

密度成層流におよぼす point sink の高さの効果

EFFECT OF A POINT SINK LOCATION ON FLOW REGIME OF STRATIFIED FLUID

日野 幹 雄*・大西 外 明**
By Mikio Hino and Sotoaki Onishi

1. はじめに

原子力発電所や火力発電所では、復水器冷却用に多量の水を必要としているが、その冷却水取水口の構造形式の選定にさいしては、夏季やその近辺の季節に水域深層部の低温水のみを取水してタービン熱効率の増大化をはかるため、設計上種々の検討を行なう必要がある。

現在、一般に用いられている深層取水口の形式を大別すると、海岸に接して設けられるカーテン・ウォール式のもの、海岸からはなして沖合に取水口を設ける海底取水管式のものに分けることができる。海底取水管式ものは、海底付近に開口した管より取水を行なうものであるが、表面渦の発生防止と魚類の侵入を防ぐため、取水管頂部に cap を取付けるのが普通であり、これにより流れは軸対称流となる。したがって、海底取水管式取水口に流入する流れを理論的に取扱う場合、これを point sink に流入する軸対称の密度成層流として考えることができる。このことは、円筒形のカーテン・ウォール式取水口への流れに対しても同様である。著者らはすでにこの種の問題について、perturbation method により海底より任意の高さにある point sink による流れの高次近似解を発表した¹⁾。前報告では、無次元化された取水パラメーター $G=Q/2\pi\sqrt{g\beta}d^3$ がある限界値 G^* より大きい場合と小さい場合とでは、異なった理論的解法を用いなくてはならないことを示した。本論文は、全水域の水が point sink に向かって流れている状態から、次第に G を減少させる時、point sink の上部または下部に漩渦領域が発生しはじめる G の限界値 $G_{cr}(> G^*)$ について論じ、point sink の高さが G_{cr} の値および流れの様式にあたる影響を理論的に検討しようとするものである。

2. 流れの基礎方程式

(1) 軸対称密度流の基礎方程式

軸対称の成層流体の定常流れで、粘性と圧縮性を無視した場合の Navier-Stokes の式は、つぎのようになる(たとえば、Pai²⁾)。

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 r, z は 図-1 に示すような円筒座標であり、 u, w はそれぞれ r 方向および z 方向の流速である。また、 ρ は水の密度、 p は圧力、 g は重力の加速度である。

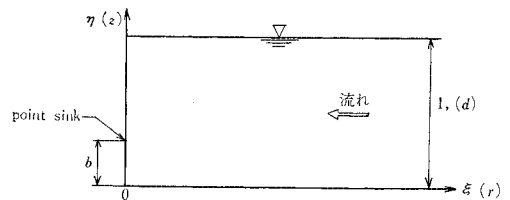


図-1 流れの座標系

連続の方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

であるが、diffusion はないものとすれば、密度は流線に沿って一定で、次式が成り立ち、

$$u \frac{\partial \rho}{\partial r} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

連続の方程式 (3) は結局、式 (5) のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

あるいは、

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(5a)$$

** 正会員 工博 東京工業大学工学部助教授
* 正会員 工修 日本原子力発電(株)

ここで、 ρ_0 をある reference density (ここでは、水域の密度をとる) として、Yih の変換³⁾

$$(u', w') = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} (u, w) \dots\dots\dots (6)$$

を行なえば、式 (1), (2), (4), (5) はそれぞれつぎのようになる。

$$u' \frac{\partial u'}{\partial r} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \dots\dots\dots (7)$$

$$u' \frac{\partial w'}{\partial r} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} g \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{u'}{r} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$u' \frac{\partial \rho}{\partial r} + w' \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式 (7), (8) より

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial r} \right) (w' dr - u' dz) \\ & = -d \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{1}{2} (u'^2 + w'^2) + \frac{\rho g z}{\rho_0} \right) + \frac{g z}{\rho_0} d\rho \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、式 (9) を満足する pseudo-stream function $\tilde{\psi}$ を導入する。

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \\ w' &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

また、式 (11) の右辺の第 1 項は、Bernoulli sum で流線に沿って一定である。これを $H(\tilde{\psi})$ とおく。

$$H(\tilde{\psi}) = p + \frac{1}{2} \rho_0 (u'^2 + w'^2) + \rho g z \dots\dots\dots (13)$$

これらを式 (11) に代入すると、密度成層流体の定常軸対称流の基礎方程式として次式がえられる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{g z}{\rho_0} \frac{d\rho}{d\tilde{\psi}} \\ & = \frac{1}{\rho_0} \frac{dH}{d\tilde{\psi}} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

(2) 直線密度分布の場合

いま、point sink より十分上流の位置における密度分布として、つぎの式 (15) で表わされる直線分布の場合を考える。

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta z), \quad \beta = (\rho_0 - \rho_1) / \rho_0 d \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 ρ_1 は水の表面での密度、 d は全水深である。また、おなじく十分上流の位置では流れは水平方向に一樣に流れるものとする、

$$\tilde{\psi} = -|U|Rz \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{dH}{dz} = \frac{dp}{dz} + g\rho + gz \frac{d\rho}{dz} = gz \frac{d\rho}{dz} \dots\dots\dots (17)$$

をうる。ここに、 U は十分上流の位置 $r=R$ における一樣な水平流速に $(\rho/\rho_0)^{1/2}$ を乗じたもので負の符号を

有する。式 (15), (16), (17) の関係を式 (14) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{g\beta z}{|U|R} \\ & = -\frac{g\beta}{(UR)^2} \tilde{\psi} \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

となる。式 (18) を無次元化するために、つぎの変換を行なう。

$$\psi = \frac{\tilde{\psi}}{|U|Rd} = \frac{2\pi\tilde{\psi}}{Q}, \quad \xi = \frac{r}{d}, \quad \eta = \frac{z}{d} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 Q は取水流量である。

結局、成層が直線分布の場合の point sink への流れは、つぎの式 (20) を解けば良い。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + G^{-2} \psi = -G^{-2} \eta \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 G は

$$G = \frac{|U|R}{\sqrt{g\beta} d^2} \dots\dots\dots (21 a)$$

あるいは、

$$G = \frac{Q}{2\pi\sqrt{g\beta} d^3} \dots\dots\dots (21 b)$$

を表わし、一種の modified densimetric Froude number である。

水域内で密度差がないと $\beta=0$ であるから $G \rightarrow \infty$ であり、式 (20) はポテンシャル流に対するものとなる。この場合には水域内に渦は生じない。これに対して $\beta \neq 0$ のときで G がある限界値以下になると、後述のように水域内に渦が発生する。

3. 任意の高さにある point sink への流れの理論解¹⁾

(1) $G > 1$ の場合

いま、point sink が海底から $\eta=b$ の高さにある場合を考える。ただし、 G の値がある限界値より大きくて、全水域の水が point sink に流入している場合である。この場合の境界条件は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \xi < \infty, \quad \eta=1, \quad \psi(\xi, \eta; b) &= -1 \\ \xi \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \psi(\xi, \eta; b) &= -\eta \\ 0 \leq \xi < \infty, \quad \eta=0, \quad \psi(\xi, \eta; b) &= 0 \\ \xi=0, \quad \left\{ \begin{aligned} 0 \leq \eta < b, \quad \psi(\xi, \eta; b) &= 0 \\ b \leq \eta \leq 1, \quad \psi(\xi, \eta; b) &= -1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

式 (20) の解は、前報告に示したように、perturbation 法によらなくてはならない。そこで、 $G > 1$ の場合の式 (20) の解を

$$\psi(\xi, \eta; b) = -\eta + \psi_0(\xi, \eta; b) + \delta\psi_1(\xi, \eta; b) + \delta^2\psi_2(\xi, \eta; b) + \dots \quad (23)$$

とおく。ここに、 $\delta = G^{-2}$ である。

これを式 (20) に代入し、 δ の同次元の項をまとめる

$$\psi_{0\xi\xi} + \psi_{0\eta\eta} - \xi^{-1}\psi_{0\xi} = 0 \quad (24 a)$$

$$\psi_{1\xi\xi} + \psi_{1\eta\eta} - \xi^{-1}\psi_{1\xi} = -\xi^2\psi_0 \quad (24 b)$$

$$\psi_{2\xi\xi} + \psi_{2\eta\eta} - \xi^{-1}\psi_{2\xi} = -\xi^2\psi_1 \quad (24 c)$$

をうる。

a) 第1次近似解

第1近似 $\psi_0(\xi, \eta; b)$ を

$$\psi_0(\xi, \eta) = X_0(\xi) \cdot Y_0(\eta) \quad (25)$$

とおき、式 (24 a) に代入すればつぎの2式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_0 - \frac{1}{\xi}\dot{X}_0 - \lambda^2 X_0 &= 0 \\ \ddot{Y}_0 + \lambda^2 Y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

境界条件を考慮すれば、 λ と Y_0 について

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= n\pi \\ Y_0(\eta) &= \sin n\pi\eta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となる。

また、 $X_0(\xi)$ は前報告にもしめたように

$$X_0(\xi) = \xi[A_n I_1(n\pi\xi) + B_n K_1(n\pi\xi)] \quad (28)$$

となる。ここに、 I_1 および K_1 はそれぞれ1次の第1種および第2種の変形された Bessel 関数、 A_n, B_n は境界条件より定まる定数である。結局、第1次近似解は式 (27), (28) の重ね合せにより、

$$\psi_0(\xi, \eta; b) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi [A_n I_1(n\pi\xi) + B_n K_1(n\pi\xi)] \sin n\pi\eta \quad (29)$$

と表わされる。式 (29) に境界条件をあてはめると、

$$\left. \begin{aligned} A_n &= 0 \\ B_n &= -2 \cos n\pi b \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

をうる。したがって、式 (29), (30) より

$$\psi_0(\xi, \eta; b) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi b \cdot \xi K_1(n\pi\xi) \cdot \sin n\pi\eta \quad (31)$$

となる。

b) 第2次近似解

式 (24) より、式 (20) の高次の近似解は一般に

$$\psi_{m\xi\xi} + \psi_{m\eta\eta} - \xi^{-1}\psi_{m\xi} = -\xi^2 \cdot \psi_{m-1} \quad (32)$$

を解けば良い。また、境界条件、式 (22) は ψ_0 によってすべて満たされているから、 ψ_m については、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 0, \xi \rightarrow \infty \\ \eta &= 0, \eta = 1 \end{aligned} \right\} \text{で } \psi_m = 0 \quad (22 a)$$

となる。

$$\psi_m(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{m,n}(\xi) \sin n\pi\eta$$

とおき、式 (32) に代入すると、

$$\begin{aligned} &\sum \ddot{X}_{m,n}(\xi) \sin n\pi\eta - \sum (n\pi)^2 X_{m,n}(\xi) \sin n\pi\eta \\ &- \frac{1}{\xi} \sum \dot{X}_{m,n}(\xi) \sin n\pi\eta \\ &= -\xi^2 \sum X_{m-1,n}(\xi) \sin n\pi\eta \end{aligned}$$

となる。上式に $\sin n\pi\eta$ をかけ、 η について (0, 1) の範囲で積分すれば、

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{m,n}(\xi) - \frac{1}{\xi} \dot{X}_{m,n}(\xi) - (n\pi)^2 X_{m,n}(\xi) \\ = -\xi^2 X_{m-1,n}(\xi) \quad (33) \end{aligned}$$

をうる。第2近似解については、 $m=1$ として

$$\ddot{X}_1(\xi) - \frac{1}{\xi} \dot{X}_1(\xi) - (n\pi)^2 X_1(\xi) = -\xi^2 X_0(\xi) \quad (33 a)$$

である。式 (33 a) の右辺の $X_0(\xi)$ は a) 項で示した通りであり、この右辺を $S(\xi)$ とおく。

$$S(\xi) = -\xi^2 X_0(\xi) = 2 \cos n\pi b \cdot \xi^3 K_1(n\pi\xi) \quad (34)$$

式 (33) の同次方程式

$$\ddot{X}_1(\xi) - \frac{1}{\xi} \dot{X}_1(\xi) - (n\pi)^2 X_1(\xi) = 0 \quad (35)$$

の互いに独立な解は、a) で示したように

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \xi I_1(n\pi\xi) \\ u_2 &= \xi K_1(n\pi\xi) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

である。このとき、非同次方程式の特解は

$$-u_1 \int \frac{Su_2}{W(u_1, u_2)} d\xi + u_2 \int \frac{Su_1}{W(u_1, u_2)} d\xi \quad (37)$$

により与えられる。ここに、 $W(u_1, u_2)$ は Wronskian であり、

$$\begin{aligned} W(u_1, u_2) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \xi I_1(n\pi\xi) \{K_1(n\pi\xi) \\ &- n\pi\xi K_1'(n\pi\xi)\} - \xi K_1(n\pi\xi) \{I_1(n\pi\xi) \\ &- n\pi\xi I_1'(n\pi\xi)\} = -\xi \quad (38) \end{aligned}$$

となる。式 (34), (36), (38) を式 (37) に代入すれば、

$$\begin{aligned} -u_1 \int \frac{Su_2}{W(u_1, u_2)} d\xi + u_2 \int \frac{Su_1}{W(u_1, u_2)} d\xi \\ = 2 \cos n\pi b \left[\xi I_1(n\pi\xi) \int \xi^3 K_1^2(n\pi\xi) d\xi \right. \\ \left. - \xi K_1(n\pi\xi) \int \xi^3 I_1(n\pi\xi) K_1(n\pi\xi) d\xi \right] \quad (39) \end{aligned}$$

したがって、 $X_1(\xi)$ はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} X_1(\xi) &= c_1 u_1 + c_2 u_2 \\ &+ 2 \cos n\pi b \left[\xi I_1(n\pi\xi) \int \xi^3 K_1^2(n\pi\xi) d\xi \right. \\ &- \xi K_1(n\pi\xi) \int \xi^3 I_1(n\pi\xi) K_1(n\pi\xi) d\xi \left. \right] \quad (40) \end{aligned}$$

境界条件を考慮すれば、前報告でも示したように、上式の定数は $c_1 = c_2 = 0$ であり、積分の上下限は $\xi=0$ および $\xi \rightarrow \infty$ で $\xi I_1 \int \xi^3 K_1^2 d\xi$ および $\xi K_1 \int \xi^3 I_1 K_1 d\xi$ が

0 になるように、それぞれ (∞, ξ) $(0, \xi)$ とする。

したがって、第 2 近似解 $\psi_1(\xi, \eta; b)$ は

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta; b) = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \pi b \\ & \cdot \sin n \pi \eta \left[\int_{\xi}^{\infty} I_1(n \pi \xi) \int_{\xi}^{\infty} \xi^3 K_1^2(n \pi \xi) d \xi \right. \\ & \left. + \xi K_1(n \pi \xi) \int_0^{\xi} \xi^3 I_1(n \pi \xi) K_1(n \pi \xi) d \xi \right] \end{aligned} \quad (41)$$

式 (41) の右辺の積分は、Bessel 関数に関する Lommel 公式に相對する公式を、つぎのように I_{μ}, K_{ν} について導けば簡単な式に変形される。 μ, ν 次の第 1 種および第 2 種の変形 Bessel 関数 I_{μ}, K_{ν} およびそれらの微分の間には、

$$\left. \begin{aligned} I_{\mu}' &= \frac{\mu}{z} I_{\mu} + I_{\mu+1} = I_{\mu-1} - \frac{\mu}{z} I_{\mu} \\ K_{\nu}' &= \frac{\nu}{z} K_{\nu} - K_{\nu+1} = -K_{\nu-1} - \frac{\nu}{z} K_{\nu} \end{aligned} \right\} \dots(42)$$

の関係がある (Bessel 関数については、たとえば Watson⁴⁾)。

これらの関係を用いて次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} [z^{\rho} I_{\mu} K_{\nu}]' &= z^{\rho} [I_{\mu+1} \cdot K_{\nu} - I_{\mu} \cdot K_{\nu+1}] \\ &+ z^{\rho-1} [\mu + \nu + \rho] I_{\mu} \cdot K_{\nu} \\ [z^{\rho} I_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1}]' &= z^{\rho} [I_{\mu} \cdot K_{\nu+1} - I_{\mu+1} \cdot K_{\nu}] \\ &+ z^{\rho-1} [-\mu - \nu + \rho - 2] I_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1} \end{aligned} \right\} \dots(43)$$

したがって、上式の和の積分により

$$\begin{aligned} & (\rho + \mu + \nu) \int_0^z z^{\rho-1} I_{\mu} \cdot K_{\nu} dz \\ & + (\rho - \mu - \nu - 2) \int_0^z z^{\rho-1} I_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1} dz \\ & = z^{\rho} [I_{\mu} \cdot K_{\nu} + I_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1}] \dots(44) \end{aligned}$$

をうる。上式で、とくに、 $\rho = \mu + \nu + 2$ とおけば

$$\begin{aligned} & \int z^{\mu+\nu+1} I_{\mu} \cdot K_{\nu} dz \\ & = \frac{z^{\mu+\nu+2}}{2(\mu+\nu+1)} [I_{\mu} \cdot K_{\nu} + I_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1}] \dots(45) \end{aligned}$$

また、式 (42) から

$$I_{\nu+1} = I_{\nu-1} - \frac{2\nu}{z} I_{\nu}, \quad K_{\nu+1} = K_{\nu-1} + \frac{2\nu}{z} K_{\nu} \quad (42a)$$

したがって

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} \xi^3 I_1(n \pi \xi) K_1(n \pi \xi) dz \\ & = \frac{\xi^4}{2 \times 3} \left[I_1(n \pi \xi) \cdot K_1(n \pi \xi) \right. \\ & \left. + I_2(n \pi \xi) \cdot K_2(n \pi \xi) \right] \dots(46) \end{aligned}$$

の関係をうる。

なお、 $z \rightarrow \infty$ の極限では、

$$\int_0^z z^m I_1(z) K_1(z) dz \cong z^{m+1} \cdot \frac{e^z}{\sqrt{z}} \cdot \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} = z^m$$

したがって、

$$z K_1(z) \int_0^z z^m I_1(z) K_1(z) dz \propto z^{m+1} e^{-z} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty)$$

となる。それゆえ、式 (41) が境界条件を満足していることが明らかである。

同様の式の展開をつぎのように行なう。

$$\left. \begin{aligned} [z^{\rho} K_{\mu}(z) K_{\nu}(z)]' &= z^{\rho} [-K_{\mu+1} \cdot K_{\nu} - K_{\mu} \cdot K_{\nu+1}] \\ &+ z^{\rho-1} (\rho + \mu + \nu) K_{\mu} \cdot K_{\nu} \\ [z^{\rho} K_{\mu+1}(z) K_{\nu+1}(z)]' &= z^{\rho} [-K_{\mu} \cdot K_{\nu+1} - K_{\mu+1} \cdot K_{\nu}] \\ &+ z^{\rho-1} (\rho - \mu - \nu - 2) K_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1} \end{aligned} \right\} \dots(47)$$

上式の差の積分から

$$\begin{aligned} & (\rho + \mu + \nu) \int z^{\rho-1} K_{\mu} \cdot K_{\nu} dz \\ & - (\rho - \mu - \nu - 2) \int z^{\rho-1} K_{\mu+1} K_{\nu+1} dz \\ & = z^{\rho} [K_{\mu} \cdot K_{\nu} - K_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1}] \dots(48) \end{aligned}$$

上式で、とくに $\rho = \mu + \nu + 2$ とおけば

$$\begin{aligned} & \int z^{\mu+\nu+1} K_{\mu} \cdot K_{\nu} dz \\ & = \frac{z^{\mu+\nu+2}}{2(\mu+\nu+1)} [K_{\mu} \cdot K_{\nu} - K_{\mu+1} \cdot K_{\nu+1}] \dots(49) \end{aligned}$$

$z \rightarrow \infty$ のとき、 $K_{\nu} \propto e^{-z}/z$ 、したがって、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z^{m-1} e^{-z}) = \lim_{z \rightarrow \infty} m! e^{-z} = 0$$

を考慮すれば、式 (41) に含まれる積分の一つは、つぎのように簡単化される。

$$\int_0^{\xi} \xi^3 K_1^2(n \pi \xi) d \xi = \frac{\xi^4}{6} \{K_1^2(n \pi \xi) - K_2^2(n \pi \xi)\} \dots(50)$$

式 (46), (50) を用いれば、式 (41) はつぎのように書き替えられる。

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta; b) = & -\frac{1}{3} \xi^5 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \pi b \cdot \sin n \pi \eta \\ & \times \{ [I_1(n \pi \xi) K_0(n \pi \xi) + I_0(n \pi \xi) K_1(n \pi \xi)] \\ & \times K_2(n \pi \xi) \} \dots(51) \end{aligned}$$

さらに、

$$I_{\nu}(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_{\nu}(z) = 1/z \quad (52)$$

の関係を考慮すれば、 $\psi_1(\xi, \eta; b)$ は結局

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta; b) = & -\frac{1}{3} \xi^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi b \cdot \sin n \pi \eta}{n \pi} \\ & \cdot K_2(n \pi \xi) \dots(53) \end{aligned}$$

c) 第 3 次近似解

同様に微分方程式 (32), (33), 境界条件式 (22 a) より、高次の近似解をもとめることができる。

式 (37) において

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \xi I_1(n \pi \xi) \\ u_2 &= \xi K_1(n \pi \xi) \\ W(u_1, u_2) &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = -\xi \end{aligned} \right\} \dots(54)$$

$$S = -\xi^2 \psi_{m-1} = \frac{\cos n \pi b}{3 n \pi} \xi^6 \cdot K_2(n \pi \xi) \quad \left\{ \right.$$

であるから、

$$\begin{aligned} X_2(\xi) &= c_1 \xi I_1(n \pi \xi) + c_2 \xi K_1(n \pi \xi) \\ &- \xi I_1(n \pi \xi) \int \frac{\xi K_1(n \pi \xi)}{(-\xi)} \times \frac{\cos n \pi b}{3 n \pi} \\ &\times \xi^6 K_2(n \pi \xi) + \xi K_1(n \pi \xi) \int \frac{\xi I_1(n \pi \xi)}{(-\xi)} \\ &\cdot \frac{\cos n \pi b}{3 n \pi} \cdot \xi^6 K_2(n \pi \xi) d \xi \dots\dots\dots(55) \end{aligned}$$

をうる。

境界条件 (22 a) を考慮すれば、第 3 近似解は

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi, \eta; b) &= -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi b \cdot \sin n \pi \eta}{(n \pi)} \\ &\times \left[\xi I_1(n \pi \xi) \int_{\xi}^{\infty} \xi^6 K_1(n \pi \xi) K_2(n \pi \xi) d \xi \right. \\ &\left. + \xi K_1(n \pi \xi) \int_0^{\xi} \xi^6 I_1(n \pi \xi) K_2(n \pi \xi) d \xi \right] \dots\dots\dots(56) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} I_{\nu-1}(z) &= I_{\nu+1}(z) + \frac{2\nu}{z} I_{\nu}(z) \\ K_{\nu-1}(z) &= K_{\nu+1}(z) - \frac{2\nu}{z} K_{\nu}(z) \end{aligned} \right\}$$

の関係をいれれば、式 (56) の右辺の積分は、

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^z z^6 I_1(z) K_2(z) dz \\ &= \int_0^z \{z^6 I_3(z) K_2(z) + 4 z^5 I_2(z) K_2(z)\} dz \\ &\int_z^{\infty} z^6 K_1(z) K_2(z) dz \\ &= \int_z^{\infty} \{z^6 K_2(z) K_3(z) - 4 z^5 K_2^2(z)\} dz \end{aligned} \right\}$$

となる。上式に、式 (45)、(49) の関係を適用すれば

$$\begin{aligned} &\int_0^z z^6 I_1(z) K_2(z) dz = \frac{z^7}{2 \times 6} [I_3 K_2 + I_4 K_3] \\ &+ \frac{4 z^6}{2 \times 5} [I_2 K_2 + I_3 K_3] \\ &\int_z^{\infty} z^6 K_1(z) K_2(z) dz \\ &= -\frac{z^7}{2 \times 6} [K_2 K_3 - K_3 K_4] + \frac{4 z^6}{2 \times 5} [K_2^2 - K_3^2] \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\psi_2(\xi, \eta; b)$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi, \eta; b) &= -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi b \cdot \sin n \pi \eta}{n \pi} \\ &\times \left[\frac{\xi^6}{2 \times 6} \{-I_1 K_2 K_3 + I_1 K_3 K_4 + I_3 K_1 K_2 \right. \\ &+ I_4 K_1 K_3\} + \frac{2 \xi^7}{5 n \pi} \{I_1 K_2^2 - I_1 K_3^2 \\ &+ I_2 K_1 K_2 + I_3 K_1 K_3\} \dots\dots\dots(56 a) \end{aligned}$$

結局、 $\psi(\xi, \eta; b)$ は式 (31)、(53)、(56 a) より、つぎ

のように表わされる。

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta; b) &= -\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \pi b \\ &\cdot \sin n \pi \eta \left[2 \xi K_1(n \pi \xi) + \frac{\delta}{3 n \pi} \xi^4 K_2(n \pi \xi) \right. \\ &+ \frac{\delta^2}{3 n \pi} \xi^7 \left\{ \frac{\xi}{2 \times 6} (-I_1 K_2 K_3 + I_1 K_3 K_4 \right. \\ &+ I_3 K_1 K_2 + I_4 K_1 K_3) + \frac{2}{5 n \pi} (I_1 K_2^2 - I_1 K_3^2 \\ &+ I_2 K_1 K_2 + I_3 K_1 K_3) \left. \right\} \left. \right] + O(\delta^3) \dots\dots\dots(57) \end{aligned}$$

(2) $G < 1$ の場合

$G < 1$ の場合には、新たに

$$\varepsilon = G^2 \ll 1 \dots\dots\dots(58)$$

をパラメーターにとる。また、座標変換

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\varepsilon} x \\ \eta &= \sqrt{\varepsilon} y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

を行なえば、基礎方程式、式 (20) はつぎようになる。

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - x^{-1} \psi_x + \varepsilon x^2 \psi = -\varepsilon \sqrt{\varepsilon} x^2 y \dots\dots(60)$$

(1) の $G > 1$ の場合と同様に

$$\psi = -\sqrt{\varepsilon} y + \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \dots\dots(61)$$

と表わせば、 ψ_0, ψ_1, ψ_2 等について次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{0xx} + \psi_{0yy} - x^{-1} \psi_{0x} &= 0 \\ \psi_{1xx} + \psi_{1yy} - x^{-1} \psi_{1x} &= -x^2 \psi_0 \\ \psi_{2xx} + \psi_{2yy} - x^{-1} \psi_{2x} &= -x^2 \psi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

これを式 (59) により、再び (ξ, η) に関する微分方程式に直せば、つぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{0\xi\xi} + \psi_{0\eta\eta} - \xi^{-1} \psi_{0\xi} &= 0 \\ \psi_{m\xi\xi} + \psi_{m\eta\eta} - \xi^{-1} \psi_{m\xi} &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \xi^2 \psi_{m-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62 a)$$

式 (62 a) の第 1 式は式 (24 a) と同様であり、解は式 (29) で与えられる。式 (62 a) の第 2 式も式 (24 b, c) とは右辺に $1/\varepsilon^2$ の係数がかかっている点のみ異なるだけである。したがって、 $G^2 \ll 1$ の場合の基本解 $\psi(\xi, \eta) = H(\xi, \eta; b)$ はつぎの式 (63) のように表わされる。

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) &= H(\xi, \eta; b) \\ &= -\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \pi b \\ &\cdot \sin n \pi \eta \left[\xi K_1(n \pi \xi) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\xi^4}{6 n \pi} K_2(n \pi \xi) \right. \\ &+ \frac{1}{6 n \pi} \left\{ \frac{\xi^6}{2 \times 6} (-I_1 K_2 K_3 + I_1 K_3 K_4 + I_3 K_1 K_2 \right. \\ &+ I_4 K_1 K_3) + \frac{2 \xi^7}{5 n \pi} (I_1 K_2^2 - I_1 K_3^2 + I_2 K_1 K_2 \\ &+ I_3 K_1 K_3) \left. \right\} \left. \right] + O(\varepsilon^3) \dots\dots\dots(63) \end{aligned}$$

ここに、 $\varepsilon = G^2$ である。また、 I_n, K_n はそれぞれ $I_n(n \pi \xi), K_n(n \pi \xi)$ である。

式 (63) より, G^2 が小さいと水域の上層部に $\psi < -1.0$ の領域が生じ, 逆流がおこることがわかる。

4. 流れにおよぼす point sink の高さの影響

以上 3. において導いた式 (57) は, Q/d がかなり大きく, また成層度 β も少なく, パラメーター G が 1 より大きい場合に相当し, この場合には水域内の流体はすべて $\eta=b$ にある point sink に流入する。いま, G の値が減少して $G < 1$ となると, 式 (63) により表わされる流れが生じる。 G がある限界値 $G_{cr} (< 1)$ に達すると, point sink の一方 (深さの中心に関して point sink と反対の側) に渦み領域が発生し, さらに G が小さくなり $G = G^*$ になると渦み領域は $\xi \rightarrow \infty$ に達する。 $G < G^*$ では, 水域に渦み層が生じ, dividing streamline より下層部の水のみが point sink に流入することとなる。この現象は, 2次元流れの場合において知られている。すなわち, Yih⁵⁾ は二次元の密度成層流につき検討を行なったが, そのさい, 無次元化した取水パラメーター $F = U'(\beta g d^3)^{-1/2}$ が $1/\pi$ のとき, 水域上層の渦が $\xi \rightarrow \infty$ に達することを示した。ここに, U' は sink より十分上流における一様水平流速を U として, 次式で表わされる値である。

$$U' = \sqrt{\rho/\rho_0} U$$

また, Kao⁶⁾ も同様の問題を取り扱い, F が Yih の値より大きい 0.345 で水域内部に渦み層が生じることを明らかにしている。本論文で問題としている軸対称流の場合にも, 二次元流れの場合と同様の現象が生じると考えられる。また, 上記の二次元流れに関する研究結果から, 軸対称流で渦が発生しはじめる G_{cr} と, dividing streamline が生じる G^* との値は互いに近い値であることが推察できる。 $G < G^*$ の流れの状態では基礎方程式 (20) に必要な $\xi \rightarrow \infty$ での境界条件が満たされなくなるため, 式 (57), (63) をみちびいたものと異なった境界条件のもとに流れの場が作られていると考えられる。このような場合には, 前報告でのべたように, 実際の point sink のほかに virtual sink を仮定して, これら二つの sink への流れを重ね合わせることで, 実際の

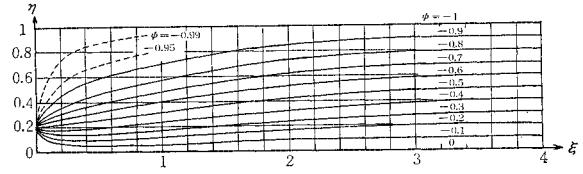


図-2 $b=0.2, G=0.150$ の場合の流れ

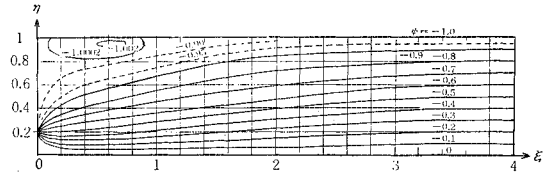


図-3 $b=0.2, G=0.130$ の場合の流れ

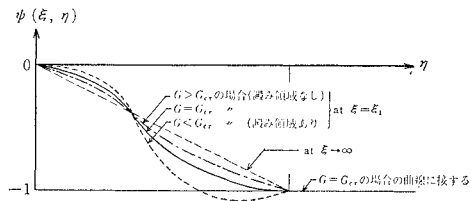


図-4 $[\psi-\eta]$ 曲線と G_{cr} の関係

point sink へ流入する水域の範囲を求めることができる。実際に深層取水の行なわれる条件は, このように G の値が小さく渦み領域を有する場合に相当することが多く, また, そのように取水条件を設定するほうが, 冷却水の取水効果を増すわけである。水域上層または下層に渦み層が存在する場合, 式 (21) の d として $d' = \{(\text{全水深}) - (\text{渦み層の厚さ})\}$ を用いなくてはならないが,

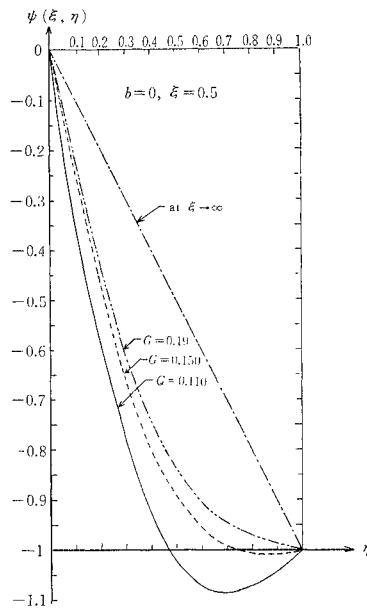


図-5 $b=0$ の場合の ψ と η の関係 (at $\xi=0.5$)

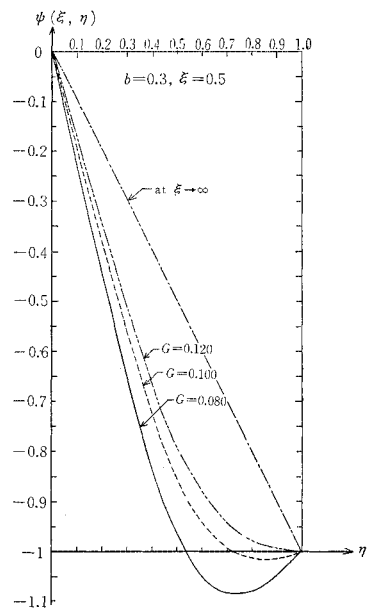


図-6 $b=0.3$ の場合の ψ と η の関係 (at $\xi=0.5$)

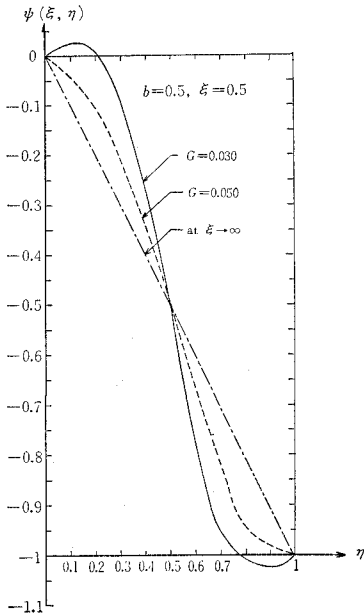


図 7 $b=0.5$ の場合の ψ と η の関係 (at $\xi=0.5$)

このようにして求めた G は常にその point sink の流動領域における相対的高さ $(b/d'$ または $(1-b)/d'$) に対応する G_{cr} となる。以上のことを考慮し、さらに、実際の取水条件は $G < G_{cr}$ であることが多いことを勘案すると、 G_{cr} の大きさを知ることは取水口設計上欠くことのできない事項であるといえる。 $G > G_{cr}$ の場合の流れは、式 (57) または式 (63) により表わされるが、 G_{cr} 近傍の流れの例を図示すると 図-2、図-3 のとおりである。また、 ψ の値が η とともに変化する状態を図示すると、一般に、図-4 のようになる。この図に示したように、 $\xi \rightarrow \infty$ では、 η と ψ は仮定により、直線変化をなす。しかし、point sink に近い位置では、当然、この直線関係はみだされるが、 G_{cr} は、この η - ψ 曲線が $\psi=-1$ を示す直線に接する流れの状態をあたえるものである。 η - ψ 曲線が $\psi=-1$ より下方領域にあるときには、point sink 上部水域に激み領域が存在し、一方、同曲線が $\psi=-1$ より上方領域にあるときには point sink 上部には激み領域は存在しない。

式 (63) を用いて $\xi=0.5$ での η - ψ 曲線を $b=0$,

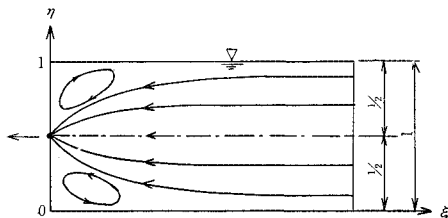


図-9 $\eta=0.5$ を対称軸とする上下対称流

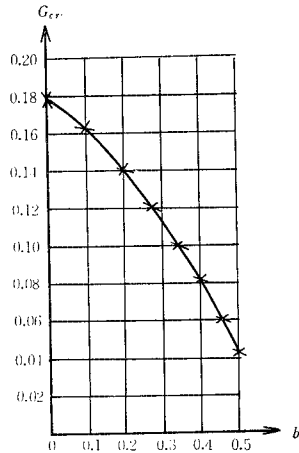


図-8 point sink の高さ b と G_{cr} の関係

0.3, 0.5 の場合について計算した結果は、図-5、図-6、図-7 に示すとおりである。これらの図によってもわかるように、 G_{cr} の値は point sink の高さ b により、異なった大きさをとる。そこで、おなじく式 (63) を用いて、 b と G_{cr} の関係を求めてみると、その結果は、図-8 に示すとおりである。なお、 $b > 1/2$ の場合の G_{cr} と b の関係は $b=1/2$ に関して対称である。いま、 $b=0$ のときの G_{cr} を $G_{cr,(b=0)}$ 、 $b=0.5$ のときの G_{cr} を $G_{cr,(b=0.5)}$ とすると、図-8 に示すように計算結果では

$$G_{cr,(b=0.5)} = 0.222 \times G_{cr,(b=0)}$$

である。この関係はつぎのように説明することができる。すなわち、 $G_{cr,(b=0)}$ に相当する流量を Q_c とすると、式 (21)

より

$$G_{cr,(b=0)} = \frac{Q_c}{2\pi\sqrt{g\beta}d^3} \dots\dots\dots(65)$$

である。図-9 に示すように、 $\eta=1/2$ を対称面とし、その上下水域における流れが対称な場合を考え、その時の全流量を Q_c' とすると

$$G_{cr,(b=0.5)} = \frac{Q_c'}{2\pi\sqrt{g\beta}d^3} \dots\dots\dots(66)$$

である。一方、図-9 の $\eta=1/2$ より半分の水域の流れのみを考えると、

$$G_{cr,(b=0)} = \frac{Q_c'/2}{2\pi\sqrt{g\beta}\left(\frac{d}{2}\right)^3} \dots\dots\dots(67)$$

をうる。式 (65)、(67) の関係から

$$Q_c' = \frac{1}{4} Q_c \dots\dots\dots(68)$$

となる。式 (68) を式 (66) に代入すると

$$G_{cr,(b=0.5)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{Q_c}{2\pi\sqrt{g\beta}d^3} = \frac{1}{4} G_{cr,(b=0)} \dots\dots\dots(69)$$

をうる。式 (69) の関係は、式 (63) より計算した前記の関係とよく一致した結果を示している。

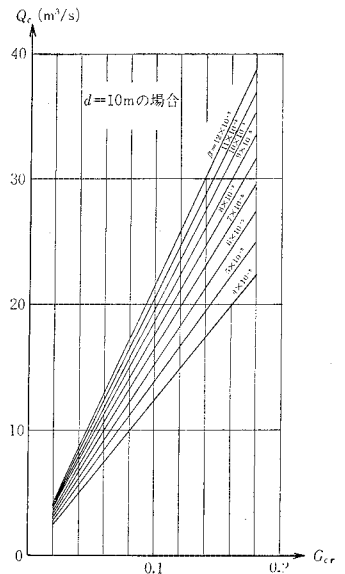


図-10 G_{cr} に相当する取水流量 ($d=10\text{ m}$ とした場合)

さて、図-8 を用いて、あたえられた point sink の高さ b に対する G_{cr} の値を求めることができるが、こうしてえられた G_{cr} に相当する取水流量 Q_c を求めるためには、式 (21) の関係よりわかるように、成層度 β と水深 d を知る必要がある。 β の値については、著者の一人が、福井県敦賀市浦底湾内で測定した7月～8月の夏期水温分布を取りまとめ、同湾内では

$$\beta = (4 \times 10^{-5} \sim 12 \times 10^{-5})/m$$

の範囲にあることを示している。そこで、この大きさの範囲の β の値をパラメータにとり、 $d = 10\text{ m}$ として、 G_{cr} と Q_c の関係を求めると図-10 のようになる。なお、任意の d に対する流量は、つぎの関係より求めることができる。

$$\frac{Q_c \text{ at } d=10\text{ m}}{Q_c \text{ at arbitrary depth}} = \left(\frac{10}{d}\right)^3, \quad (\text{ただし } d \text{ の単位は m}) \dots\dots\dots (65)$$

海底管方式の取水口では、その取水流速は、カーテンウォール式取水口に比較して、一般に大きい。そのため、海底管方式取水口では、取水口位置を海底よりある程度上方において、海底砂の洗掘防止および浮遊砂や腐敗性底土の混入防止をはかることが必要である。このような理由から取水口を海底より上方におき、さらに、表層水の混入をも防止しようとする場合、取水口の海底りの高さ、開口部寸法を、 G の値が図-8 の G_{cr} 以下になるようにきわめればよい。

つぎに澱み層が上層部のみにある場合につき、澱み層を除いた分離水深を d' として

$$G_{cr} = \frac{Q}{2\pi\sqrt{g\beta}d'^3} \dots\dots\dots (66)$$

を考える。 G_{cr} の値は、上でのべたように、 b が与えられると一義的に決まってくる。与えられた b と β に対して Q と d' の関係を図示すると図-11 のようになる。 $d'=d$ に対する流量が Q_c であり、 $Q > Q_c$ では澱み層はなく、全水域の水が point sink へ流入する。 $Q < Q_c$ では、上層に澱み層が発生するが、与えられた流量 $Q (< Q_c)$ における澱み層の厚さは $d-d'$ (at Q) となる。 $d=10\text{ m}$ として $b=0, 0.25, 0.5$ の場合における d' と Q の関係を、 β をパラメータにして示すと、図

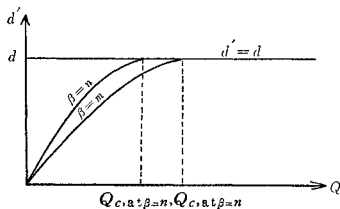


図-11 β, b を与えた時の流量 Q と分離水深 d' の関係

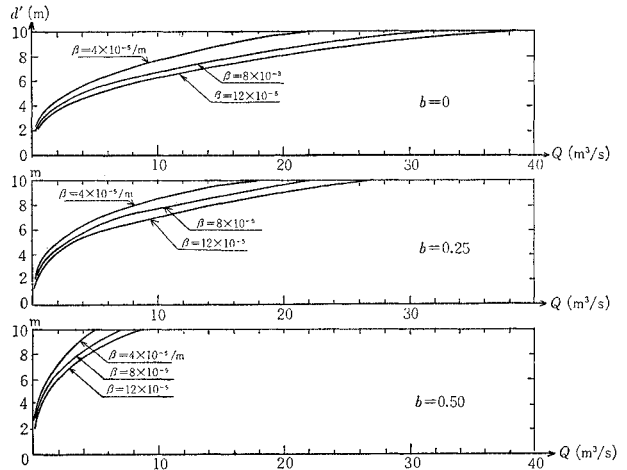


図-12 $d=10\text{ m}$ の場合の有効水深 d' と流量 Q の関係

—12 のとおりである。

5. 中層取水と層分離・躍層の成生

上に述べた理論の結果を検討した結果から、point sink への密度流の流れのパターンとして、つぎのような3種類の状態が生じるであろうと推定される。

- ㊸ 取水量が十分大きいか、成層度が弱い場合には、流れは全層にわたって起こり、とくに深層取水効果はない。
- ㊹ しかし、取水量が相対的に小さく、あるいは、成層度が比較的強く、 $G = Q/[2\pi\sqrt{g\beta}d^3]$ がある限界値 G_{cr} より小さくなれば、ここで導いた非粘性流としての理論からは、取水点の高さ $b < 0.5$ の場合には上層に ($b > 0.5$ の場合には下層に) 渦領域が発生する。 G の値がさらに少なくなれば、この理論では図-13 に示す例でみられるように渦はますます強く大きくなる。しかし、このような high shear flow field の状態ではもはや非粘性という仮定は成立しない。Debler らの2次元成層流体の bottom line intake の実験が示すように、実際にはむしろ、取水口が水深の半分より底に近い場合には上層に (取水口が水深の半分より表面に近い

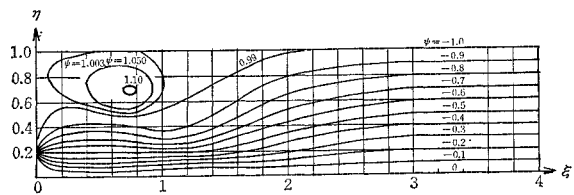


図-13 $b=0.2, G=0.01$ の時の非粘性密度流の流れ (実際には渦の発生かわりに澱み層が発生する)

れば下層に) 激み層が発生し, 深層取水あるいは表層取水の効果があらわれる。このとき, 激み層を除いた分離水深 d' に対して定義された,

$$G' = Q / [2\pi\sqrt{g\beta}d'^3]$$

が, 相対取水高さ $b' = bd/d'$ に対する G_{cr} になるように激み層の位置 d' が定まる。

③ さらに, G が小さくなれば, 激み層はだんだん厚くなり, 相対的取水口高さ b' (あるいは $(1-b')$) が 0.5 になる第 2 の限界状態に達する。このとき G がさらに小さくなれば, ついに下層 ($b < 0.5$ の場合) あるいは上層 ($b > 0.5$ の場合) にも停滞層が発生して, 取水点には, 水温の高い表層水も, 浮遊砂の多い底層水も流入しないというきわめて好都合な状態が発生する。

この第 2 の限界状態の発生する状態では, 相対的水深 $d' = 2bd$ ($b > \frac{1}{2}$ では $d' = 2(1-b)d$) についての G の値は, ちょうど $b = 0.5$ に対する $G_{cr, (b=0.5)}$ の値になっている。

$$G_{cr, (b=0.5)} \left\{ \begin{aligned} &= \frac{Q}{2\pi\sqrt{g\beta}\{2(1-b)d\}^3}, \quad (b > \frac{1}{2}) \quad \dots\dots\dots(67a) \\ &= \frac{Q}{2\pi\sqrt{g\beta}\{2bd\}^3}, \quad (b < \frac{1}{2}) \quad \dots\dots\dots(67b) \end{aligned} \right.$$

したがって, 第 2 の限界に対する G の値 G_{cr}^* は

$$G_{cr}^* \left\{ \begin{aligned} &= G_{cr, (b=0.5)} \times 8(1-b)^3, \quad (b > \frac{1}{2}) \quad \dots\dots\dots(68a) \\ &= G_{cr, (b=0.5)} \times 8b^3, \quad (b < \frac{1}{2}) \quad \dots\dots\dots(68b) \end{aligned} \right.$$

となる。

以上の 3 つの状態を示すのが 図-14 である。また, 図-8 の結果と式 (68) を用いて G_{cr} と b と取水の状態との関係を示すと 図-15 のとおりである。以上の議論から明らかなように, $G_{cr, (b=0)}$ と $G_{cr, (b=0.5)}$ は取水状態を表層取水, 中層取水, 深層取水の三つに分ける場合に重要なパラメーターとなる。

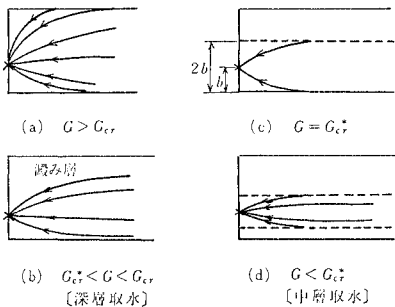


図-14 G の値と取水状態との関係

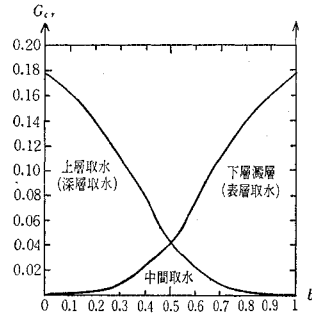


図-15 G_{cr} と point sink の高さ b および取水状態との関係

そこで, $G_{cr, (b=0)}$ を分離取水に関する第 1 界定数, また, $G_{cr, (b=0.5)}$ を分離取水に関する第 2 界定数と称することとする。

一般に, 海や湖沼に発生する温度躍層は, 外的条件により定まると考えられている。しかし, 水域から取水が行なわれる場合には, その量のごくわずかであっても, 取水条件が躍層面の位置を control するであろうことが, 上の推論の結果考えられる。

このことは, 一見奇妙なことと思われるかもしれない。しかし, 東工大の吉川や椎貝*)も貯水池内の温度や濁度の躍層面がダムの放水口で規制されることを, 貯水池の記録の解析結果から主張しており, また 2 次元密度流の粘性を考慮した Koh⁹⁾ の理論および実験結果——つまり, 取水による内部粘性層の広がり方がきわめて遅いこと——からも十分上述の推論の正当性を主張しようと思われる。もちろん, 模型実験による検証が望ましく, 著者らはできるだけ早い機会に実験を行ないたいと考えている⁹⁾。

6. おわりに

以上, 任意の高さにある point sink へ流入する密度成層流について検討し, その高次近似解を示した。 $G > 1$ の解は式 (57) により, また $G < 1$ の場合には式 (63) により表わされる。 G がある限界値 G_{cr} より小さくなると, 水域の上部あるいは下部に激み領域が発生するが, G_{cr} の大きさは point sink の高さにより, 図-8, 15 に示すように変化する。また, G_{cr} と b の組み合わせにより, 図-14, 図-15 に示す三つの取水状態が考えられる。図-15 から明らかなように, $G_{cr, (b=0)}$ と $G_{cr, (b=0.5)}$ は取水状態に分ける場合に重要な要素となるので, 著者らは, とくに, $G_{cr, (b=0)}$ を分離取水に関する第 1 界定数

*) 私的会合における討議による。

また、 $G_{cr,(b=0.5)}$ を分離取水に関する第 2 限界定数と称することとした。

本論文をとりまとめるにあたり、東京工業大学教授吉川秀夫博士より、有益な多くの助言をいただいたことを特記し、紙面をかり厚くお礼を申し上げる。

参 考 文 献

- 1) 日野幹雄・大西外明 (1968) : point sink への密度成層流の解析, 東京工大, 土木工学科研究報告 No. 5.
 - 2) Pai, S.I. (1956) : Viscous Flow Theory-I, D. van Nostrand.
 - 3) Yih, C.S. (1965) : Dynamics of Non-Homogeneous Fluid, Macmillan Comp.
 - 4) Watson, G.N. (1922) : A Treatise on the Theory of Bessel Function, Cambridge Univ. Press.
 - 5) 3) と同じ
 - 6) Kao, T.W. (1965) : A free-streamline solution for stratified flow into a line sink, J. Fluid Mech. Vol. 21, Part 3.
 - 7) 大西外明 (1969) : 深層取水口の海底よりの高さヒサシの効果, 土木学会論文報告集, 161 号
 - 8) Koh, R.C. (1966) : Viscous stratified flow towards a sink, J. Fluid Mech. Vol. 24, Part 3.
 - 9) 大西外明・日野幹雄 (1968) : 液層取水への考察 (II), 第 15 回海岸工学講演会講演集 (1968.7.15・受付)
-