v - \gamma \bar{v} - \delta \bar{\bar{v}}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ダムの内点  $x, y$  および時刻  $t$  に対し

$$x = ih, \quad y = jk, \quad t = n \Delta t \dots\dots\dots(11)$$

$$u_{i,j}^n = u(x, y, t), \quad v_{i,j}^n = v(x, y, t) \dots\dots\dots(12)$$

とすれば、式(8), (10), (11), (12) から次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^n &= \frac{1}{p + \alpha_{i,j}} u_{i,j}^n = \int_0^{ndt} e^{-\alpha_{i,j}(ndt-\tau)} u(x, y, \tau) d\tau = \int_{(n-1)dt}^{ndt} e^{-\alpha_{i,j}(ndt-\tau)} u(x, y, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^{(n-1)dt} e^{-\alpha_{i,j}(ndt-\tau)} u(x, y, \tau) d\tau \\ &= u_{i,j}^n \int_{(n-1)dt}^{ndt} e^{-\alpha_{i,j}(ndt-\tau)} d\tau + e^{-\alpha_{i,j}dt} \int_0^{(n-1)dt} e^{-\alpha_{i,j}((n-1)dt-\tau)} u(x, y, \tau) d\tau \\ &= u_{i,j}^n \frac{1}{\alpha_{i,j}} (1 - e^{-\alpha_{i,j}dt}) + e^{-\alpha_{i,j}dt} \bar{u}_{i,j}^{n-1} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

全く同様に

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{i,j}^n &= u_{i,j}^n \frac{1}{\beta_{i,j}} (1 - e^{-\beta_{i,j}dt}) + e^{-\beta_{i,j}dt} \bar{u}_{i,j}^{n-1} \\ \bar{v}_{i,j}^n &= v_{i,j}^n \frac{1}{\alpha_{i,j}} (1 - e^{-\alpha_{i,j}dt}) + e^{-\alpha_{i,j}dt} \bar{v}_{i,j}^{n-1} \\ \bar{v}_{i,j}^n &= v_{i,j}^n \frac{1}{\beta_{i,j}} (1 - e^{-\beta_{i,j}dt}) + e^{-\beta_{i,j}dt} \bar{v}_{i,j}^{n-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

以上のごとくして運動方程式 (5), (6) の弾性定数  $\lambda, \mu$  を Maxwell-Kelvin 体の粘弾性定数, ポアソン比におきかえることができる。これら物理定数の非線型であることに対する取扱いは, 時刻  $t$  の動的応力  $\sigma_i^n$ ,

$\sigma_2^n$  を計算し, これにより定まる  $\lambda, \mu$  をつぎの  $t + dt$  時刻における定数として計算して行くことによって導入するものとする。

この際  $\sigma_1 \text{ static} - \sigma_2 \text{ static} = a, \sigma_2 \text{ static} = \sigma_{2,3}$ ,

ただし,  $\sigma_1 \text{ static} > \sigma_2 \text{ static}$

$\sigma_1^n, \sigma_2^n$  のうちその作用方向が  $\sigma_1 \text{ static}$  に近いものを  $b$  として式 (3) に適用する。

(3) 運動方程式の差分化

式 (5), (6) を差分化するにあたり, 式 (10), (11), (12), (13) の関係を用いれば結局次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= (\lambda_{i,j}^0 + 2\mu_{i,j}^0) \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h^2} + \mu_{i,j}^0 \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{k^2} \\ &\quad + (\lambda_{i,j}^0 + \mu_{i,j}^0) \frac{V_{i+1,j+1}^n - V_{i-1,j+1}^n + V_{i-1,j-1}^n - V_{i+1,j-1}^n}{4hk} \\ &\quad + \left( \frac{\lambda_{i+1,j}^0 - \lambda_{i-1,j}^0}{2h} + 2 \frac{\mu_{i+1,j}^0 - \mu_{i-1,j}^0}{2h} \right) \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} \\ &\quad + \frac{(\mu_{i,j+1}^0 - \mu_{i,j-1}^0)}{2k} \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2k} + \frac{(\mu_{i,j+1}^0 - \mu_{i,j-1}^0)}{2k} \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2h} \\ &\quad + \frac{(\lambda_{i+1,j}^0 - \lambda_{i-1,j}^0)}{2h} \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2k} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \frac{v_{i,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \mu_{i,j}^0 \frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{h^2} + (\lambda_{i,j}^0 + 2\mu_{i,j}^0) \frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{k^2} \\ &\quad + (\lambda_{i,j}^0 + \mu_{i,j}^0) \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n - U_{i+1,j-1}^n}{4hk} + \frac{(\mu_{i+1,j}^0 - \mu_{i-1,j}^0)}{2h} \\ &\quad \times \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2h} + \left( \frac{\lambda_{i,j+1}^0 - \lambda_{i,j-1}^0}{2k} + 2 \frac{\mu_{i,j+1}^0 - \mu_{i,j-1}^0}{2k} \right) \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2k} \\ &\quad + \frac{(\lambda_{i,j+1}^0 - \lambda_{i,j-1}^0)}{2k} \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{(\mu_{i+1,j}^0 - \mu_{i-1,j}^0)}{2h} \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2k} \dots \dots (15) \end{aligned}$$

ここに,

$$U_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \tau_{i,j} \bar{u}_{i,j}^n - \delta_{i,j} \bar{u}_{i,j}^n, \quad V_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \tau_{i,j} \bar{v}_{i,j}^n - \delta_{i,j} \bar{v}_{i,j}^n \dots \dots \dots (16)$$

$$\lambda_{i,j}^0 = \frac{\nu_{i,j}}{(1 + \nu_{i,j})(1 - 2\nu_{i,j})} E_{i,j}, \quad \mu_{i,j}^0 = \frac{1}{2(1 + \nu_{i,j})} E_{i,j} \dots \dots \dots (17)$$

とする。

以上から応力を次式で計算する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,i,j}^n &= \lambda_{i,j}^0 \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2k} \right) + 2\mu_{i,j}^0 \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\ \sigma_{y,i,j}^n &= \lambda_{i,j}^0 \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2k} \right) + 2\mu_{i,j}^0 \left( \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2k} \right) \\ \tau_{xy,i,j}^n &= \mu_{i,j}^0 \left( \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2k} + \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2h} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1i,j}^n, \sigma_{2i,j}^n &= \frac{\sigma_{xi,j}^n + \sigma_{yi,j}^n}{2} \\ &\pm \sqrt{\frac{(\sigma_{xi,j}^n - \sigma_{yi,j}^n)^2}{4} + (\tau_{xyi,j}^n)^2} \\ \theta_{i,j}^n &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\tau_{xyi,j}^n}{\sigma_{xi,j}^n - \sigma_{yi,j}^n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

(4) 境界条件の表現

上流面上における境界条件(7)の(i)はつぎのごとく書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos^2 \theta_1 + \sigma_y \sin^2 \theta_1 - 2\tau_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 &= 0 \\ \tau_{xy} (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) - (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta_1 \cos \theta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $\theta_1$  は上流面の鉛直となす角である。また、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  は一般につぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda^0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2\mu^0 \frac{\partial U}{\partial x} \\ \sigma_y &= \lambda^0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + 2\mu^0 \frac{\partial V}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \mu^0 \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

境界面上の点  $i, j$  点に関し式(21)を計算する場合つぎの差分式を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= (4U_{i+1,j} - U_{i+2,j} - 3U_{i,j})/2h \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= (3U_{i,j+1} + U_{i,j+2} - 4U_{i,j-1})/2k \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= (4V_{i+1,j} - V_{i+2,j} - 3V_{i,j})/2h \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= (3V_{i,j+1} + V_{i,j+2} - 4V_{i,j-1})/2k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

結局、式(22)を式(21)に代入し式(21)と式(20)を連立させて  $i, j$  点における  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, U_{i,j}, V_{i,j}$  を求める。下流面に対しても全く同様に取扱い、堤頂についてもほぼ同様に取扱う。堤底に対しては一般的に次式のごとき境界条件を与える。

$$u_{i,1}^n = f(ih, n \Delta t) \dots\dots\dots(23)$$

(5) 解の安定条件と演算

解が安定であるための条件を簡単のため基本式(5)、(6)における変位の一次微分の項を省略し、かつ  $\lambda, \mu$  を定数として求めると、つぎのごとくなる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda+3\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}}} \dots\dots\dots(24)$$

差分方程式(14)、(15)を適用する格子点は境界面上の格子点を除いた堤体内格子点全部とする。式(14)、(15)に明らかなごとく運動方程式には、 $i, j$  点を中心として

周囲の8点の変位を必要とする。したがって上、下流面格子点より一つ内側の格子点  $i, j$  については堤体外に一つだけ仮想点  $i-1, j+1$  における値が必要となる。これはたとえば変位  $u$  に対し  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  の頂が一般的にはつぎのごとき差分式で表現されるからである。

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4hk} [u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}] \dots\dots\dots(25)$$

いま  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  に対して、堤体外の仮想点  $i-1, j+1$  の値を使用しないで

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4hk} [u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - 2u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}] \dots\dots\dots(26)$$

と表現すれば、運動方程式は内点および境界上の点のみで表わされる。したがって境界より一つ内側の点に対する運動方程式を作るには式(26)を使用するものとする。

4. アース ダムの自重および静水圧による変位および応力分布

震動計算を行なうにあたって、最初のダム内各点の物理定数を定めなければならない。すなわち自重および静水圧による静的状態から震動が始まるのであるから、動的初期値として静的状態における応力に対応した物理定数を用いて計算を開始しなければならない。この意味において自重および静水圧によるアースダムの変位および応力の分布を求める。

基本方程式は式(5)の左辺を0とし式(6)の左辺を  $\rho(x, y)g$  とすれば得られる。また境界条件としてはつぎのごとくおけばよい。

(1) 貯水池空虚の場合

上流面、堤頂、下流面：式(7)の(i)、(ii)、(iii)と同じ

堤底： $u=v=0$

(2) 貯水のある場合

上流面：境界面に直角方向の応力を静水圧  $-W_0(H_0-y)$  と等しくし、平行方向のせん断応力を0とする。

堤頂、下流面：式(7)の(ii)、(iii)と同様

堤底： $u=v=0$

ここに、 $W_0$ ：水の単位体積重量  
 $H_0$ ：貯水水深  
 $y$ ：堤底からの高さ

基本式を差分化し、Successive Over Relaxation法に (m), (m+1) で表現すれば力のつりあい方程式はつぎのより解くことを考える。第 m 次, 第 m+1 次近似を

$$2 \left\{ \frac{\lambda_{i,j}^{(m)} + 2\mu_{i,j}^{(m)}}{h^2} + \frac{\mu_{i,j}^{(m)}}{k^2} \right\} u_{i,j}^{(m)} = \frac{\lambda_{i,j}^{(m)} + 2\mu_{i,j}^{(m)}}{h^2} (u_{i+1,j}^{(m)} + u_{i-1,j}^{(m)}) + \frac{\mu_{i,j}^{(m)}}{k^2} (u_{i,j+1}^{(m)} + u_{i,j-1}^{(m)}) + \frac{\lambda_{i,j}^{(m)} + \mu_{i,j}^{(m)}}{4hk} \times (v_{i+1,j+1}^{(m)} - v_{i+1,j-1}^{(m)} - v_{i-1,j+1}^{(m)} + v_{i-1,j-1}^{(m)}) + \frac{1}{4h^2} (\lambda_{i+1,j}^{(m)} - \lambda_{i-1,j}^{(m)}) (u_{i+1,j}^{(m)} - u_{i-1,j}^{(m)}) + \frac{1}{2h^2} (\mu_{i+1,j}^{(m)} - \mu_{i-1,j}^{(m)}) (u_{i+1,j}^{(m)} - u_{i-1,j}^{(m)}) + \frac{1}{4hk} (\lambda_{i+1,j}^{(m)} - \lambda_{i-1,j}^{(m)}) (v_{i+1,j}^{(m)} - v_{i-1,j}^{(m)}) + \frac{1}{4k^2} (\mu_{i,j+1}^{(m)} - \mu_{i,j-1}^{(m)}) (u_{i,j+1}^{(m)} - u_{i,j-1}^{(m)}) + \frac{1}{4hk} (\mu_{i,j+1}^{(m)} - \mu_{i,j-1}^{(m)}) (v_{i+1,j}^{(m)} - v_{i-1,j}^{(m)}) \dots \dots \dots (27)$$

$$2 \left\{ \frac{\lambda_{i,j}^{(m)} + 2\mu_{i,j}^{(m)}}{k^2} + \frac{\mu_{i,j}^{(m)}}{h^2} \right\} v_{i,j}^{(m)} = \frac{\lambda_{i,j}^{(m)} + 2\mu_{i,j}^{(m)}}{k^2} (v_{i,j+1}^{(m)} + v_{i,j-1}^{(m)}) + \frac{\mu_{i,j}^{(m)}}{h^2} (v_{i+1,j}^{(m)} + v_{i-1,j}^{(m)}) + \frac{\lambda_{i,j}^{(m)} + \mu_{i,j}^{(m)}}{4hk} \times (u_{i+1,j+1}^{(m)} - u_{i+1,j-1}^{(m)} - u_{i-1,j+1}^{(m)} + u_{i-1,j-1}^{(m)}) + \frac{1}{4k^2} (\lambda_{i,j+1}^{(m)} - \lambda_{i,j-1}^{(m)}) (v_{i,j+1}^{(m)} - v_{i,j-1}^{(m)}) + \frac{1}{2k^2} (\mu_{i,j+1}^{(m)} - \mu_{i,j-1}^{(m)}) (v_{i,j+1}^{(m)} - v_{i,j-1}^{(m)}) + \frac{1}{4hk} (\lambda_{i,j+1}^{(m)} - \lambda_{i,j-1}^{(m)}) (u_{i+1,j}^{(m)} - u_{i-1,j}^{(m)}) + \frac{1}{4h^2} (\mu_{i+1,j}^{(m)} - \mu_{i-1,j}^{(m)}) (v_{i+1,j}^{(m)} - v_{i-1,j}^{(m)}) - \rho_{i,j} g \dots \dots \dots (28)$$

m 次から m+1 次と新しく計算した値を逐次更新して行くが, 求められた  $u_{i,j}^{(m+1)}$ ,  $v_{i,j}^{(m+1)}$  に対し新しい  $u_{i,j}^{(m+1)}$ ,  $v_{i,j}^{(m+1)}$  を加速パラメーター W を用いて次式から求めて行く。

$$\left. \begin{aligned} v_{i,j}^{(m+1)} &\equiv u_{i,j}^{(m)} + W(u_{i,j}^{(m+1)} - u_{i,j}^{(m)}) \\ v_{i,j}^{(m+1)} &\equiv v_{i,j}^{(m)} + W(v_{i,j}^{(m+1)} - v_{i,j}^{(m)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (29)$$

収束判定は次式による。

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \sum_j |u_{i,j}^{(m+1)} - u_{i,j}^{(m)}| &\leq M \\ \sum_i \sum_j |v_{i,j}^{(m+1)} - v_{i,j}^{(m)}| &\leq M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

## 5. 数値計算の実例

上述計算法の実例として, 図-7 に示すとき高さ 50 m のアースダムをとりあげて見る。既述のごとく堤体材料は全部一様に 2. にあげた物性をもつ粘土からなるものとする。格子点は図-7 のごとく選び内点 99 点, 境界点 44 点とする。格子間隔,  $h=5\text{ m}$ ,  $12.5\text{ m}$ ,  $15\text{ m}$  の三種,  $k=5\text{ m}$  一種とし, 振動解の安定条件, 式 (24) を満足するよう時間間隔  $\Delta t=0.005\text{ sec}$  とする。

### (1) 貯水池空虚の場合

#### a) 静的計算

式 (27), (28) に式 (1), (2) を適用して堤体の全自重が一時に作用したときの変位, 応力の分布を計算し

た。まず静的物理定数  $\lambda$ ,  $\mu$  を想定し, これに対応した変位を想定して, 式 (30) の M の値が  $0.5 \times 10^{-4}$  となるまで約 150 回繰返し計算を行ない, 想定  $\lambda$ ,  $\mu$  に対応する変位を求めた。

この際, 式 (29) の加速パラメーター W は 1.4 に選んだ。これによって得られた応力による各格子点の  $\lambda$ ,  $\mu$  を用いて, 同じく約 150 回の繰返しを行なって変位分布を計算し, つぎに同様な計算を繰返すこと 10 回で, 各格子点における (m+1) 次, (m) 次の  $\lambda$ ,  $\mu$  値の差の総和が (m) 次の  $\lambda$ ,  $\mu$  値の各点における総和の  $1 \times 10^{-3}$  になって計算を止めた。図-8 はこの結果の変位および主応力の分布を示す。

#### b) 動的計算

式 (14), (15) に式 (3), (4) を適用し, 堤体の震動計算を行ない,  $\Delta t$  時間ごとの変位, 応力の分布を計算した。この際, 計算初期の堤体の物性には a) の静的計算によって得られた各格子点の応力を用いて式 (3), (4) から計算される値を用いた。

図-9 (a)~図-9 (g) は堤体が静止の状態から, 堤底全般に一様な単弦変位振動をうけた場合の堤体頂部の変位の経過, ならびに堤体鉛直中心線における振動型を示したものである。単弦変位振動としては, 周期 0.2 sec から 1.5 sec に至る 7 種を選び, すべて最大加速度半振幅  $100\text{ cm/sec}^2$  になるように変位振幅を定めた。

計算はすべて静止している時点から, 数波の振動をうけた間まで行なったが, この間における基本振動型と見

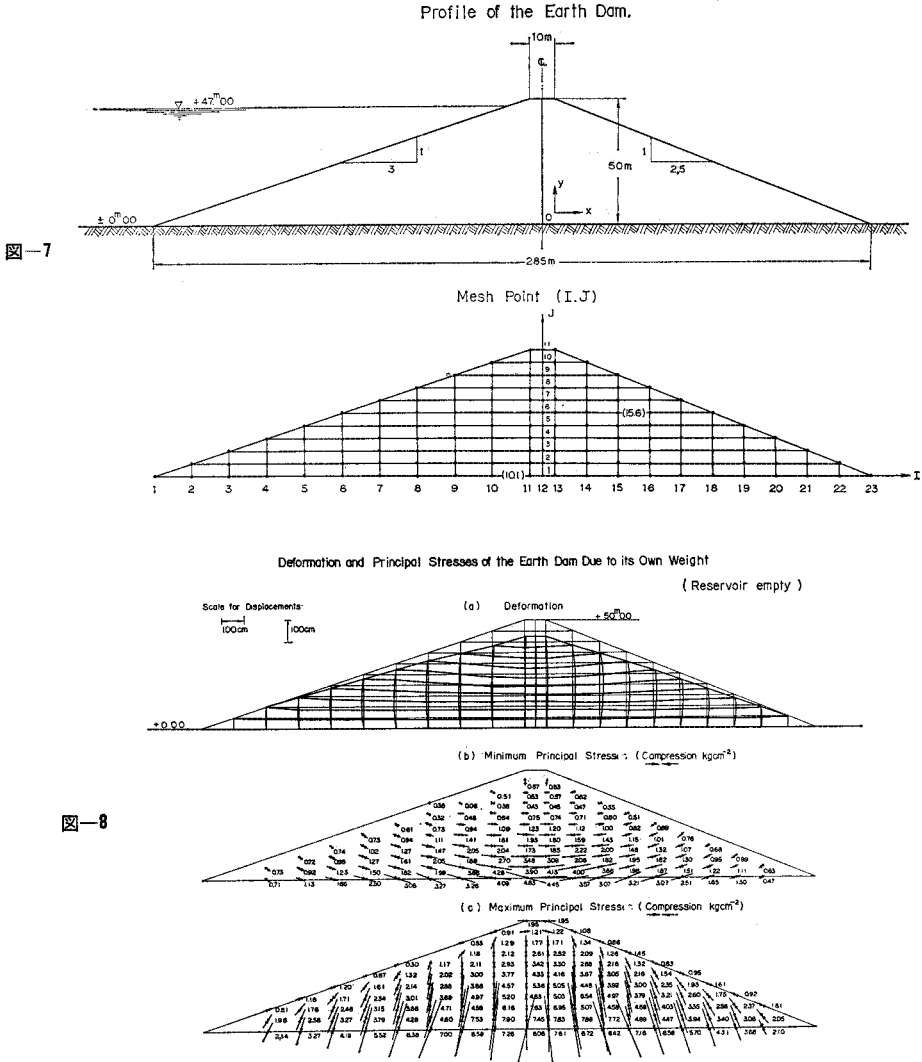


図-7

図-8

られるものについての堤頂の共振曲線を図-10に示した。共振周期は1.1 sec, 共振時の堤頂加速度は地盤加速度の7.5倍となった。

震動中のある時点における堤体変位分布, およびこれに対応した堤体応力分布(ただし, 静的応力と動的応力を加算したもの)の例を図-11(a), (b)に示した。

つぎに軟弱地盤で観測された自然地震の変位記録図-12を堤底の地動入力として計算した例を示す。

この自然地震の震動変位経過を微分して得られた加速度は同図に示すごとく最大で70 cm/sec<sup>2</sup>である。

堤頂および堤体中央部の震動変位の経過を図-12, 13に示してある。また図-14にはこの経過中の一時点における堤体における変位の分布, 応力の分布を例示した。ただし応力は自重による応力と動的応力を加算して示してある。

(2) 貯水池満水の場合

a) 静的計算

堤体自重および水圧荷重が一時に作用したとして静的変位および応力の分布を前述と同様に計算し, 図-15に示した。

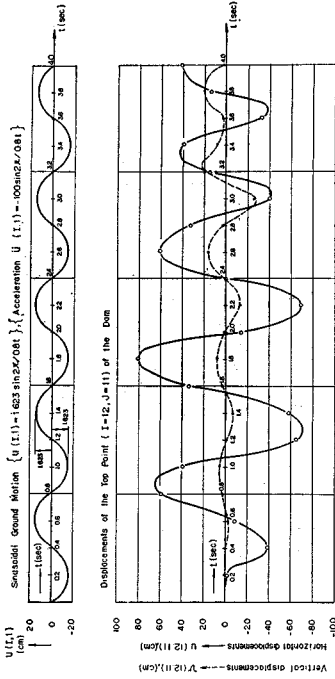
b) 動的計算

図-12に示した自然地震の変位を堤底の地動入力として震動計算を行ない, 堤頂および堤体中央部の震動変位の経過を計算した結果を図-16(a), (b)に示す。この場合既述のごとく堤体物性の初期値として貯水池満水の場合の静的応力を式(3), (4)に適用して得た値を用い, また動水圧の影響は堤体質量に比し動水圧仮想質量がきわめて小さいことから省略した。

またこの震動経過における二つの時点における変位分



Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)



Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)

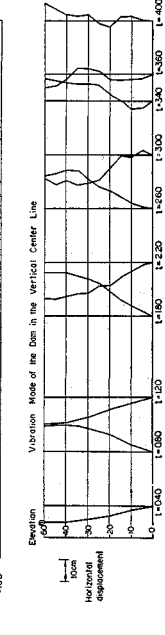
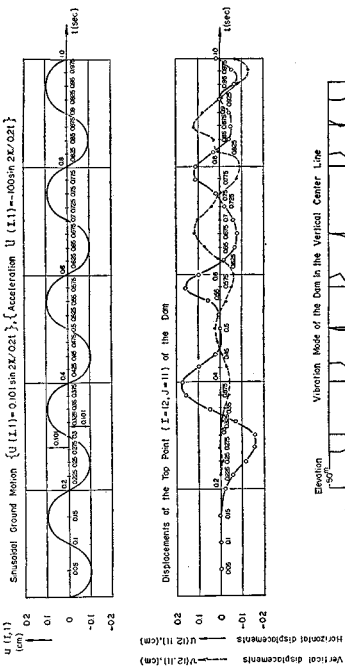
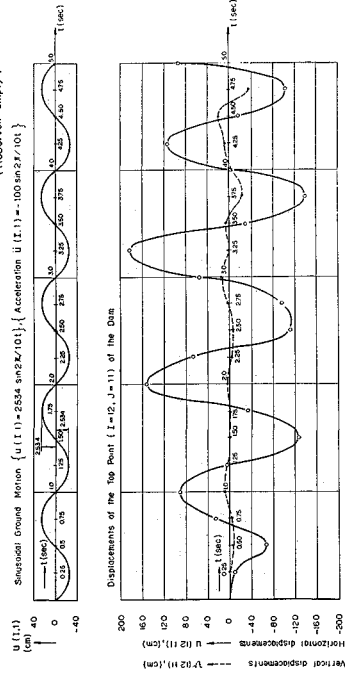


図-9 (a)

Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)



Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)

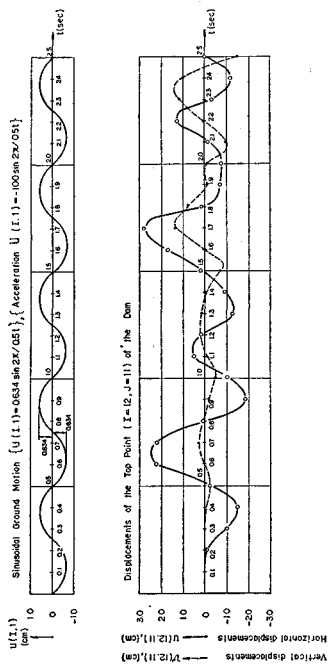
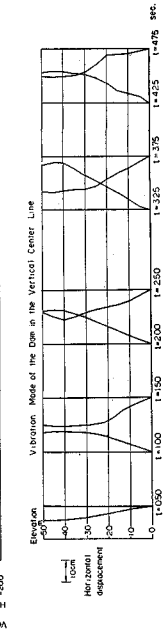


図-9 (b)



Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)

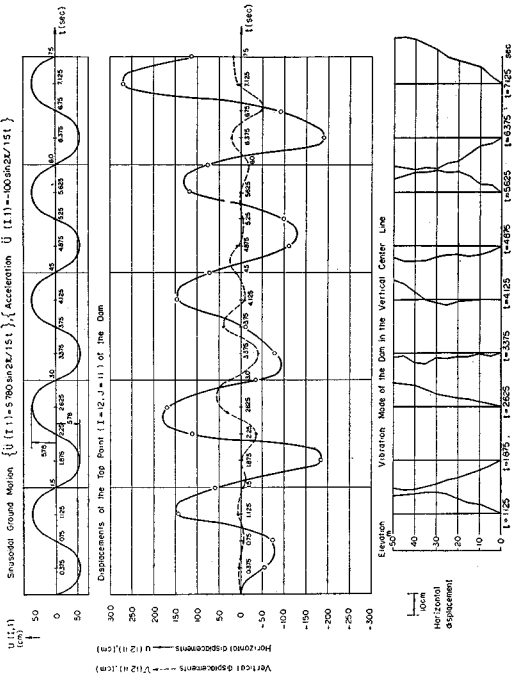


図-9 (g)

Resonance Curve of the Top Point of the Earth Dam in the Fundamental Mode.

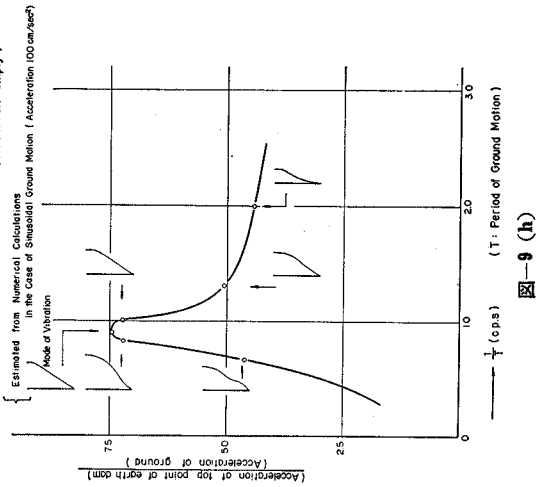


図-9 (h)

Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)

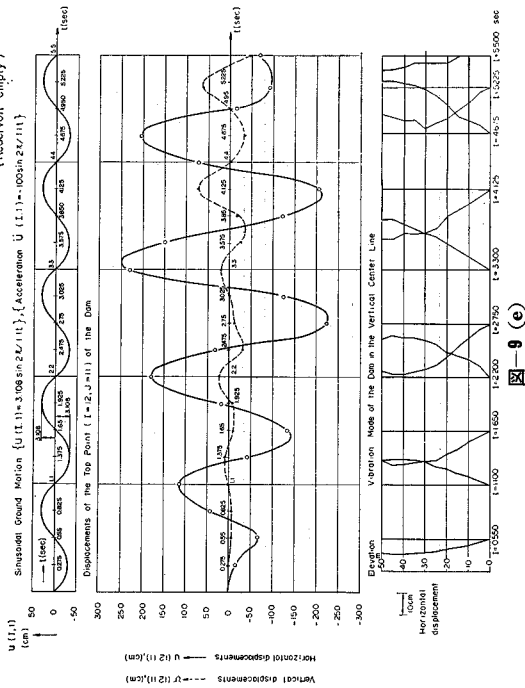


図-9 (e)

Vibration of the Earth Dam Due to Sinusoidal Ground Motion (Reservoir empty)

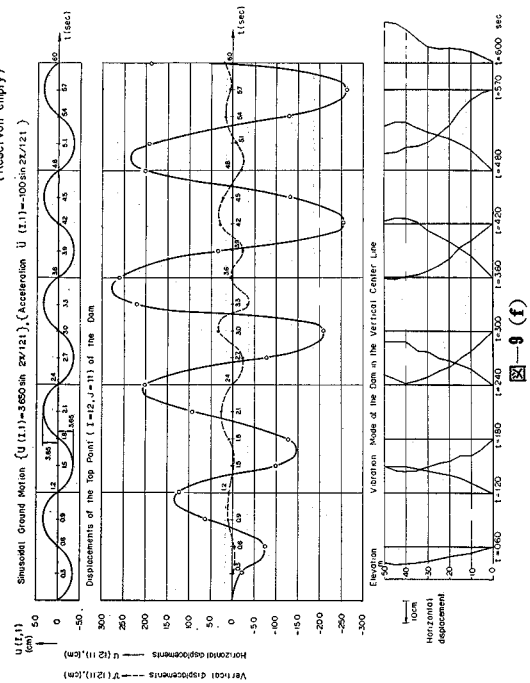


図-9 (f)

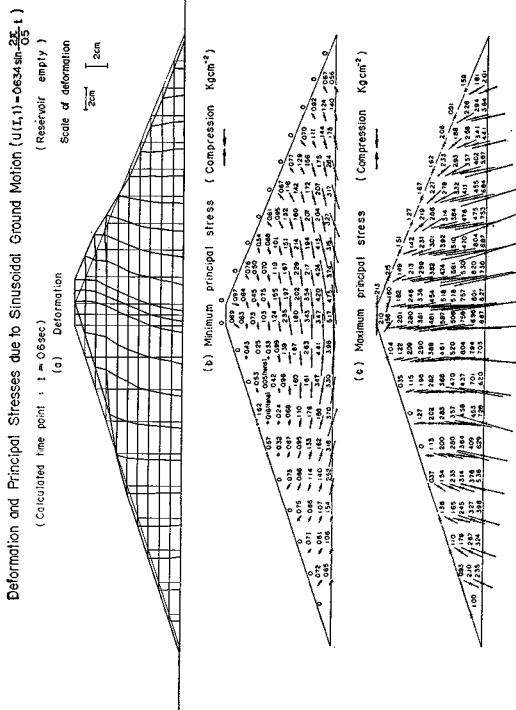


図-11 (a)

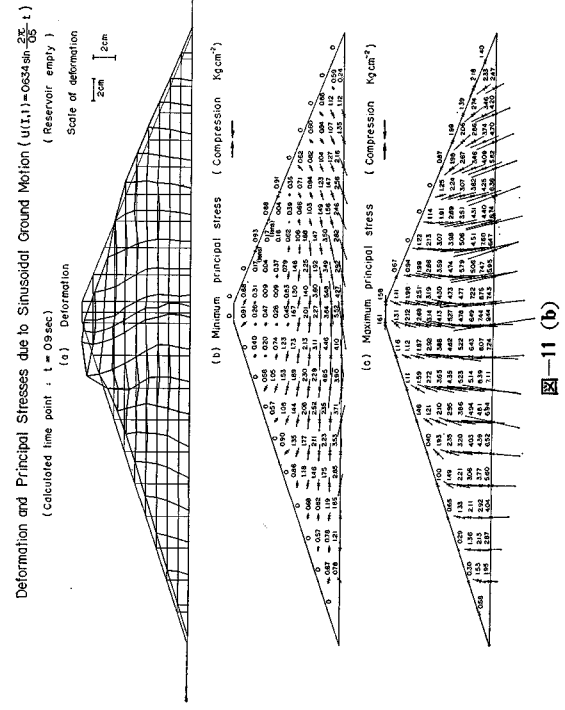


図-11 (b)

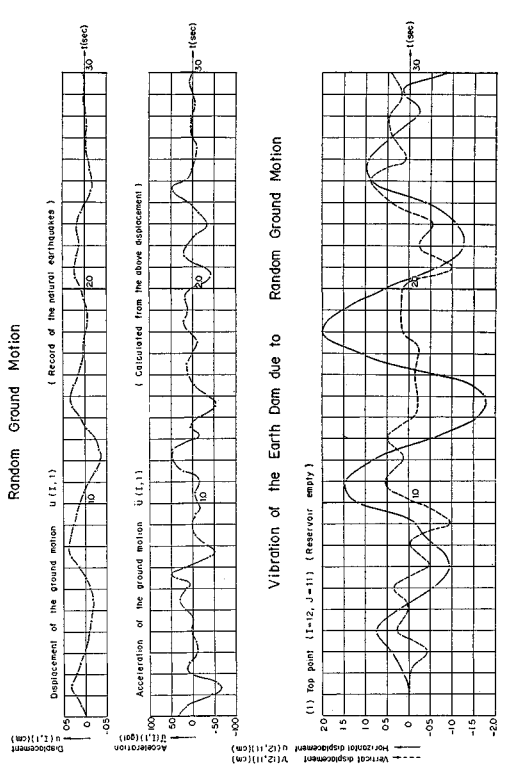


図-12

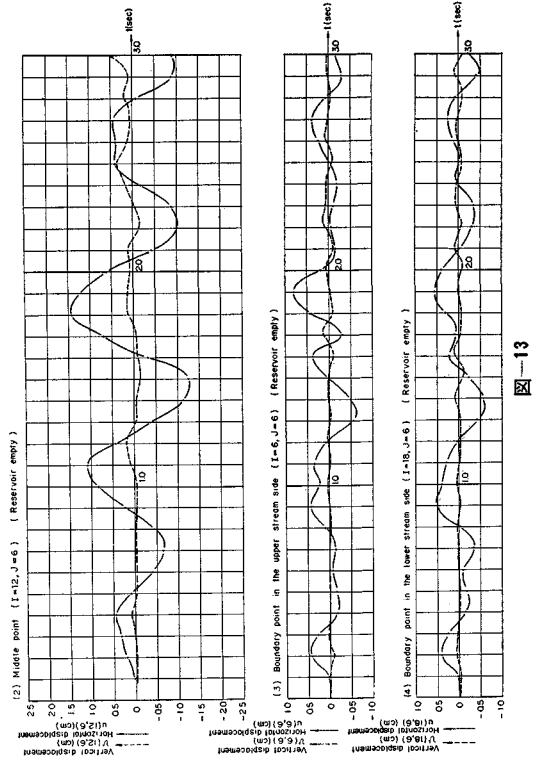


図-13

Vibration of the Earthdam due to Random Ground Motion.

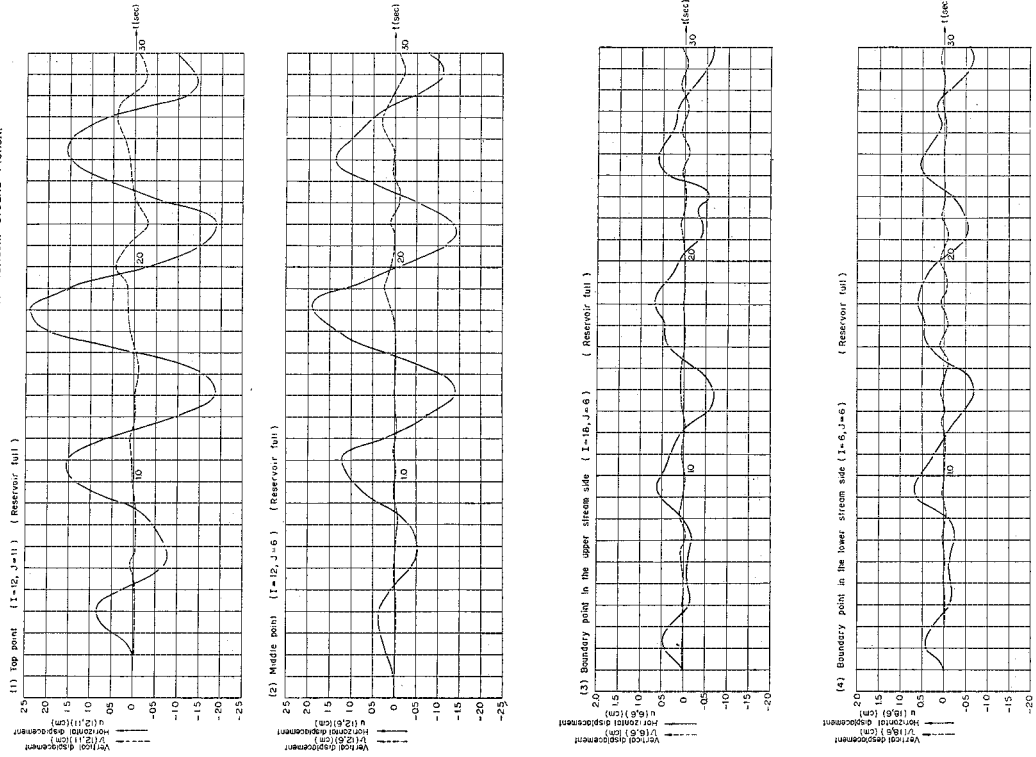


図-16

Deformation and Principal Stresses due to Random Ground Motion

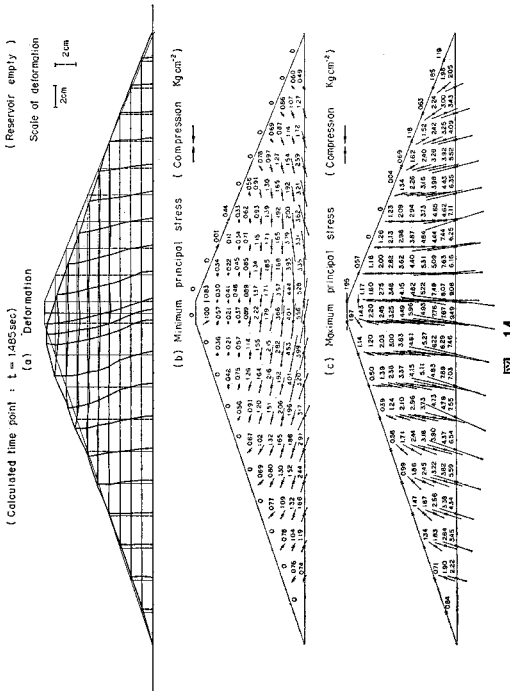


図-14

Deformation and Principal Stresses of the Earth Dam Due to its Own Weight and Water Load.

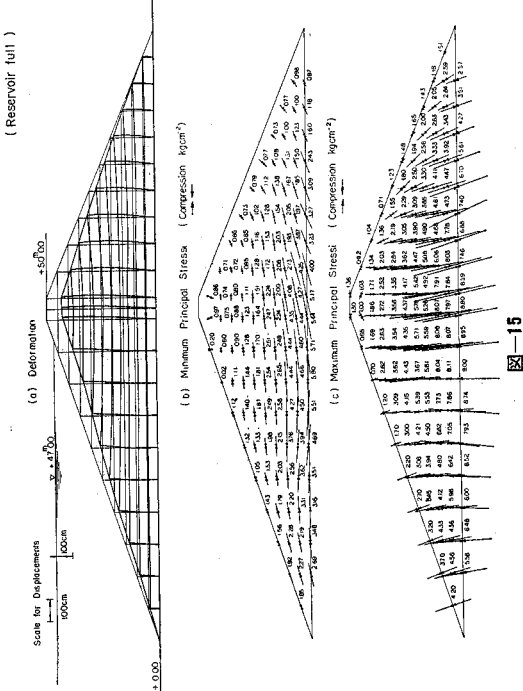


図-15

Deformation and Principal Stresses due to Random Ground Motion

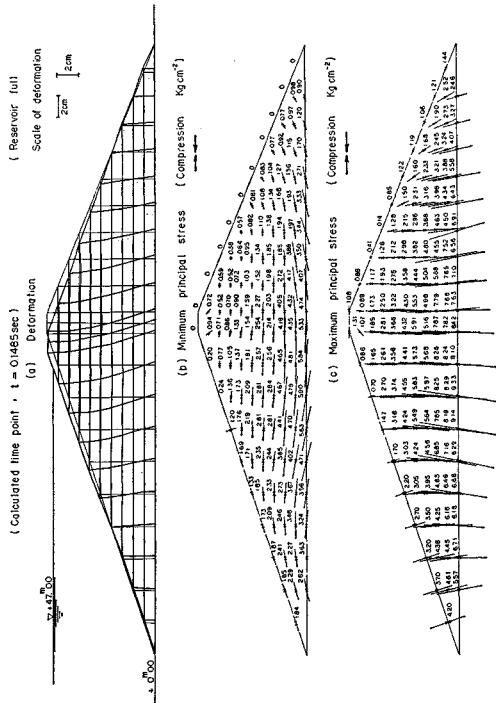


図-17 (a)

Deformation and Principal Stresses due to Random Ground Motion

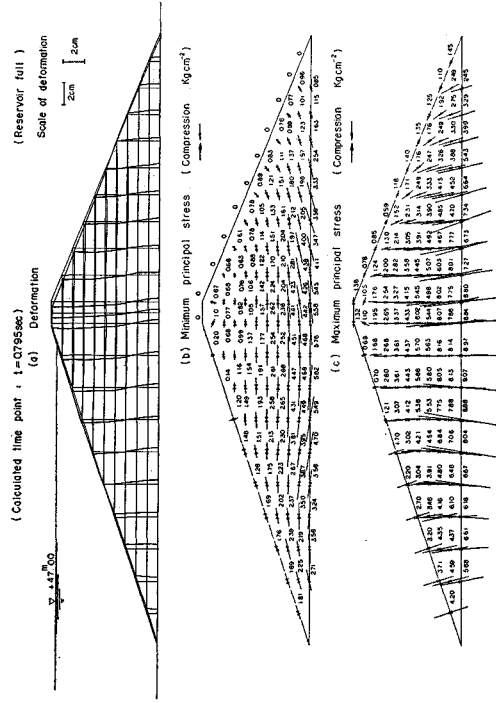


図-17 (b)

Increase of Pore Water Pressure due to Dynamic Stresses during Random Vibration (Reservoir full)

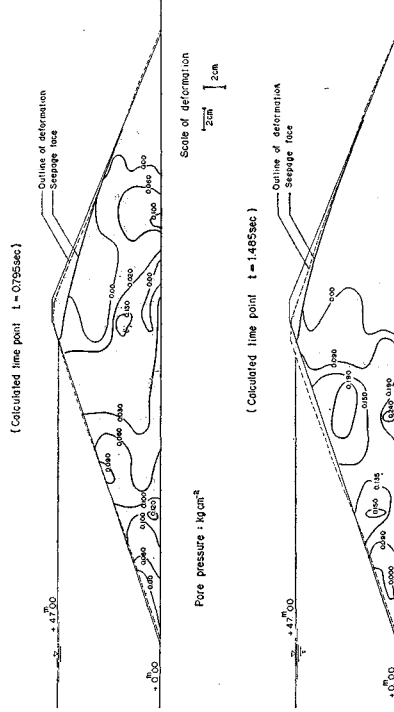


図-18

布、応力分布を図—17 (a), (b) に例示した。

アース ダムの貯水時の震動において、堤体内間げき水圧の変化という重大な問題がある。上述の計算を一適用例としてこの問題を検討した。

堤体内の動的応力によって生ずる間げき水圧の変化  $\Delta P$  は Skempton<sup>5)</sup> によって与えられた式を本例に適用できるように修正すれば次式のごとくなる。

$$\Delta P^n = \frac{1+\nu^n}{3} (\sigma_1^n + \sigma_2^n) \dots\dots\dots(31)$$

$\sigma_1^n, \sigma_2^n$  : 時刻  $t$  における動的主応力

$\nu^n$  : 動的ポアソン比

貯水池満水の場合の動的計算における  $\sigma_1^n, \sigma_2^n$  を使用して間げき水圧の増加の二つの時点における状況を求め、図—18 に示した。

## 8. 考察と結論

以上より、アース ダムの非線型震動の解析法が明らかになった。計算例から得られた知見の主要なものは、おおよそつきのごとくである。

堤体基盤が定常的な震動をしても、堤体に生ずる震動は必ずしも定常的にはならない。これは時々刻々、応力に応じて物性が変化するという、各種のモードの重なり合った複雑な震動を行なっていること等に起因するものといえよう。

7種の定常基盤震動における堤頂応答のうち、中央鉛直断面における振動型が最低次のものと考えられるものについて、共振曲線を描いた結果から、共振周期  $T_0 = 1.1 \text{ sec}$  に対して限界減衰比  $h = 0.066$  という結果が得られる。これは想定した堤体材料の物性自体に起因する減衰である。基礎地盤に、ある厚さを考え、この部分の物性をも考慮に入れて同様の計算を行なえば、堤体の振動エネルギーの基盤への散逸を含めた減衰の計算が可能

である。

図—9 や 図—10 に示した堤体中央部の鉛直断面の振動型のうち、基体振動型に近いものの型は、せん断振動における基本振動型と異なっており、従来実物ダムについて観測された振動型に近いということが、この計算例でも明らかである。

震動によって生ずる堤体内の応力、変位の分布は複雑であるが、本計算例では、静的応力と動的応力の組み合わせにおいて、堤体上部に近い上下流面およびその付近に上下流面平行方向の引張応力が生じている。これら計算結果は実際の震害により生ずる、アース ダムの上下流面における堤軸方向のきれつを説明しているといつてもよいであろう。

また、貯水時における震動において堤体の中部の高さにおける上流面およびこれに近い部分に間げき水圧の増加の大きい部分が生じており、アース ダムの震動における安定の上に大きな影響を与える要因であることが察せられる。

以上の震動解析法により、アース ダムの耐震性に関する具体的な検討が可能となると考える。

### 参考文献

- 1) 著者：粘土，砂，碎石の動的，静的粘弾性定数およびポアソン比について，土木学会論文報告集第164号，1969年4月
- 2) 松村：Deformation of Earth Dams During Earthquakes, Public Works Research Institute Report 28, 1934.  
高田：Measuremet of Rigidity Coefficients of Earth Dams, Civil Engineering No. 5-3, 1936.
- 3) H. Ishizaki, H. Hatakeyama : Consideration on the Vibrational Behaviors of Earth Dams, Disaster Prevention Research Institute Bulletin 52, 1962.
- 4) R.W. Clough, A.K. Chopea : Earthquakes Stress Analysis Earth Dams, P.A.S.C.E., April, 1966.
- 5) A.W. Skempton : The Pore Pressure Coefficients A and B Gestechnique, No. 4, 1954.

(1968.9.28・受付)