

二層地盤の力学性状に関する解析的研究

ANALYTICAL INVESTIGATION ON MECHANICAL
BEHAVIORS OF TWO-LAYER SYSTEMS木 村 孟*
By Tsutomu Kimura

1. 序 論

基礎地盤の力学においては、地盤の表面や内部に外力が作用したとき、地盤にどの程度の変形が生ずるかを予測することが重要な問題となっている。すなわち、地盤の変形が上部構造に有害なものとなってはならないからである。この問題は構造物基礎などを通じて与えられた接触力が地盤内にどのように分布するかということと密接な関係がある。もちろん、応力そのものの評価も地盤の破壊の予知あるいは舗装構造の設計に見るごとくそれなりに大切なことであるのはいうまでもない。

土の応力～ひずみの関係はきわめて複雑であって、負荷と除荷とでは同一経路をとらず、残留ひずみも無視しえないのが普通である。したがって、応力値から変形を推定することは一般に容易ではない。しかし圧縮過程のみを対象とするような単純な負荷形式に対しては、破壊応力の $1/3 \sim 1/4$ という小さい応力範囲で考える限り応力～ひずみの直線性は仮定してもよいとされている。一方、圧密試験のように側方拘束のある場合には応力～ひずみの関係は拘束圧力とともに上昇し、同時に圧縮弾性率も高くなる。すなわち、この種の応力状態に対しては弾性的取り扱いの適用性がより大きいことになる。

弾性力学における同じく、土の場合にも類似の定数を導入するが、土の応力～ひずみの挙動をより詳細に議論するためには、圧縮時と膨張時とで弾性率を区別せねばならない (Skempton, 1948; Odenstad, 1948; Bjerrum, 1954)。しかしながら現在のところ具体的境界値問題に適用するまでに至っておらず、便宜的な意味で圧縮時の係数もちいることが多く行なわれている。したがって、その表示式中に弾性定数を含む変位成分においては、実測値と理論値とが一致しがたく、地盤の力学に弾性論を適用する上での大きな障害となっている実状で

ある。

一方、鉛直応力に関しては理論値と実測値との間に比較的良い一致が見られることが数多くの実測によって知られている。この一つの理由として鉛直応力の表示式には、弾性定数がまったく入っていないことが考えられる。

このように沈下性状を議論する場合、弾性論の近似度が高いとはいいがたいが、応力分布に限れば弾性解の与える結果は相当信頼性があるのであって、弾性解析が基礎地盤の力学的挙動を解明する一つの有力な武器であることを否定することはできない。

以上述べたことから察知されるごとく、基礎地盤工学の分野においては、弾性論的手法をとり入れた研究は数多く見られる。

これらのなかで Boussinesq の解は最も基本的なものであって、地盤応力の伝播に関するその後の多くの研究は、これを利用したものあるいは重ね合わせの理によって種々の場合に適用したものであるといっても過言ではない。

水平荷重の場合は、Cerruti が初めて取り扱い、その後牟岐が三次元非対称問題に対し、Hankel 変換を導入して解く方法を与え、応用性が大きい点でとくに注目されている (牟岐, 1956)。

二次元問題として取扱う試みも多い。ことに Michell の論文はその応力表示が巧妙である (Michell, 1901)。くさびに関する研究も少なくない。Brahtz は自重を考慮したときのくさび解を与えているが、むしろ Tranter によって導入された Mellin 変換による解法が、この問題の解法としてはすぐれているように思われる (Brahtz, 1936; Tranter, 1948)。

以上、一様な半無限体における弾性解法について略述した。もちろん地盤を一樣半無限体と考えて実用上十分である場合も多い。しかしながら現実の地盤特性が均一であることはむしろまれで、たとえば異方性地盤や異

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

質性地盤を対象として理論を拡張しない限り実際の応用の道は少ない。この意味から等質等方でない弾性体に関する研究も数多く試みられている。

等質異方性弾性体の仮定は、粘土地盤の堆積課程を通じて予想される異方性の近似として当然考えられるところである。異方性弾性体の解析は主として直交異方性体で主軸が鉛直なものについて行なわれていたが、最近岩盤力学の発達によって主軸が地表面に対して傾斜した場合の解析も試みられるようになった(川本, 1966)。そのほか、この分野に関連して Fröhlich の集中係数を導入した応力解が有名である(Fröhlich, 1934)。これはひずみを考慮せず応力だけを対象としたものであるため、一般に適合条件を満足するものではない(Holl, 1940)が粒状土中の応力特性を簡便に与えるものとしてしばしば利用されている。

また異質等方弾性体の問題に関しては、いわゆる多層地盤を対象とした研究が多く試みられている。とくに沖積地盤の典型であり、かつまた舗装構造のモデルとして重要な二層地盤についての研究はきわめて多い。

松村は主として弾性地盤の表面沈下という観点から二層系地盤を考察し、ある程度の数値解析を行なって基礎地盤の沈下計算にこれを利用している(松村, 1931)。そのほか松村は、弾性率が指数的に変化するときの半無限体の問題をも解析している。Marguerre は二層の境界面が滑らかな場合について解を求め、若干の数値計算を行なっているが、実際の応用面に欠けるきらいがある(Marguerre, 1933)。これに対して Burmister は弾性二層地盤の表面に一樣な鉛直力が作用した場合について多くの数値計算を行なって、数表および図表を作製した(Burmister, 1934, 1945)。彼はこれをもちいて飛行場や道路についてくわしい解析を試みている。Fox は Burmister の解について数値解を与え、さらに Relaxation 法をもちいて同種の問題の解を求め実際面への適用性を増大せしめた(Fox, 1948)。

有限深さの基礎地盤の問題も二層地盤の特殊な例と考えられるため、古くから多くの人々によって研究が行なわれている。この種の問題を初めて取り扱ったのは Filon であり、矩形ばりに対する厳密解を求めた(Filon, 1903)。剛性地盤と基礎地盤との接触状態が滑らかである場合には Melan が、粗であるときには Marguerre, Biot, Passer などが解を示している(Melan, 1931; Marguerre, 1931; Biot, 1935; Passer, 1935)。表面変位は、Steinbrenner によって初めて取り扱われたが、これについては植下が詳細に検討を加えている(Steinbrenner, 1934; 植下, 1967)。

以上、二層地盤に関する従来の研究を概観したが、これらの研究は水平なる二層を対称としかつ鉛直荷重に関

するものが大部分であって、層の形状や荷重の方向に対する考慮が十分であったとはいえない。

本論文はこの点に着目し

- (I) 斜め地盤の応力性状
- (II) 水平有限層の接触応力と沈下性状
- (III) くぼみを有する地盤の載荷問題

の三つの問題を取りあげ、主として解析的あるいは数値的に研究を行なったものである。

なお、本文においては引張りひずみを正と考えた。

2. 斜め地盤の応力性状

(1) 概 論

粘土地盤の下面が傾斜した硬い地盤上にあり、いわゆる扇形状に堆積している圧縮層の圧密論についてはあまり知られていないようであって、この種の斜め粘土層が実際に現われる例が少なくないにもかかわらず、現在のところ計算法の手がかりが十分つかめていない状態である。したがって、斜め粘土層の圧縮を議論することの実用的価値は少なくないと考えられる。

斜め粘土層は無限に続く弾性くさびと見なすことによって解析的に取り扱うことができる。くさびの側面に任意の鉛直外力が働くときの弾性解については二、三の研究がある。Shepherd は応力関数による解法を示し、表面の任意点に対称的な集中荷重が働いたときの応力分布を数値的に調べている(Shepherd, 1935)。Tranter はこの問題に対して Mellin 変換をもちいる方法を提案し、くさびの両面に頂点から有限幅にわたって一樣垂直荷重が加わったときの応力解を巧妙に与えている(Tranter, 1948)。また色部らは Tranter の解法を応用して地盤の底面の条件に応ずる応力、変位の Mellin 変換形を提示しているが、逆変換形が求められていないので実用に供しづらいように思われる(色部 他, 1963)。

Tranter の応力解を重ね合わせることによって、くさびの両面の任意区間に一樣荷重が働いたときの応力解が得られるが、これはくさびの軸線上で周方向の変位とせん断応力とが消失することを意味するから、このような解はくさびの半頂角の斜め粘土層が岩盤または非圧縮性層の上にあって、その境界での接合が微弱である場合の带状荷重による応力解に相当するものと考えてよい。

本章では、上に述べた弾性応力解を種々の場合に数値計算によって求め応力の特性を調べた。またその結果をもちいて得られる平均主応力が初期過剰間げき圧に等しいとする近似仮定に基づいて、扇形域の圧密理論解の一般形式を与えた。なお解析は二次元的取り扱いによったために、変位成分の表示式を求めるには至らずその性状

を予想するに止まった。

(2) 解析

a) 応力解

① Tranter の解; 極座標における弾性応力の釣合式は Airy の応力関数によって満足され, 適合条件式より

$$r^4 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi = 0 \quad \dots\dots(2.1)$$

が得られる。φ の Mellin 変換形を

$$\bar{\phi} = \int_0^\infty r^{s-1} \phi dr \quad \dots\dots(2.2)$$

と書くと, 式 (2.1) は常微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + s^2 \right) \left[\frac{d^2}{dr^2} + (s+2) \right] \bar{\phi} = 0 \quad \dots\dots(2.3)$$

に変換される (Tranter, 1948)。式 (2.3) から容易に

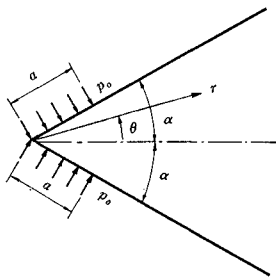
$$\bar{\phi} = A \sin(s\theta) + B \cos(s\theta) + C \sin[(s+2)\theta] + D \cos[(s+2)\theta] \quad \dots\dots(2.4)$$

が得られる。ただし, A, B, C, D は境界条件から定められる s および α (くさび半頂角) の関数である。

応力成分に Mellin 変換を施しその逆変換を行なうと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} - s \right) \bar{\phi} r^{-s-2} dr \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s(s+1) \bar{\phi} r^{-s-2} dr \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (s+1) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} r^{-s-2} dr \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5)$$

となるから応力関数の Mellin 変換形が定まれば応力が求まる。



図一 頂点から有限幅にわたって一様分布荷重を受けるくさび

くさびの両側面に頂点から有限幅にわたって鉛直帯荷重が作用するときには, 境界条件は 図一を参照して

$$\theta = \pm \alpha \text{ で } \tau_{r\theta} = 0, \sigma_\theta = \begin{cases} -p_0; & r < a \\ 0; & r > a \end{cases} \quad \dots\dots(2.6)$$

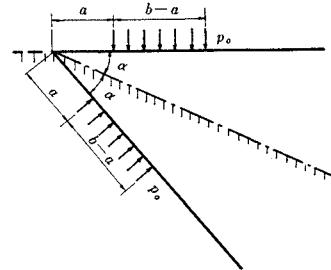
この条件に Mellin 変換をほどこすと

$$\left. \begin{aligned} s(s+1) \bar{\phi} &= -p_0 \int_0^a r^{s+1} dr = -\frac{a^{s+2}}{s+2} \\ s(s+1) \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.7)$$

が $\theta = \pm \alpha$ で成り立つから, 式 (2.5) より応力成分が

得られる。

② 斜め地盤に対する解; くさびの両端面に頂点より有限幅にわたって鉛直帯荷重が加わったときの解は, Tranter の解を重ね合わせることによって求められる。すなわち, 図一2を参照し



図二 表面に外力を受ける斜め地盤

$$n = \frac{b}{a}, \quad m = \frac{r}{a} \quad \dots\dots(2.8)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi r}{2 p_0} (\sigma_\theta - \sigma_r) &= \frac{\sin \alpha \cos \theta}{2 \alpha + \sin 2 \alpha} \frac{n-1}{m} + \int_0^\infty \frac{P(\xi)}{m} \left[\sin \left(\xi \log \frac{1}{m} \right) - n \sin \left(\xi \log \frac{n}{m} \right) \right] d\xi \\ \frac{\pi r}{2 p_0} (\sigma_\theta + \sigma_r) &= \frac{\sin \alpha \cos \theta}{2 \alpha + \sin 2 \alpha} \frac{1-n}{m} + \int_0^\infty \frac{P(\xi) - \xi Q(\xi)}{m(1+\xi^2)} \left[n \sin \left(\xi \log \frac{n}{m} \right) - \sin \left(\xi \log \frac{1}{m} \right) \right] d\xi \\ \frac{\pi}{p_0} \tau_{r\theta} &= \int_0^\infty \frac{R(\xi)}{m} \left[n \cos \left(\xi \log \frac{n}{m} \right) - \cos \left(\xi \log \frac{1}{m} \right) \right] d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.9)$$

である。

この応力式において $\theta=0$ なるとき明らかに $\tau_{r\theta}=0$ となり θ 方向の変位も消滅すると予想されるので, 式 (2.9) は硬い地盤上に堆積した斜め地盤の応力状態を表わすものと考えてさしつかえない。

b) 圧密解

極座標における圧密の基礎方程式は u を過剰間げき圧として

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (c_v d = \tau) \quad \dots\dots(2.10)$$

で与えられる。ここに c_v は圧密係数である。斜め地盤の地表側で排水, 底側で非排水とすると境界条件は

$$\theta = \alpha \text{ で } u = 0; \theta = 0 \text{ で } \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \dots\dots(2.11)$$

となる。

荷重によって発生する応力を主応力で表わして σ_1, σ_3 とすると、初期過剰間げき水圧は平面ひずみ条件で弾性仮定が許されるときには、

$$\tau=0 \text{ で } u = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = f(r, \theta) \dots (2.12)$$

と表わされる。もちろん $f(r, \theta)$ は式 (2.9) の解を意味している。

Stokes の方法によって

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(r, \tau) \cos \nu \theta \\ \nu &= \frac{(2n+1)\pi}{2\alpha} \\ A_n(r, \tau) &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} u(r, \theta, \tau) \cos \nu \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots (2.13)$$

とおくと境界条件は満足され、式 (2.10) は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} A_n(r, \tau) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} \right) A_n(r, \tau) \dots (2.14)$$

と書き改められる。 $A_n(r, \tau)$ の Hankel 変換形を

$$A_{nv}(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} A_n(r, \tau) J_\nu(\xi r) dr \dots (2.15)$$

とし、その逆変換形を式 (2.14) へ入れることによって

$$A_{nv}(\xi, \tau) = C_\nu(\xi) e^{-\xi^2 \tau} \dots (2.16)$$

を得る。ここに $C_\nu(\xi)$ は $A_{nv}(\xi, \tau)$ の初期値である。

つぎに式 (2.16) と A_{nv} の逆変換形を式 (2.13) へ入れると

$$u(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta \int_0^{\infty} C_\nu(\xi) e^{-\xi^2 \tau} J_\nu(\xi r) d\xi \dots (2.17)$$

初期条件 (2.12) を考慮して

$$\left[\begin{aligned} f(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta \int_0^{\infty} C_\nu(\xi) J_\nu(\xi r) \xi d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta K_\nu(r) \end{aligned} \right] \dots (2.18)$$

しかるに

$$\left. \begin{aligned} f(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) \cos \nu \theta \\ F_n(r) &= \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha f(r, \zeta) \cos \nu \zeta d\zeta \\ F_n(r) &= \int_0^\infty \int_0^\infty F_n(w) J_\nu(\xi r) J_\nu(\xi w) \xi w d\xi dw \end{aligned} \right\} \dots (2.19)$$

である (Watson, 1922) から、これらを式 (2.18) に入ると $K_\nu(r)$ が得られ、したがって過剰間げき圧 $u(r, \theta, \tau)$ は

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, \tau) &= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu \theta \int_0^\alpha \int_0^\alpha \int_{\zeta=0}^{\zeta=\alpha} e^{-\xi^2 \tau} f(w, \zeta) \\ &\quad \cdot \cos \nu \zeta J_\nu(\xi w) J_\nu(\xi r) \xi w d\zeta d\xi dw \\ \nu &= \frac{2n+1}{2\alpha} \pi \end{aligned} \right\} \dots (2.20)$$

と表わされる。

c) 解析結果

斜め地盤内の応力分布特性を把握するため、本節で求めた応力式のうち第2式の平均主応力について行なった数値計算の結果をまとめて示す。計算はつぎの16の場合について数値積分によって行なった。すなわち

$$\alpha = 30^\circ, 45^\circ$$

$$n = \frac{b}{a} = \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, 3$$

主応力値の計算結果は圧力球根の形で示し、図-3に一部をまとめた。また計算した応力成分の値から、荷重端および荷重中心軸下の鉛直応力を算出し半無限時の応力値とともに図-4に明らかにした。

(3) 模型実験

帯荷重を受ける斜め地盤では、表面変位は理論的には求められない(最上, 1969)が、このような地盤の沈下性状は実際上の問題として非常に重要である。本節ではこれを実験的に検討するためにフォームラバーによる模型実験を試み、荷重の両端における表面沈下を観測した。

実験は半頂角 30° および 45° の三角形フォームラバーを両面ガラス張りの木箱に入れ、薄いゴム膜を通して表面に荷重を与えた(図-5)。荷重は写真-1に示したごとく、荷重区間をボール紙で作った小箱で分割し、その中に散弾を入れ、なるべく等分布となるように工夫した。またフォームラバー底面にはアルミ板を敷いて摩擦が少なくなるように努めた。

実験は $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ の場合

$$n = \frac{b}{a} = 3, 2, \frac{5}{3}; p_0 = 10.0, 20.0 \text{ g/cm}^2$$

の各6通りについて行ない、結果は頂点から遠い荷重端下の沈下 d_R と近い荷重端の沈下 d_L (図-2では右側端と左側端)との比 d_R/d_L でまとめて下の表に示した。

表-1 荷重両端下における沈下比

(a) $\alpha = 30^\circ$ のとき			(b) $\alpha = 45^\circ$ のとき		
p_0 (kg/cm ²)	10.0	20.0	p_0 (kg/cm ²)	10.0	20.0
n			n		
3	1.40	1.50	3	1.20	1.23
2	1.13	1.23	2	1.27	1.15
5/3	1.14	1.31	5/3	1.14	1.03

(4) 考察

数値計算がかなりの手数を要する関係上、頂角が $30^\circ, 45^\circ$ の二つの場合についてのみ計算を行なった。また圧密問題にしても解析表示をしたにとどまるので、斜め粘土層の圧縮または圧密特性に関して広汎な考察を加えることはできないが、応力分布の特性としてつぎのようなことが明らかとなった。

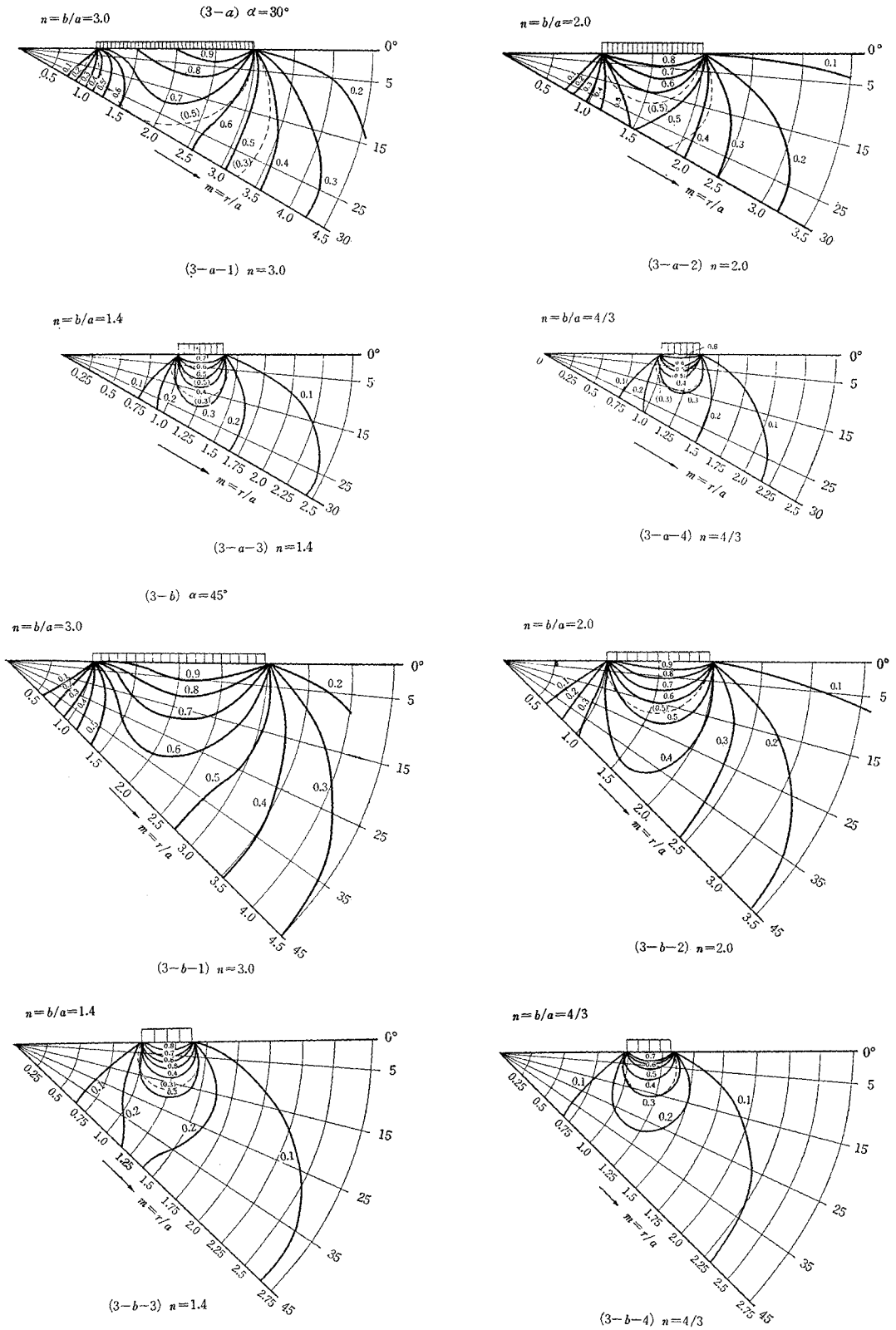


図-3 斜め地盤内の平均応力分布

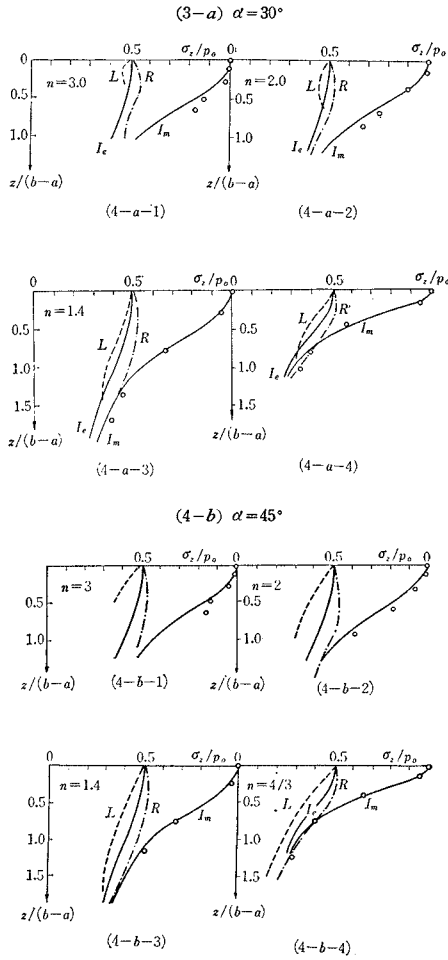


図-4 荷重両端および中央部の鉛直応力の分布

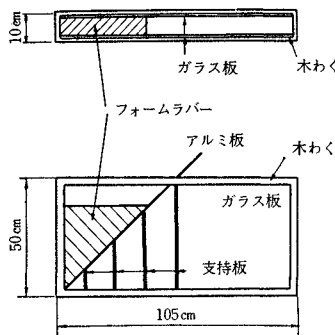


図-5 実験用木わく

(1) 頂点より荷重端までの距離と荷重幅との比 n が大きくなると、平均応力に関する圧力球根のゆがみが著しくなって斜め支持の影響が現われてくることが認められる。この n の限界は応力比の値の取り方によって異なるが、一応 0.3 を選べば、基礎の全体的沈下の様相が半無限の場合と大きく異なってくるのは、 $\alpha=30^\circ$ では $n \geq$

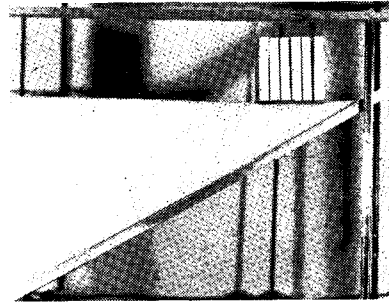


写真-1 荷重容器とフォームラバー

1.4, $\alpha=45^\circ$ では $n \geq 1.5$ のときであるといえる。もちろん応力比のもっと大きいところでは半無限解との一致はより良くなるが、載荷面中央部の層厚と載荷幅との比をとって、斜め支持の影響が現われるのは幅/深さ比が 1.8~1.9 以下のときであるということもできる。

(2) 扇形域の弾性沈下の解析的結果が求められないことはすでに述べたが、何らかの制限を加えることによって沈下表示式が得られたとしても土の非弾性的性状を考えるとそのままそれが粘土層の圧縮量を表わすものかどうか疑わしい。本論文では、沈下に影響すると考えられる一因子、すなわち地表面に垂直な応力 σ_z を取り上げ、これによって沈下性状を考察した。

図-4 によれば、荷重中心軸上の σ_z は $\alpha=30^\circ$ のとき $n \leq 4/3$, $\alpha=45^\circ$ のとき $n \leq 1.4$ で半無限時の応力状態と良く一致し、平均応力の場合と同じ傾向にあることがわかる。したがって、平均的な沈下は半無限時と比して半頂角 30° の場合 $n \leq 4/3$, 45° の場合 $n \leq 1.4$ では大きな差異がないものと考えられる。

また両端の σ_z については、すべての場合頂点に近い側の値は遠い側のそれよりも小さく、深さ方向への分布曲線(図-4 の R 線, L 線)は半無限時の曲線 (I_m 線)をはさむ恰好になっている。これらの相対的關係は、 n によらない傾向が認められる。頂点は特異点であるから、一見 σ_z は頂点に近い側で集中するように思われるが結果はこれを否定した。この理由としてつぎのことが予測される。すなわち、境界条件として底面でせん断応力を 0 と仮定したため、応力成分 σ_r が左側では引張りの影響によって小さくなり、右側では圧縮によって大きな絶対値をもつためである。

この条件はきわめて理想的なものであり、実際の粘土内の応力分布はここに示したものとはかなり異なるであろう。しかし応力の分布傾向や値そのものにそれほど大きな差異が出るとは考えられず、ことに地表面近くではここで明らかにしたごとく $|\sigma_{zL}| \approx |\sigma_{zR}|$ が成り立つとしてよいものと思われる。したがって、端部下の層厚を考えると右端の沈下は左端に比して大きく、その比は圧縮層厚の比 n に等しいものと推測される。

(3) 表面沈下に関して予測した結果を検討するために行なった実験では表-1に示すように、計算応力値から推定したものはかなり異なった結論が示された。すなわち頂点から遠い荷重端における沈下と近い端のそれとの比が1.03~1.50の範囲にあって、 n の値によってそれほど変化していない。応力計算は境界面が滑らかであるという条件に基づいていること、実験ではフォームラバーは頂点からある距離の所で拘束されているため、荷重が大きくなると頂点が持ち上がる傾向にあることなどによって理論計算の結果と実験値とをそのまま対比することに問題はあつた。しかしとにかく計算結果より得た推論はくつがえされた。しかし、表-1において認められるごとく、荷重両端下の沈下比は1よりも大きく、しかも $\alpha=30^\circ$, $n=3$ の場合に他の例に比してかなり大きな値を示している。このことから、斜め地盤の沈下性状は不等沈下を生じやすい傾向にあり、その傾向は n が大きくなるにつれて著しくなるということはほぼ間違いないものと考えられる。

3. 水平有限層の接触応力と沈下性状

(1) 概論

地盤に作用する荷重は、荷重の原因となり、かつ荷重を伝達する構造物の剛性の大きさによってたわみ性荷重と剛性荷重とに大別される。

たわみ性荷重は剛性が小さく地表面の変形は応力分布をそれほど変えるものではない、したがって接触応力はあらかじめ指定されたものに近くなる。車両の輪荷重、薄いスラブを通して伝達される床荷重がこの例である。

これに対して剛性荷重では、地盤に一樣な表面変位が生ずるが、その接触応力の性質は一般に載荷構造物と地盤の剛性によって複雑な性状を示す。一樣半無限体の場合このような分布について二次元ではSadowskyが、三次元ではBoussinesqが解を与えている(Timoshenko and Goodier, 1951)。これら理論的分布によれば、応力は荷重縁部で無限大となるが、実際には縁部近辺で局部的降伏が生じ、順次中央部へ荷重が移って等分布形に近づくものと考えられている。Faberは砂地盤および粘土地盤において入念な実験を行ない、砂地盤における接触応力は端部付近で側方移動が生じやすいためKöglerらが報告したと同じく回転放物面状となるが、側方移動を拘束すると分布形が大きく変わることを見出した(Kögler他, 1927, 1928, 1929; Faber, 1933)。また軟弱な粘土地盤においては一般に釣鐘状となるが、固結した粘土のような引張抵抗の大きい土においては周縁部で大きな応力が発生し理論分布に近くなることが確かめられてい

る。また深基礎の底面における接触応力がほぼ等分布形になることも知られている(Kögler, 1936)。このように剛性荷重の接触応力は、地盤の状態や載荷条件によって大きく影響されるが、従来の研究は一樣な半無限地盤に関するものがほとんどで、二層地盤におけるパンチングの問題を扱ったものはきわめて数少ない。しかしながら岩盤や締まった砂れき層上に堆積した粘土地盤上に剛なる構造物を造る場合にはしばしば行なわれるものであり、最近の構造物の高層化現象とともにこの種のパンチングの問題は重要性を増しつつある。

剛性荷重の接触応力ならびに沈下解析においては、後述するごとく分割的考察がしばしば行なわれるが、具体的計算においてはSteinbrennerなどの近似解をよりどころとするものが大部分である(Davis他, 1961)。本論文においては、有限深さの弾性体における厳密解を重ね合わせて剛性載荷条件を満たす接触応力の分布を求めると同時に地盤内の応力性状を明らかにした。またフォームラバーによる模型実験を行ない、その結果と比較検討し、土のような非弾性物体の変形および応力性状について考察を試みた。

(2) 解析

a) 基本解

二次元直交座標 (x, z) における弾性応力のつりあい式はAiryの応力関数 ϕ によって満足され、適合条件式より

$$\nabla_1^4 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

が得られる。Hankel変換公式

$$\int_0^\infty \nabla_1^4 \phi e^{i\xi x} dx = \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 \int_{-\infty}^\infty \phi e^{i\xi x} dx \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

をもちい、

$$G = \int_{-\infty}^\infty \phi e^{i\xi x} dx \quad \dots\dots\dots(3.3)$$

とおくと式(3.1)の偏微分方程式は常微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 G(\xi, z) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

に書き直される。この解は容易に求まり式(3.3)の逆変換を行なって

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{ (A+Bz)e^{i\xi z} + (C+Dz)e^{-i\xi z} \} e^{-i\xi x} d\xi \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

を得る。境界条件から A, B, C, D が定めれば ϕ が確定し応力成分が求められる。

変位成分は平面ひずみの条件により簡単に解が得られる。

b) 有限深さの弾性体に対する解

一般に有限深き弾性体の応力および変位解は、図-6 に示すごとく二層弾性体の解において下層の弾性率 E_2 を無限に大きくすることによって得られる。

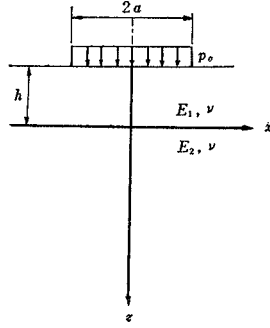


図-6 帯荷重を受ける二層地盤

図-6 の場合には式 (3.5) の関数 $\phi(x, z)$ が上層と下層で異なるべく、未知係数は上層

で A_1, B_1, C_1, D_1 の 4 個、下層で C_2, D_2 の 2 個となる。接触面が粗であるときとなめらかであるときについて解を求める。

① 接触面が粗であるとき：境界条件は

$$\left. \begin{aligned} z = -h \text{ で } \tau_{xz_1} = 0, \sigma_{z_1} &= \begin{cases} -p_0; & |x| < a \\ 0; & |x| > a \end{cases} \\ z = 0 \text{ で } u_1 = u_2, w_1 = w_2, \tau_{xz_2} = \tau_{xz_1}, \sigma_{z_2} = \sigma_{z_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

与えられるから、6 個の未知数 $A_1, \dots, D_1, C_2, D_2$ が決まり二層の場合の解が得られる。 $E_2 \rightarrow \infty$ とすると鉛直変位および鉛直応力は、

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= -p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\bar{A}_R}{\lambda^2} [2k\{2(1-\nu) - \lambda(1+\zeta)\}e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{k^2 + (1+2\lambda)(k - 2\lambda\zeta)\}e^{2\lambda\zeta} - \{k^2 + (1-2\lambda)(k + 2\lambda\zeta)\}e^{-2\lambda} - 2k\{2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta)\}]e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \\ \sigma_{z_1} &= -\frac{p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{A}_R}{\lambda} [2k\{1-\lambda(1+\zeta)\} + \{k^2 + (1+2\lambda)(1-2\lambda\zeta)\}e^{2\lambda\zeta} + \{k^2 + (1-2\lambda)(1+2\lambda\zeta)\}e^{-2\lambda} + 2k\{1+\lambda(1+\zeta)\}]e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \zeta = \frac{z}{h}, s = \frac{x}{h}, \alpha = \frac{a}{h}, k = 3-4\nu \\ \bar{A}_R^{-1} = k(1+e^{-4\lambda}) + (1+k^2+4\lambda^2)e^{-2\lambda} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

② 接触面がなめらかであるとき：この場合には接触面における条件を

$$z = -h \text{ で } w_1 = w_2, \sigma_{z_1} = \sigma_{z_2}, \tau_{xz_2} = \tau_{xz_1} = 0 \dots\dots\dots(3.9)$$

ととらねばならない。

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= -2p_0 \frac{1+\nu}{\pi E_1} h \int_0^\infty \frac{\bar{A}_S}{\lambda^2} [2(1-\nu) - \lambda(1+\zeta)\}e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{\lambda(\zeta-1) - 2(1-\nu)\}e^{2\lambda\zeta} - \{\lambda(\zeta-1) + 2(1-\nu)\}e^{-2\lambda} + \{2(1-\nu) + \lambda(1+\zeta)\}]e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \\ \sigma_{z_1} &= -\frac{2p_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{A}_S}{\lambda} [1-\lambda(1+\zeta)\}e^{2\lambda(\zeta-1)} + \{\lambda(\zeta-1) - 1\}e^{2\lambda\zeta} + \{\lambda(\zeta-1) + 1\}e^{-2\lambda} + \{1+\lambda(1+\zeta)\}]e^{-\lambda(1+\zeta)} \sin \alpha \lambda \cos s \lambda d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

ただし

$$\bar{A}_S^{-1} = e^{-4\lambda} - 4\lambda e^{-2\lambda} - 1 \dots\dots\dots(3.11)$$

であり、 ν はポアソン比である。

c) 接触応力に対する解

式 (3.7), (3.10) に示した解は、硬い基盤上にある弾性体の表面にたわみ性の鉛直等分布荷重が働いたときのものである。剛性荷重と地盤との接触応力の分布は、荷重を小区間に分割して考える「分割法」によって求めることができる。すなわち、図-7 に示すごとく幅 $2A$ の剛性荷重を $2n$ 等分した小区間 (幅 $2a$) 内では荷重が等分布するものと仮定する。各区内の荷重を p_j で表わすと 図-7 の i 点の表面変位は、

(i) 接触面が粗であるとき

$$w_i = -4h \frac{1-\nu^2}{\pi E_1} \sum_{j=1}^{2n} p_j \int_0^\infty \frac{\bar{A}_R}{\lambda^2} [k(e^{-2\lambda} - 1)(e^{-2\lambda} + 1) + 4\lambda] \sin \alpha \lambda \cos \left(\frac{x_i - x_j}{h} \right) \lambda d\lambda \dots\dots\dots(3.12 a)$$

(ii) 接触面がなめらかであるとき

$$w_i = -4h \frac{1-\nu^2}{\pi E_1} \sum_{j=1}^{2n} p_j \int_0^\infty \frac{\bar{A}_S}{\lambda^2} (e^{-2\lambda} - 1)^2 \sin \alpha \lambda \cdot \cos \left(\frac{x_i - x_j}{h} \right) \lambda d\lambda \dots\dots\dots(3.12 b)$$

と表わせる。これらを

$$w_i = p_j F(x_i - x_j) \dots\dots\dots(3.13)$$

の形に書くと、載荷板下の変位が一定であることから

$$\sum_{j=1}^{2n} p_j \{F(x_{i+1} - x_j) - F(x_i - x_j)\} = 0$$

$$(i=1, 2, \dots, 2n-2, 2n-1) \dots\dots\dots(3.14 a)$$

また載荷板に働く全荷重を P とすると

$$\sum_{j=1}^{2n} p_j = P \dots\dots\dots(3.14 b)$$

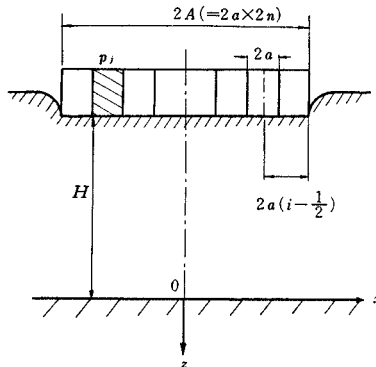


図-7 剛性荷重を受ける有限層

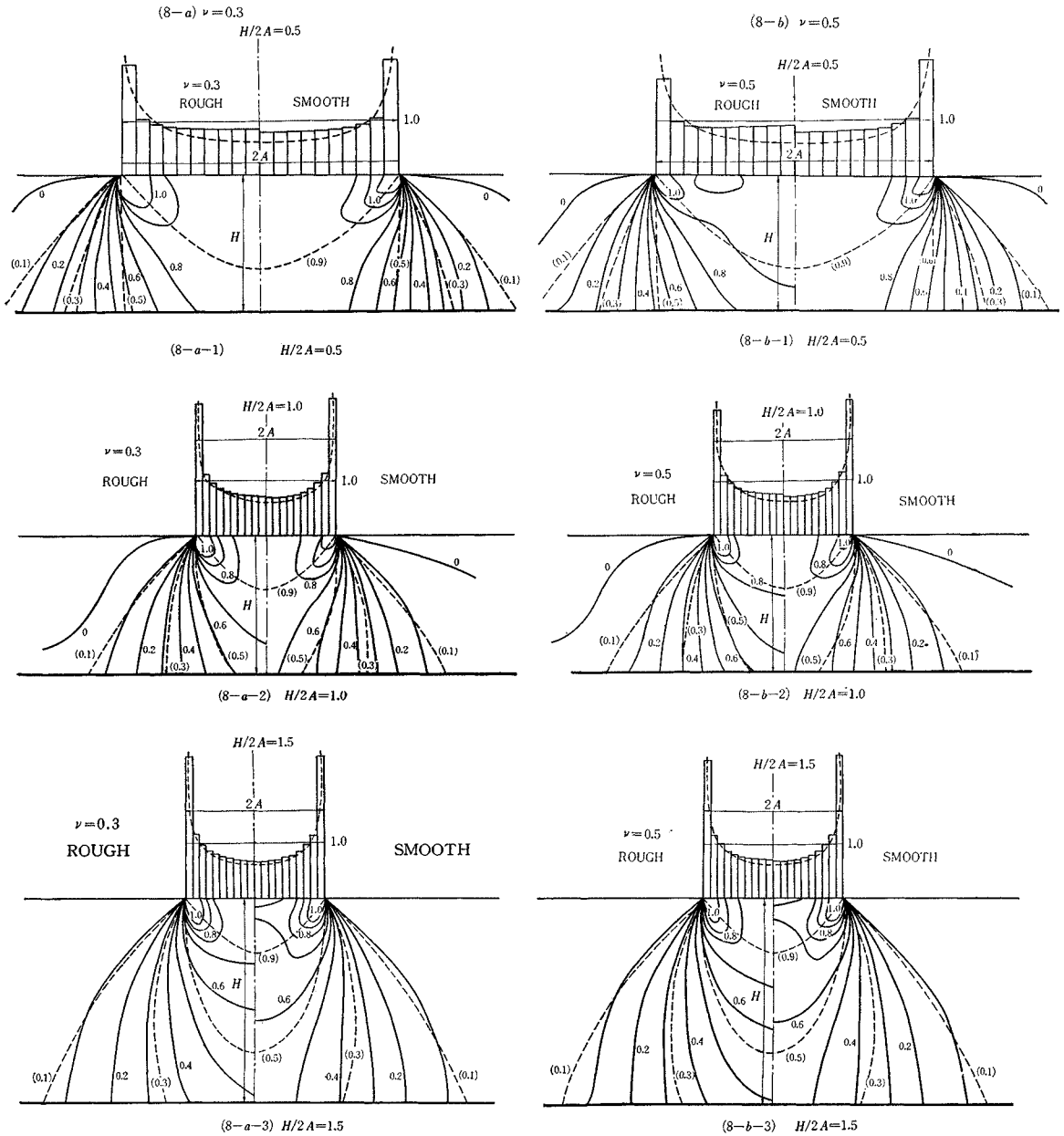


図-8 有限層表面の接触応力と内部応力分布
ただし(上段)----Sadowskyの解 (下段)----半無限体内等分布荷重による分布

であるから、式(3.14a)と(3.14b)によって小区間内の荷重 p_j に関する $2n$ 個の一次方程式が得られる。

c) 解析結果

水平なる有限層の表面に一樣変位を生ずる剛性荷重についてその接触応力性状を明らかにするために、未知力 p_j に関する一次方程式(3.14)を解きその分布形を示した。また得られた分布によって生ずる鉛直応力についても数値を求めた。この線型方程式は対称性を考慮することにより未知数を n 個に減らすことができる。本論文

では分割区間数を 20 すなわち $n=10$ としてつぎに示す 18 の場合について計算を試みた。すなわち

$$\nu=0.3, 0.4, 0.5; \quad \frac{H}{2A} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$$

接触応力および地盤内の鉛直応力の数値解の一部を図-8にまとめ、Sadowskyによる分布形状および半無限体内の鉛直応力分布形状と対比して示した。またポアソン比 ν および 厚さ/幅比 ($H/2A$) による接触応力の分布形の差異についても 図-9, 10 に明らかにした。

(3) 模型実験

弾性理論計算によって得られた接触応力の分布形状および表面沈下量が、土のような非弾性物質に対してどの程度の適応性があるかを検討するためにフォームラバーによる模型実験を行なった。装置は 2. でもちいたものとほぼ同じである。一定変位は厚さ 4 mm の鋼板によって与えた。実験では層厚/幅比 0.5, 1.0,

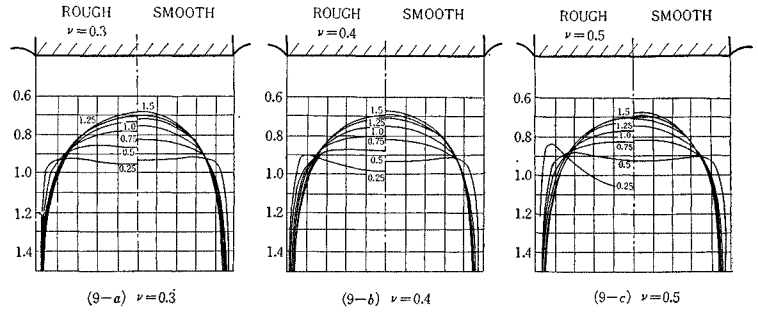


図-9 ポアソン比と接触応力分布形との関係

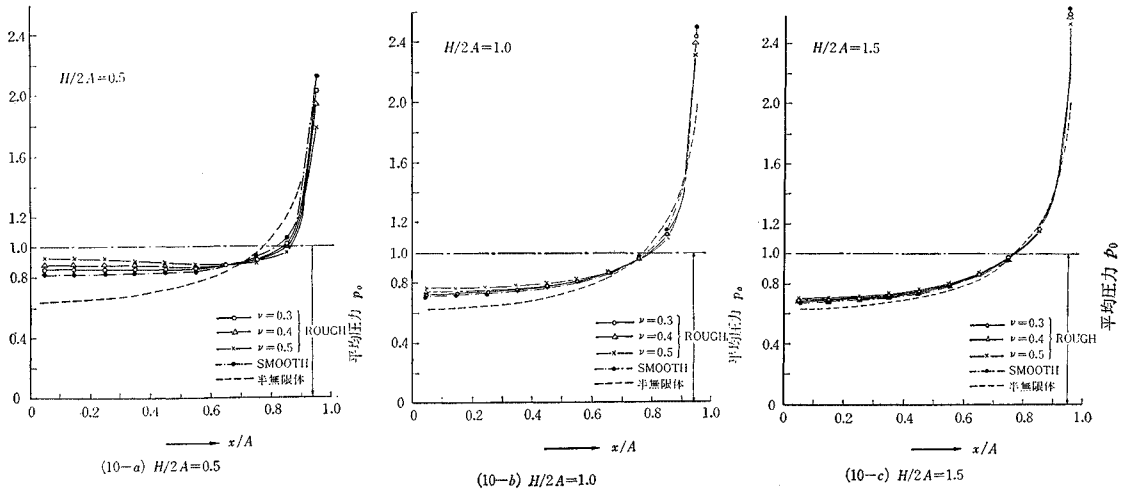


図-10 深さ/幅比と接触応力分布形との関係

1.5 についてそれぞれ 3 種の荷重強度を作用せしめ、沈下量を観測した。またこの比が 1.0 の場合について、理論計算によって得られた分布を再現し沈下の性状および沈下量を観察した。

フォームラバーの一軸圧縮試験を非拘束および拘束状態で行ない、図-12 に示す応力～ひずみ 曲線を得た。なおポアソン比は、非拘束時ならびに拘束時の弾性率から算出し 0.290 とした。実験の結果は計算値と対比して次節の表-2 に示したが、計算にもちいた弾性率は比較した点の応力値に対する正割係数をとった。その意味で

は変形係数といったほうが適当であろう。

(4) 考察

計算によって求めた剛性荷重と地盤との接触応力の分布形については

(1) 接触面がなめらかなときには分布形はポアソン比の影響を受けない。もちろん沈下の絶対値には影響をおよぼす。

(2) なめらかであるときには粗である場合に比して荷重縁部における応力値が大きい。したがって、中央部の応力値は粗であるときよりも小さくなり、もり上がりの傾向もさほど顕著ではない。ポアソン比が小さくなるにつれて両者の分布形の差異は少なくなる。

(3) 接触面が粗であるときには、図-9 によって大きなポアソン比に対しては層厚/幅比の影響が大きく、ポアソン比が下がるにつれてその度合が小さくなるのが認められる。

(4) 接触応力の分布形で $H/2A$ が 0.5 より小さいものでは中央部の応力がやや大きくなりもり上がりの傾向がうかがわれる。これに対して 0.5 より大きいときに

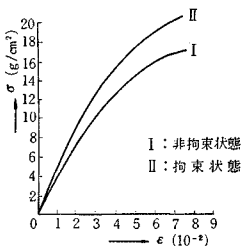


図-11 フォームラバーの応力-ひずみ曲線

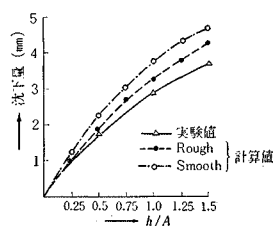


図-12 実験値の計算との比較

は応力は中央部で最小となり、形としては Sadowsky 分布に似たものとなる。また 0.5 の場合には、端部以外はほぼ等分布形となっている。これは層厚が薄いときには下層の剛なる地盤の影響が現われやすいことを示している。

(5) 接触面が粗である場合、 $H/2A$ が小さいときポアソン比の影響が大きく、 $H/2A$ が大きくなるにつれその影響が小さくなる傾向がみられる。またポアソン比が小さくなるにしたがいなめらかな場合の分布形に接近する。

(6) 図-9 によって $H/2A$ が 1.5 になるとなめらかなときと粗であるときで分布形はほとんど差異がなくなり、半無限体における Sadowsky 分布に近くなることがわかる。したがって、実用的には $H/2A$ が 1.5 以上のものに対しては、有限層の接触応力は Sadowsky 式で与えられると考えてよい。

つぎに地盤内の鉛直応力 σ_z の分布については

(1) 等分布荷重による半無限体内の分布形とくらべると、応力比が大きいところでのかたよりははなはだしいが、応力比が 0.3 以下では、表面から層厚の半分くらいの深さまでは比較的良く一致している。接触面付近において半無限時応力とのずれが大きくなっているのは、下層の硬い基盤の分布によるものと考えられる。

(2) 接触面が粗であるときには地表面近くにおける応力集中の程度が著しく、なめらかである場合には底部近辺における集中の傾向が強い。

(3) 層厚が大きくなるにつれ半無限時の応力分布に近づき、接触面の状態によって応力の分布形がさほど変わらなくなる。これは $H/2A$ が大きいとき、境界面の影響が現われにくいことを考えれば当然のことである。

最後に実験結果について考察する。表-2 には観測沈下量と非拘束および拘束変形係数もちいて計算した沈下量とを対比し、表-3 には層厚/幅比が 1.0 のときの理論分布を再現したときの実測沈下量を示してある。これらによってつぎのことが明らかとなった。

(1) 平均荷重強度が過大にならない範囲では、拘束状態の変形係数もちいた計算値と実測値とが良い一致を見せている。ことに層厚/幅比の小さい値に対しては両値のかたよりがほぼ 10% 以下におさまっている。これに反してこの比が大きいときには合致度が悪くなる(図-12)。この理由として $H/2A$ が小さいときすなわち有限層が薄い場合には、荷重と剛なる基礎までの距離が短いため上下からの拘束が大きくなり、さらに層厚に比して載荷幅が大きいために側方からの拘束も増加して、 $H/2A$ が小さいときに比してより弾性的挙動を示すことが考えられる。

(2) 計算で得られた $\nu=0.3$, $H/2A=1.0$ の場合の

表-2 剛性板によって一定変位を与えた場合の沈下量 (理論値と実測値)

平均荷重強度 (g/cm ²)	$H/2A$	計 算 値		実 測 値 (mm)
		E_I (非拘束) による	E_{II} (拘束) による	
6.7	0.5	2.48	1.89	1.76
	1.0	4.27	3.25	2.93
	1.5	5.69	4.31	3.70
13.3	0.5	5.96	4.43	4.88
	1.0	10.2	7.61	7.29
	1.5	14.1	10.5	9.01
20.0	0.5	—	11.9	10.57
	1.0	—	20.5	12.91
	1.5	—	—	—

表-3 理論分布を再現したときの実測沈下量

平均荷重強度 (g/cm ²)	6.7	13.3
沈下量 (mm)	2.9	5.8

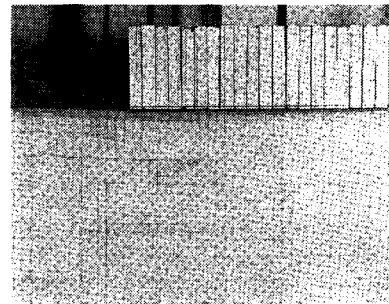


写真-2 計算によって求めた接触応力分布型を外力として与えたときの変位曲線

接触応力分布形を表面に外力として作用せしめたときの沈下曲線を写真-2 に示した。これによっても認められるごとく、載荷部直下における変位はほとんど一定であった。また表-3 に示すごとく、その時の沈下量は表-2 の剛性載荷板による値とほぼ一致している。比較のために等分布および中央部で大きく縁部で小さい分布荷重を与えてみたが表面変位は一樣とはならなかった。

以上の事実によって土のような非弾性物質の載荷試験においては、変形係数として拘束時の係数をとったほうが理論値との一致が良いこと、また剛性載荷板と地盤との接触応力を求めるには実用上分割法で十分であることが明らかとなった。

4. くぼみを有する地盤の載荷問題

(1) 概 論

何らかの原因で道路の表面にくぼみができると比較的短期間にその機能を失ないがちであり、この傾向は砂利道のコルゲーションやアスファルト舗装のきれつ発生な

どに関連して実際上しばしば経験されているところである。その理由としては、くぼみを通ずる輪荷重の衝撃にもとづく荷重増大の効果に加えて、くぼみのあることによる応力分散のかたよりが考えられる。

境界が直線でない二次元弾性問題の解法が試みられているものは二、三に止まらない。これらは多く等角写像による二次元問題の解法である。Weber は周期的な波状境界を有する半無限板の問題を多項式による写像関数をもちいて応力解を与えると同時に、これに基づいて具体的な応力の数値を示している (Weber, 1942)。Neuber は放物線境界の問題を取り扱い、歯車のつけ根付近の応力の状態を解析した (Neuber, 1962)。また色部は Weber のもちいた写像関数を一般化することによって、任意の境界形状を有する半無限板の応力状態は理論的には解析し得ることを結論した (色部, 1966) が、実際問題への応用にはかなりの困難さを伴うようである。そのほか、曲線境界の問題が Muskhelishvili の著書に、円切欠きを有する半無限板の問題に関する研究が Green らの著書に紹介されている (Muskhelishvili, 1953; Green 他, 1964)。

平面境界の一部に浅いならぬくぼみがあるような場合には、以上の研究を適用することが不可能であるように思われる。本論文では、実用的意味から仮想境界法と呼ばれる一つの数値解法を提案した。

すなわち、半無限体の表面のくぼみで仕切られる範囲に未知の鉛直力および水平力を仮定する。これらの力による半無限体内の応力解を求め、考えるくぼみ面上の応力値があらかじめ指定した境界面に等しくなるよう未知表面力を決定するのである。この方法によって、二、三の放物線型くぼみ面上に指数的な分布荷重が作用したときの応力解を示し、これによってくぼみを有する舗装内の応力性状を考察した。

(2) 解析

a) 二次元半無限体の解

直線境界を有する二次元半無限体の表面に等分布荷重

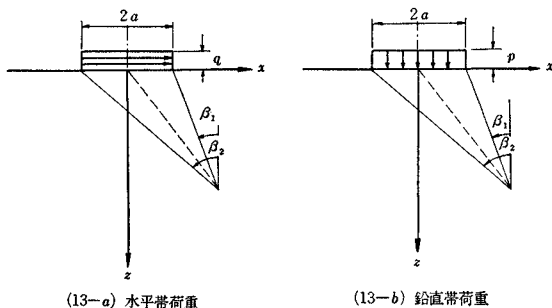


図-13 二次元半無限体に作用する荷重

が働いたときの解はつぎのごとくである。すなわち座標軸および荷重を 図-13 のようにとると、

(i) 水平帯荷重 (図-13 a)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{\pi} \left[\sin 2\epsilon \sin 2\psi - \log \frac{\cos^2 \beta_1}{\cos^2 \beta_2} \right] \\ \sigma_z &= -\frac{q}{\pi} \sin 2\epsilon \sin 2\psi \\ \tau_{xz} &= -\frac{q}{\pi} [2\epsilon - \sin 2\epsilon \cos 2\psi] \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.1)$$

(ii) 鉛直帯荷重 (図-13 b)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{p_0}{\pi} [2\epsilon - \sin 2\epsilon \cos 2\psi] \\ \sigma_z &= -\frac{p_0}{\pi} [2\epsilon + \sin 2\epsilon \cos 2\psi] \\ \tau_{xz} &= -\frac{p_0}{\pi} [\sin 2\epsilon \sin 2\psi] \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.2)$$

ただし

$$2\epsilon = \beta_1 + \beta_2, \quad 2\psi = \beta_1 - \beta_2 \dots\dots(4.3)$$

b) くぼみを有する二次元半無限体の解

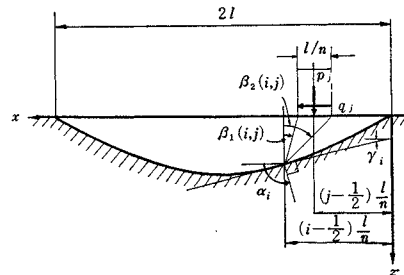


図-14 くぼみ面と仮想面上に作用する荷重

半無限弾性体のくぼみを無視した仮想水平面のくぼみで区切られる部分に未知の表面力 p_j, q_j を想定する (図-14)。これらの力による半無限弾性体の応力解は式 (4.1), (4.2) によって簡単に求められる。地表面に対して任意の傾きをなす平面上の応力成分は (図-15) を参照して

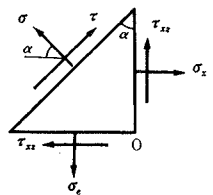


図-15 接線応力と法線応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_z \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha - 2\tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= (\sigma_z - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.4)$$

で与えられるから 図-14 の i 点における直応力と接線応力とは式 (4.1) と (4.2) とを式 (4.4) へ入れることによって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \left[p_j \{ 2\epsilon_{ij} - \sin 2\epsilon_{ij} \cos 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \} \right. \\ &\quad \left. + q_j \left\{ 2\epsilon_{ij} \cos 2\alpha_i + 2\cos^2 \alpha_i \cdot \log \frac{\cos \beta_1(i, j)}{\cos \beta_2(i, j)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin 2\epsilon_{ij} \sin 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\tau_i = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \left[p_j \{ \sin 2 \epsilon_{ij} \sin 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \} + q_j \left\{ 2 \epsilon_{ij} \cos 2 \alpha_i + \sin 2 \alpha_i \log \frac{\cos \beta_1(i, j)}{\cos \beta_2(i, j)} - \sin 2 \epsilon_{ij} \cos 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \right\} \right] \dots\dots\dots(4.5)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} 2 \epsilon_{ij} &= \beta_2(i, j) - \beta_1(i, j) \\ 2 \psi_{ij} &= \beta_2(i, j) + \beta_1(i, j) \\ \alpha_i &= \frac{\pi}{2} + r_i \\ \beta_1(i, j) &= \tan^{-1} \left(\frac{i-j-\frac{1}{2}l}{f_i} \frac{l}{n} \right) \\ \beta_2(i, j) &= \tan^{-1} \left(\frac{i-j+\frac{1}{2}l}{f_i} \frac{l}{n} \right) \\ f_i &= f \left\{ \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \right\} \\ r_i &= \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=(i-1/2)l/n} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.6)$$

くぼみ面上において与えられた垂直応力および接線力がそれぞれ $G(x)$, $H(x)$ なる関数で表わされたとすると、

$$\sigma_i = G \left\{ \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \right\}, \quad \tau_i = H \left\{ \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{l}{n} \right\} \quad (4.7)$$

によって未知力 p_j, q_j に関する $4n$ 個の一次方程式が得られる。

c) 解析結果

本論文ではくぼみ形および荷重がつぎの形で示されたときの地盤内の応力分布を計算した。

すなわちくぼみ面形としては二種の放物線

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{3}{2500} x(100-x) \\ (2) \quad f(x) &= \frac{10}{2500} x(100-x) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.8)$$

また外力としては二種の指数分布

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad G(x) &= -\exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\}; \\ H(x) &= 0 \\ (ii) \quad G(x) &= 0; \\ H(x) &= -\exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.9)$$

を考えた。

くぼみ形ならびに垂直外力の対称性、接線外力の非対称性を考慮することにより式(4.7)の $4n$ 個の方程式は $2n$ 個に減じられる。すなわち m を 1, 2 とすれば、

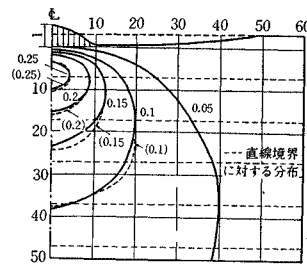
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n [p_j (A_{ij} + \delta_+^m A_{i2n+1-j}) + q_j (B_{ij} - \delta_+^m B_{i2n+1-j})] \\ = -\frac{1}{2} (1 - \delta_+^m) \exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} \\ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n [p_j (C_{ij} + \delta_+^m C_{i2n+1-j}) + q_j (D_{ij} - \delta_+^m D_{i2n+1-j})] \\ = -\frac{1}{2} (1 + \delta_+^m) \exp \left\{ -\frac{(x-50)^2}{50} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.10)$$

ただし

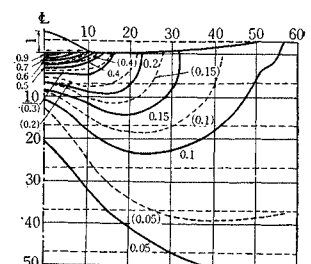
$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= 2 \epsilon_{ij} - \sin 2 \epsilon_{ij} \cos 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \\ B_{ij} &= 2 \epsilon_{ij} \sin 2 \alpha_i + 2 \cos^2 \alpha_i \log \frac{\cos \beta_1(i, j)}{\cos \beta_2(i, j)} - \sin 2 \epsilon_{ij} \sin 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \\ C_{ij} &= \sin 2 \epsilon_{ij} \sin 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \\ D_{ij} &= 2 \epsilon_{ij} \cos 2 \alpha_i + \sin 2 \alpha_i \log \frac{\cos \beta_1(i, j)}{\cos \beta_2(i, j)} - \sin 2 \epsilon_{ij} \cos 2(\psi_{ij} + \alpha_i) \\ \delta_+^m &= \begin{cases} 1; & m=1 \\ -1; & m=2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.11)$$

計算にあたっては分割区間数を 50 すなわち $n=25$ とした。くぼみ面上では外力を式(4.9)に示した連続関数で与えたが、方程式を解く場合には式(4.7)によって表わされているごとく、分割した荷重の中心線における有

(16-a) 最大深さ 3

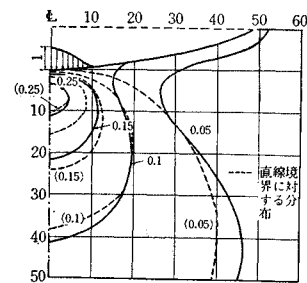


(16-a-1) 垂直外力による分布

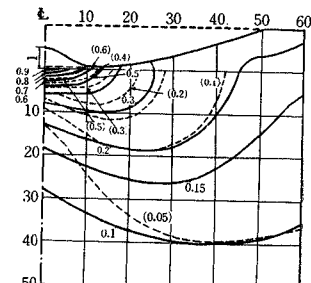


(16-a-2) 接線外力による分布

(16-b) 最大深さ 10



(16-b-1) 垂直外力による分布



(16-b-2) 接線外力による分布

限個の値としか考えられていない。換言すれば一次方程式(4.10)の解として得られる表面力 p_j, q_j はくぼみ面上の特定の点において境界条件を満足しているにすぎないのである。したがって、くぼみ面上の応力が指定されている点以外で境界条件が満たされているかどうかを確かめておく必要がある。

これら計算された表面力によってくぼみを有する地盤内の応力値を求め、主応力差の形でまとめて図-16に示した。また図中の点線は境界が直線である半無限体の表面に(i), (ii)の分布荷重が加わったときの応力解に対するものである。

(3) 考 察

浅くなだらかなくぼみを有する地盤内の応力分布を計算した結果つぎのようなことが明らかとなった。

(1) 本章で計算した範囲においては、くぼみが大きくなってもそれほど著しい応力集中は見られないが応力の分散の程度は大きくなり、より遠方まで応力が減衰せずに伝播することが認められる。またその分散の程度は、垂直外力によるものより接線外力によるもののほうが大きい。

(2) 主応力差の分布図から明らかなごとく、外力が垂直力である場合にはくぼみが深くなると応力分布形状が大きく変化してくる。これはくぼみの縁部付近における境界条件の満たされた方がくぼみの深さによってかなり異なるためであろう。検算の結果、くぼみ深さが10であるとき本来応力値が0となるべき縁部において、外力の最大値の1/10程度の応力が発生することが認められた。

これに対して接線外力では、くぼみの深さによって縁部における境界条件からのかたより量がそれほど変化しないために全体としての分布形が変化しないものと推測される。

(3) 直線境界を有する半無限体内の分布形状とくらべると接線外力の場合よりも垂直外力の場合によりよい一致が見られる。また一次方程式を解いて求めた仮想外力によるくぼみ面上の応力の真値からのかたよりは、接線外力に対するもののほうが一般に大きい。

(4) くぼみの深さが大きくなるとくぼみの縁部において真値からのずれが大きくなることはすでに述べたが、これに反して中央部のかたよりは小さくなることが検算によって明らかとなった。

(5) ここで提案した仮想境界法はここで例として示した放物線分布では、その適用は深さ30のものが限度であることが明らかとなった。もっともこのような消去法をくり返すことによってこの限界をのぼすことは可能であろう。またこの方法の適用はくぼみの中央付近にお

ける応力性状を対象とする問題に限られ、縁部近辺の応力状態を議論するような場合には応用することはできない。

(6) 一般にくぼみがあることによって応力が深部まで減衰せずに伝達されるということは、舗装で考えるとくぼみがないときには応力がほとんど生じなかった路盤や路床も応力を受けるようになることを意味している。したがって、舗装には全体として大きくなり返し応力が加わり、くぼみが生じたことによる断面減少の影響とともに舗装の破壊が促進されることになるものと考えられる。

6. 現場実測値と理論値との比較

(1) 概 論

地盤の表面に作用する外力によって地盤に生ずる応力や変位を測定した例は数多くある。一樣地盤における応力の実測例としては、砂地盤の表面に剛性荷重を作用せしめたKögler-Scheidigの実験が非常に有名である(Kögler-Scheidig, 1927, 1928, 1929)。またFaberや市原も同種の実測を試みている(Faber, 1933; 市原, 1955)。そのほか、たわみ性荷重に関する実測では、Turnbullらの実験がよく知られており、均一なる地盤においては応力値は計算値と良く合致するが、変位は一致しにくいことを結論している(Turnbull 他, 1961)。

これに対して多層地盤における実測は、舗装の構造解析との関連において多く試みられている。この種の実測ではSowersらによるものが広範囲にわたっているため、しばしば参照されるようである(Sowers 他, 1961)。彼らは、実物大の舗装模型に実際に輪荷重を作用せしめて、砂質シルト路床内の鉛直応力分布を測定している。路盤材料としては、(i) 粒度の良いシルト質砂、(ii) 碎石マカダム、(iii) ソイルセメントの3種類のものを用いている。実験の結果によれば、(i), (ii)においては表層や路盤などの強固なる層があるにもかかわらずその層の効果が現われず、むしろ一樣弾性体と仮定したときの計算値に良く合致していること；これに対して(iii)の場合には表層と路盤とを上層、路床を下層と考えた二層問題の理論値と比較的良好一致を見せていることが明らかとなっている。この理由としてSowersらは、(i), (ii)においては路盤材料の引張抵抗力が少なく路床を補強する機能を発揮し得ないが、(iii)ではソイルセメントが大きな引張強度を有するために全体として弾性体に近い挙動を示すことをあげている。残念ながらSowersらの実測は路床内の鉛直応力成分に限られており、上層の応力や表面変位などについては何ら触れていない。

このほかイギリスの Road Research Laboratory やアメリカにおける AASHO や WASHO などの Road Test においても実測が行なわれている。しかしながらこれらは、舗装全体の応力や変形状を追跡することを主眼としているため、舗装を構成する材料の物質定数が明らかにされていないことが多い。このように現在の時点では、多層構造の理論的計算が現実の問題にどの程度の適応性を有しているかについて決定的な結論は下されていない実状である。ことに変位成分については、一樣地盤におけると同じくこの傾向が強い。

本章ではこのような事情を考慮し弾性理論の適用性を検討するため、水平なる二層地盤に関して得られている変位の数値解(たとえば最上, 1969)と現場において測定された値とを対比することを試みた。地盤の変位については実験的に測定した例が少なく、またあっても模型実験によるものが多く現場での実測例はまれである。ことに表面に作用する水平荷重による変形量を観測したものはほとんどないといつてさしつかえない。

ここでは、(I) 日本道路公団名神高速道路で行なわれた沈下量観測試験および(II) 建設省土木研究所構内における舗装の載荷実験の2つの実測例から得られたデータを使用させて頂いた。

これらの実測値と理論計算値との比較に必要なヤング率などの弾性定数は当該試験において明らかにされていないので、CBR 値やマーシャル安定度などから推定した。

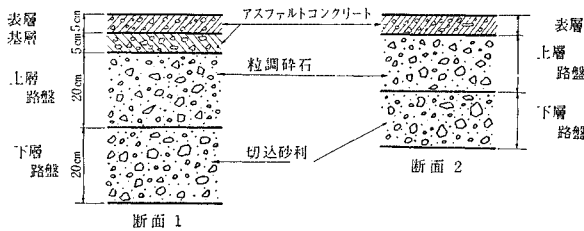


図-17 試験区間の舗装断面

(2) 実測値との対比

a) 名神高速道路における沈下量観測試験

この試験は名神高速道路の大垣〜関ヶ原区間において実施された。沈下量の測定にはダンプトラックとベンケルマンビームとが利用されている。観測区間の舗装断面は図-17に示すごとく二種類であった。断面-1は名神高速道路の標準断面の一つであり、断面-2は軟弱地盤地区に施工後の圧密沈下を見込んで舗装された仮断面である。

測定は各断面について約100箇所で行なわれたが、そのうち約50の値を選び図-18は●印で示した。印の大小はその値の頻度の大小を表わしている。

つぎに弾性理論によって表面変位を計算するために図-17の断面を二層体と仮定する。現実にはこの断面は4層と考えねばならないが、アスファルトを含む層すなわち表層を上層、上層路盤以下を下層と考えることが近似的に許されることを、故竹下博士が結論しておられる(竹下, 1957)。

本試験においてトラックの後輪荷重は7tであったが輪荷重 P と載荷半径 a との間には、

$$a(\text{cm}) = 12 + P(t) \dots\dots\dots(5.1)$$

なる関係のあることが実験的に知られている(竹下他, 1960)。これより載荷半径は19cm、荷重強度は6.2 kg/cm² と推定できる。またこの区間のアスファルト混合材の安定度 S は850~1000 kg/cm²、フロー値は25~30 (1/100 mm) の範囲にあることがわかっている(日本道路公団, 1964)。60°Cにおける変形係数はこれらの値によって

$$\bar{E}_1 = 16 \frac{S}{f}$$

と表わされる(竹下, 1965)。測定時の温度は6°~10°Cと報告されているから割増係数(竹下, 1965)をかければ、上層のヤング率は5700~8000 kg/cm²

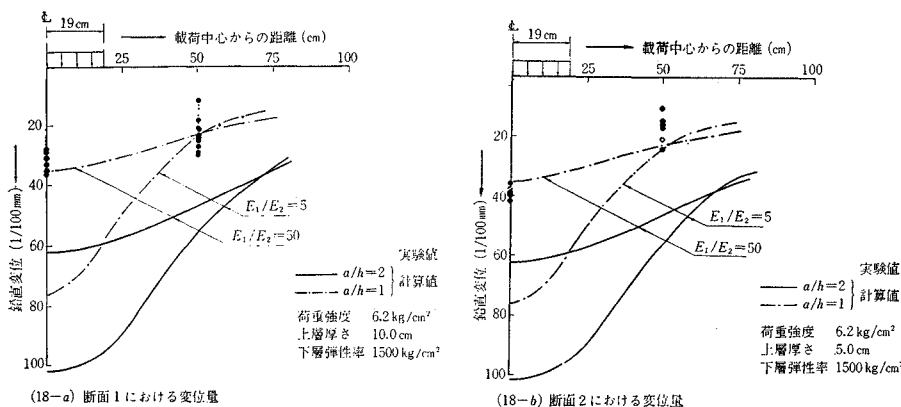


図-18 名神高速における実測値と計算値との対比

程度になるものと考えてよい。また上層路盤以下の層に関しては、現場における測定値として変形係数850~1500 kg/cm² が得られたことが報告されている(上田他, 1963)。計算に必要な以上の値をまとめると表-4のごとくなる。

これらの値を参考として $a/h=1, 2; E_1/E_2=5, 50$ の4つの場合につき変位曲線を求め図-18に示した。

b) 土木研究所構内における載荷実験

この実験は建設省土木研究所千葉支所内に舗装された幅 8.7m, 全長 100m のアスファルト舗装面上において行なわれたものである。実験の対象となった舗装断面は5種あり、基層の種類だけを異にしたものである。

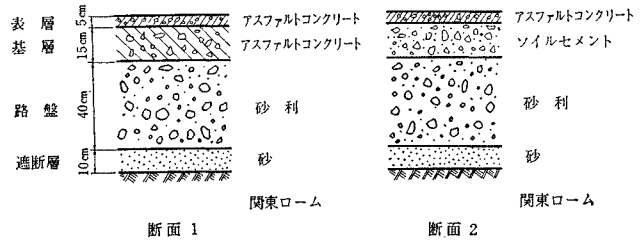


図-19 実験区間の舗装断面

表-4 名神高速道路における観測試験に関する諸量

荷重強度 P_0	載荷半径 a	上層厚 h		上層ヤング率 E_1 (kg/cm^2)	下層ヤング率 E_2 (kg/cm^2)
		断面 1	断面 2		
6.2 kg/cm^2	19 cm	10 cm	5 cm	5 700~8 000	850~1 500
	$a/h=$	1.9	3.8	$E_1/E_2=4\sim 10$	

本章では 図-19 に示す2例だけを取り上げ比較の対象とした。

路面への載荷は 30 t 載荷装置の底面に直径 40 cm のゴム板を接着し、鉛直荷重は載荷試験機により、水平荷重はこの載荷板にチェーンブロックを取りつけ人力によって与えた。荷重は鉛直力、水平力ともに4段階としその最大値はそれぞれ 15 t, 4.5 t である。

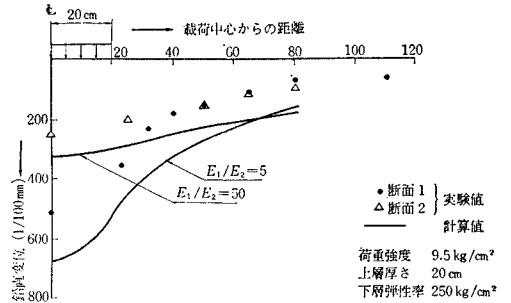
舗装の変位は、舗装内に埋め込まれた沈下計、および表面に取りつけられたダイヤルゲージにより観測した。図-20の(a)には 11.9 t の鉛直荷重による鉛直変位、(b)には 10 t の鉛直荷重による水平変位、(c)には 3 t の水平荷重による水平変位の値を示した。

変位曲線の計算にあたっては断面1は前項におけると同じく二層化できるが、断面2に関しては問題がある。表層および基層にもちいられたアスファルトコンクリートについては、60°C および 0°C で一軸圧縮試験が行なわれ平均値としてそれぞれ 240 kg/cm^2 , 1 860 kg/cm^2 が得られている。測定は夏期に行なわれ舗装版の温度は $35 \pm 3^\circ\text{C}$ であることが知れているから、断面1に対しては $E_1=800 \text{ kg}/\text{cm}^2$ と考えてよい。基層に利用されたソイルセメントの CBR 値は 22.3%, 支持力係数 K_{30} は 44.6 $\text{kg}/\text{cm}^2/\text{cm}$ であった。再び竹下博士によれば変形係数と CBR 値あるいは K 値との間にはつぎの関係があるといわれている(竹下, 1958, 1966)。すなわち

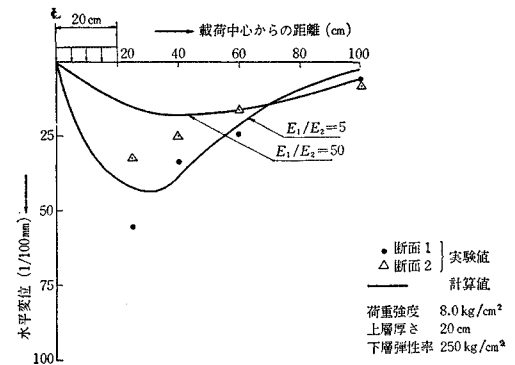
$$\bar{E} = 35 \text{ CBR}(\%), \bar{E} = 1.18 a K_{30} \dots \dots (5.3)$$

ここに、 a は平板の半径である。この両式によって求めた値は良く一致し 800 kg/cm^2 を得る。したがって、基層がソイルセメントの場合も表層+基層を上層と考えてよいことが結論される。

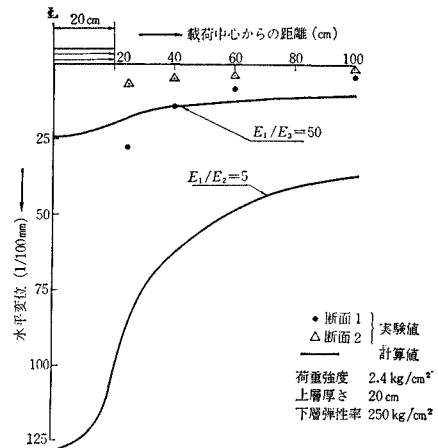
路盤の砂利については、 $\text{CBR} \sim 7.0\%$, $K_{30} \sim 20.0 \text{ kg}/\text{cm}^2/\text{cm}$ の値が示されており、これより $E_2=250 \sim 350$



(20-a) 鉛直荷重による鉛直変位



(20-b) 鉛直荷重による水平変位



(20-c) 水平荷重による水平変位

図-20 土木研究所における実測値と計算値との対比

kg/cm² の値が推定される。つぎの表に計算に必要な数値をまとめる。

表—5 土木研究所における載荷実験に関する諸量

荷重強度 P_0	載荷半径 a	上層厚 h	上層ヤング率 E_1	下層ヤング率 E_2
9.5 kg/cm ² ; 11.9 t	20 cm	20 cm	800 kg/cm ²	kg/cm ² 250~350
8.0 kg/cm ² ; 10.0 t				
2.4 kg/cm ² ; 3.0 t				
		$a/h=1$	$E_1/E_2=3\sim 4$	

これらの数値を参考とし、 $a/h=1$ 、 $E_1/E_2=5$ 、50 の二つの場合について計算した変位曲線を 図—19 に示した。

(3) 考察

二層地盤に関する計算値と現場実測値とを比較した結果つぎのことが明らかとなった。

I. 名神高速道路の沈下観測データについては、断面 1, 2 のいずれにおいても観測値は計算値を下回りほぼ 1/2 の大きさになっている。また断面 1 は 2 にくらべて上層の厚さが 2 倍であるが、その効果は載荷中心より 50 cm 離れた地点においては現われていない。載荷中央部では計算沈下量が 3/10 mm であるのに対し観測量は 1/10 mm となっている。さらに実測値は $a/h=1$ の場合の計算値と非常によく一致している。このようにここで取り上げた二層地盤は、上層の厚さあるいは載荷半径/層厚の比によって計算におけるほど影響を受けないようである。もっともこれはあくまで、弾性率比 E_1/E_2 が 5~50 の範囲にあるという前提に立っての議論である。

見方を変え実際の弾性率比がこれよりもかなり大きいものと仮定すると、理論値との合致度が良くなることは 図—17 によって背かれる。事実少し極端な考え方をすればこの比は大きくなり得るのである。すなわち測定においてはトラックは静止しておらず、10 km/h 程度の速度で動いている。一般に変形係数は載荷時間によって大きく変動する (Ishihara, 1965)。換算式 (5.2) はマーシャル試験によって得られる値を対象とするものであるから載荷時間は 5 秒としてよい。本試験では荷重が直径 38 cm の部分を 10 km/h の速度で通過すると考えると、載荷時間はおよそ 0.14 秒となり変形係数は 2~3 倍に増加する (竹下, 1965)。また序論でも述べ、3. でも具体的に示したごとく、変形係数は拘束の影響を大きく受け非拘束時係数の 2 倍程度にはなり得る。輪荷重の作用した舗装では内部の応力状態は拘束時に近くなり、ことに路盤ではその影響が大きくなることが予想される。

以上述べたことから、下層の弾性率 E_2 および弾性率比 E_1/E_2 をここに示した値の 2~4 倍程度にとることは不可能ではないと推察され、そうすることによって理論値と実測値とのよい一致が見られることは明らかである。

著者は各種の舗装現場において沈下観測を行ない、これを二層あるいは三層弾性理論によって計算した値と比較検討した経験がしばしばあるが、比較的高級な舗装の場合にはほとんどといってよいくらい観測値は計算値の 1/2 程度の大きさであった。また AASHO の Road Test の結果についても同様の解析を試みたがやはり実測値は同様の傾向を示した (Ishihara 他, 1967)。いずれの比較例においても計算に必要な定数は CBR 値、相対強度あるいはマーシャル試験値などから推定せざるを得なかったが、この場合にも路盤の変形係数が拘束した状態において非拘束時の 2 倍程度になるという仮定を許せば、理論値と実測値とはきわめて良く一致することが結論されている。

II. 土木研究所内における実験について

(1) 鉛直荷重による鉛直変位では、断面 1 の載荷板下の部分の値は計算値とよく合致しているが、これを離れるにしたがい合致度は悪くなる。しかし全体としては I. の名神高速道路における試験の値ほど悪くはない。またソイル セメント 基層の場合には沈下曲線はアスファルト コンクリート 基層のときにくらべてなだらかであり、弾性率比 E_1/E_2 が大きいときの曲線形に似ている。すなわち絶対値こそ異なるが形としてはアスファルト コンクリートのときは $E_1/E_2=5$ 、ソイル セメントのときは $E_1/E_2=50$ の曲線形にきわめて近い。下層の弾性率を 300 kg/cm² にとれば絶対値もほぼ等しくなる。

(2) 鉛直荷重による水平変位では鉛直変位のときと異なり実測値が計算値よりも大きい傾向にあるが、概して計算値に近い値を示している。とくにソイル セメント 基層を有する断面 2 ではよい一致が見られる。

(3) 水平荷重による水平変位では計算値は実測値に比してかなり小さい。これは水平荷重を正しく等分布状に与えることがむずかしく、かなり大きな力が鉛直方向に働いて力の損失が出たためと考えられる。

(4) ソイル セメントとアスファルト コンクリートの弾性率はほぼ等しいと推定したにもかかわらず、断面 2 における実測値の方が 1 のそれよりもかなり小さくなっている。これは明らかにソイル セメント 層の弾性率がアスファルト コンクリートにくらべて大きいことを意味しており、弾性率推定の方法に問題があるものと想像される。

(5) I. の観測試験の結果と異なり、II. の実測ではある程度実測値と理論値とが一致している。この理由としては I. の名神高速道路の舗装断面の弾性率の推定がとくに路盤以下の層に関して適当でなかったこと、およびトラック輪荷重を利用したため円形等分布荷重と考えた計算の実情と合わなかったことなどが考えられる。

おわりに本論文をまとめるにあたり終始ご指導を賜っ

た東京工業大学 山口柏樹教授に深く感謝致すとともに、卒業研究の一部として実験、計算を手伝っていただいた金野春幸氏(川崎製鉄)に謝意を表したい。なお、本論文の中の数値計算はすべて東京大学大型計算機センターの HITAC 5020 によって行なった。

参 考 文 献

- 1) Biot, M.A., (1935): "Effect of Discontinuities on the Pressure Distribution in a Loaded Soil" Physics, Vol. 6
- 2) Bjerrum, L., (1935): "Theoretical and Experimental Investigations on the Shear Strength of Soils"
- 3) Brahtz, J.H.A. and Brahtz, D.R., 19: "Proposed Methods of Calculating the Stability of Earth Dams" Proc. 2nd Conf. Large Dams.
- 4) Burmister, D.M., (1943): "The Theory of Stresses and Displacements in Layer Systems and Applications to Design of Airport Runways" Proc. Highway Res. Board, Vol. 23
- 5) Burmister, D.M., (1945): "The General Theory of Stresses and Displacements in Layered System" Journal Appl. Physics, Vol. 16, No. 2, 3, 5
- 6) Davis, E.H., and Taylor, H., (1961): "The Surface Displacement of an Elastic Layer Due to Horizontal and Vertical Surface Loadings" Proc. 5th Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris.
- 7) Faber, O., (1933): "Pressure Distribution under Bases and Stability of Foundation" Structural Engineer, 11
- 8) Filon, L.N.G., (1903): Phil. Trans. Royal Society, Series A, Vol. 201
- 9) Fox, L., (1948): "Computation of Traffic Stresses in a Simple Road Structure" Proc. 2nd Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engng. Rotterdam
- 10) Fröhlich, O.K., (1934): "Druckverteilung in Baugrunde" Springer, Berlin
- 11) Green, A.E., and Zerna, W., (1953): "Theoretical Elasticity" Clarendon Press, Oxford
- 12) Holl, D.L., (1940): "Stress Transmission in Earths" Proc. Highway Res. Board, Vol. 20
- 13) 市原松平 (1955): "剛性載荷重による砂層中鉛直増加土圧の分布について", 土木学会誌 40 巻 4 号
- 14) 色部 誠・高野 博 (1963): "一つの傾斜接合面を有する半無限体の一解法", 電力中央研究所報 Vol. 3, No. 1
- 15) 色部 誠 (1966): "任意の境界形状を有する半無限板の応力状態", 第 21 回土木学会年次学術講演会講演概要
- 16) Ishihara, K., (1965): "Effect of Rate of Loading on the Modulus of Deformation of Materials Exhibiting Viscoelastic Behaviors", Trans. Japan Soc. Civil Engrs. No. 117
- 17) Ishihara, K., and Kimura, T., (1967): "The Theory of Viscoelastic Two-Layer Systems and Conception of Its Application to the Pavement Design" Proc. 2nd Intern. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements, Michigan
- 18) 川本眺万 (1966): "基礎岩盤の変位状態におよぼす地山の異方性の影響について", 土木学会論文集第 126 号
- 19) Kögler, F., and Scheidig, A., (1927), (1928), (1929): "Druckverteilung in Baugrunde" Die Bautechnik, Vol. 5, 6, 7
- 20) Kögler, F., (1936): Opening Discussion at Session E, Proc. 1st Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Cambridge, Mass.
- 21) Marguerre, K., (1931): "Druckverteilung durch eine elastische Schichte auf starrer, rauher Unterlage" Ing. Archiv Vol. 2
- 22) Marguerre, K., (1933): "Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der dicken Platte" Ing. Archiv Vol. 4
- 23) 松村孫治 (1931): "弾性率の深さと共に変化する地盤における基礎の沈下", 土木学会誌 17 巻 11 号
- 24) Michell, J.H., (1901): Proc. London Math. Soc. Vol. 32
- 25) 最上武雄 (編) (1969): "土質力学", 技報堂 (近刊)
- 26) 牟岐鹿桜 (1956): "表面にせん断荷重を受ける半無限体の三次元問題", 日本機械学会論文集 22 巻 119 号
- 27) Muskhelishvili, N.I., (1953): "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" P. Noordhoff Groningen—the Netherlands
- 28) Neuber, H., (1962): "Die belastete Parabelkerbe" Z.A.M.M. Vol. 42
- 29) 日本道路公団 (1964): 日本道路公団試験所報告 (昭和 39 年)
- 30) Odenstad, S., (1948): "Stresses and Strains in the Undrained Compression Test" Geotechnique, Vol. 1
- 31) Passer, W., (1935): "Druckverteilung durch eine elastische Schichte" Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIIa, Vol. 144
- 32) Shepherd, W.M., (1948): "A study of the Immediate Triaxial Test on Cohesive Soils" Proc. 2nd Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam
- 33) Sowers, G.F., and Vesic, A.B., (1961): "Stress Distribution Beneath Pavements of Different Rigidities" Proc. 5th Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engng., Paris
- 34) Steinbrenner, W., (1934): "Tafeln zur Setzungsrechnung" Die Straße, Vol. 1
- 35) 竹下春見 (1957): "寒地道路の路床路盤に関する調査研究", 土木研究所報告 95 号
- 36) 竹下春見 (1958): "アスファルト舗装について(6)", 道路建設 No. 130
- 37) 竹下春見 (1960): "道路舗装の設計", オーム社
- 38) 竹下春見 (1965): "舗装厚指数について", 道路 11 月号
- 39) 竹下春見 (1966): "解説—アスファルト舗装", アスファルト, 9 巻 50 号
- 40) Timoshenko, S. and Goodier, J.N., (1951): "Theory of Elasticity" 2nd ed. McGraw-Hill, New York
- 41) Tranter, C.J., (1948): "The Use of the Mellin Transform in Finding the Stress Distribution in an Infinite Wedge" Quart. Journ. of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 1
- 42) Turnbull, W.J., Maxwell, A.A., and Ahlvin, R.G., (1961): "Stresses and Deflections in Homogeneous Soil Masses" Proc. 5th. Intern. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engng., Paris
- 43) 上田嘉男・西中村和利・増井 隆 (1963): "挽み性舗装に対する層構造の考え方", 第 7 回日本道路会議論文集
- 44) 植下 協・G.G. マイヤホフ (1967): "岩盤上土層表面における弾性変位について", 土木学会論文集第 143 号
- 45) Weber, C., (1942): "Halbebene mit Periodisch gewelltem Rand" Z.A. M.M. 22 No. 1