

T形ばりの極限状態における有効幅について*

ON THE EFFECTIVE WIDTH OF T-BEAM FOR COLLAPSE LOAD

倉田 宗章**・園田 恵一郎***

By Muneaki Kurata and Keiichiro Sonoda

1. ま え が き

骨組み構造や板構造の極限解析法は多くの研究者により発展させられ、実用に供せられる段階に達しているが、土木構造物においてはそれらが単独に用いられることは比較的少なく、おおかたの場合、はりとは板が結合した合成構造として用いられている。このような合成構造物においては、板には曲げモーメントと膜力 (Membrane Forces) が、はりには曲げモーメントと軸力が同時に作用する複雑な問題となり、はりや板の単独構造物にくらべて解析が相当困難になり、現在のところ、まだ適切な極限解析法は見当たらない。

一方、従来の弾性設計法では、このような合成構造物に対して有効幅という概念を導入して、はりとは板をそれぞれ分離して問題を処理してきた。もちろん、極限設計法では、単に応力を基準とした有効幅を導入することはできないが、板に働く膜力と曲げモーメントの相互作用の極限強度に与える影響が非常に小さく、無視できる場合には、膜力の問題と曲げモーメントの問題を分離して取り扱うことができ、崩壊荷重を基準とした有効幅の導入が可能となる。

本論文では、このような概念に基づいて、単一集中荷重を受ける T 形ばりの極限状態での有効幅を求めることを目的とし、極限解析法の上、下界定理にしたがって理論式を求め、はりのスパン長さとフランジ幅の比を変化させて数値計算により有効幅を求めたものである。

2. 用いた条件および仮定

本論文での理論式の展開にあたって用いた条件および

仮定は、つぎのとおりである。

(1) ここで対象としている構造は図-1 に示すようなものであり、はりとは両端において単純に支持され、はりとフランジ板 (以下の文において、単に板と呼ぶ) は剛に結合されている。また板の周辺は面内方向の変形に対して何ら拘束を受けないものとする。

(2) 板の厚さははりの長さや高さにくらべて十分小さいものとし、板の曲げ剛性を無視するものとする。

(3) 板は等方、等質なる完全塑性材料からできているものとし、Tresca の降伏条件式にしたがうものとする。

(4) はりは、その断面形状は任意であるが、長さ方向に等断面であるとする。

(5) 外荷重ははりに単一集中荷重として作用する。

3. 下 界 解

まず最初に、はりのスパン中央に単一集中荷重が作用する場合、すなわちはりに生ずる塑性ヒンジがスパン中央に起こる場合を考える。この場合は対称性を考慮して図-1 に示す板の X, Y 座標の $1/4$ 領域のみについて考えれば十分である。板の厚さ H はスパン長 L に比して十分小さいものとし、板の曲げ剛性を無視すれば、

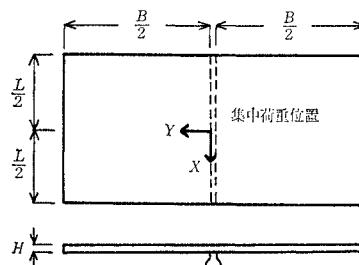


図-1

* 土木学会関西支部昭和43年度年次学術講演会にて一部発表

** 正会員 工博 大阪市立大学工学部教授

*** 正会員 工修 大阪市立大学工学部講師

板には膜力のみが作用することになり、一つの平面応力問題として取り扱うことができる。

いま、板面内に作用する主応力を $\sigma_1, \sigma_2 (\sigma_1 \geq \sigma_2)$ とすれば、Tresca の降伏条件式はつぎのように表わされる。

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) \leq \sigma_0$$

ここに、 σ_0 は 1 軸引張（圧縮）降伏応力を示す。さらに、無次元化した主応力； $n = \sigma_1 / \sigma_0, s = \sigma_2 / \sigma_0$ と Y 軸と最小主応力方向とのなす正の角度（反時計回り） θ を導入し、応力変数； $\omega = n + s, \chi = n - s$ によって降伏条件式を表わせば、つぎようになる。

$$\max(|n|, |s|, |n - s|) \leq 1 \dots\dots\dots (1)$$

つぎに、極限状態での有効幅 λ (図-2 参照) をつぎのように定義する。

$$\lambda = \frac{\int_0^{B/2} (\sigma_x)_{X=0} dY}{\sigma_0} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $(\sigma_x)_{X=0}$ は Y 軸上断面に作用する直応力を示す。

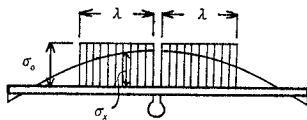


図-2

すなわち、ここでいう有効幅とは、全フランジ幅が有効に働く T 形ばりとしては理論により計算した際、同じ崩壊荷重を与えるところのフランジ幅を示す。

さて、極限解析法の下界定理にしたがって最も適切な有効幅を求めることは、板断面内で応力つりあい方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial Y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} = 0$$

を満足し、式(1)の降伏条件式を満足する応力場(Stress Field)の中で式(2)の λ の最大値を求めることに帰着する。

平面応力問題の極限解析法の一つに不連続応力場(Discontinuous Field of Stress)を用いる方法があり、下界解を求める有効な方法として広く用いられており、ここでもこの方法を用いて解析する。

図-1 に示す板の X, Y 座標の 1/4 領域のみを取り出して考えれば、Y 軸上断面には直応力 σ_x のみが存在し、一般的にはその分布形状は未知であるが、もし、極限状態において板内に一定応力場 (Constant Stress Field) と応力不連続線が存在するものとすれば、く形分布となり、式(2)の λ の計算は容易に行なうことができる。

つぎに、板内の応力場をつぎの二つの場合に分けて考える。

(1) 板の幅がはりのスパン長に比して十分大きい場合

図-1 において、B が L に比して十分大きければ、座標原点からかなり離れた Y 軸上断面には引張応力が作用することも考えられ、この場合、図-3 に示すような応力場(これを応力場 1 と名付ける)を仮定することができる。図中、①~⑤で示した領域は一定応力場を表わし、それらの境界線は応力不連続線となっている。なお番号の付けていない領域は無応力領域を示している。

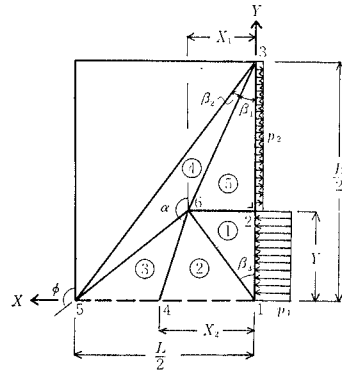


図-3 応力場 1

いま、図-4 に示すように Y 軸から α なる角度をなす応力不連続線 JK を考え、この線より上側の領域に作用する応力を $\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$ とし、下側の領域に作用する応力を $\sigma_n', \sigma_t', \tau_{nt}'$ とすれば、つりあい条件より不連続面に作用する垂直直応力とせん断応力は連続しなければならないが、接線方向の直応力分布は不連続になることができる。すなわち、

$$\sigma_n = \sigma_n', \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}', \quad \sigma_t \neq \sigma_t'$$

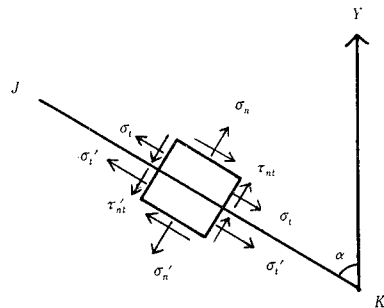


図-4

したがって図-3 において、任意の i 番目の領域と i+1 番目の領域の境界線である応力不連続線において、つぎの関係式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \omega_i + \chi_i \cos 2(\theta_i - \alpha) &= \omega_{i+1} + \chi_{i+1} \cos 2(\theta_{i+1} - \alpha) \\ \chi_i \sin 2(\theta_i - \alpha) &= \chi_{i+1} \sin 2(\theta_{i+1} - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、添字は着目する領域の番号を意味し、 α は不連続線と Y 軸とのなす正の角度 (反時計回り) を、また θ_i は i 番目の領域における最小主応力方向と Y 軸とのなす正の角度を示す。

さて、図-3 に示す応力場 1 において、Y 軸上断面に作用する応力を p_1 (圧縮)、 p_2 (引張) で表示すれば、1~2 線、2~3 線および 3~5 線における応力つりあい条件より

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad s_1 = -p_1$$

$$\theta_4 = \frac{\pi}{2} - (\beta_1 + \beta_2), \quad s_4 = 0$$

$$\theta_3 = 0, \quad n_3 = p_2$$

を得、不連続線 1~6, 4~6, 5~6, 3~6 および 2~6 における条件式 (3) により、つぎの関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} n_1 - p_1 - (n_1 + p_1) \cos 2\beta_3 &= \omega_2 + \chi_2 \cos 2(\theta_2 - \beta_3) \\ (n_1 + p_1) \sin 2\beta_3 &= \chi_2 \sin 2(\theta_2 - \beta_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 + \chi_2 \cos 2(\theta_2 - \alpha) &= \omega_3 + \chi_3 \cos 2(\theta_3 - \alpha) \\ \chi_2 \sin 2(\theta_2 - \alpha) &= \chi_3 \sin 2(\theta_3 - \alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 + \chi_3 \cos 2(\theta_3 - \phi) &= n_4 - n_4 \cos 2(\beta_1 + \beta_2 + \phi) \\ \chi_3 \sin 2(\theta_3 - \phi) &= n_4 \sin 2(\beta_1 + \beta_2 + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} n_4 - n_4 \cos 2\beta_2 &= p_2 + s_2 + (p_2 - s_2) \cos 2\beta_1 \\ n_4 \sin 2\beta_2 &= (p_2 - s_2) \sin 2\beta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$n_1 = s_3 \dots\dots\dots (8)$$

以上の各式と降伏条件式 (1) を満足させて、式 (2) の λ の最大値を求めることが当面の問題となるのであるが、式 (4)~(8) には多くの未知数を含んでいるため、このままでは計算が非常に面倒になる。それゆえ式の単純化を試みる必要がある。図-3 に示す板の X, Y 軸上に働く応力のつりあいを考えると、Y 軸上断面に働く σ_x の総和は X 軸上断面に分布する τ_{xy} の総和に等しくなければならない。したがって式 (2) の λ の値をできるだけ大きくするためには、領域②、および③に作用する τ_{xy} をできるだけ大きくしなければならず、そのためには $x_2 = x_3 = 1$ と置くことが有利であるように思われる (後述する数値計算の結果、この仮定は決して不合理なものではないことが判明した)。それゆえ $x_2 = x_3 = 1$ とおいて、式 (4)~(8) から各領域の応力値を求めれば、つぎようになる。

$$p_2 = \frac{n_4}{2} \left\{ 1 - \cos 2\beta_2 + (1 - \cos 2\beta_1) \frac{\sin 2\beta_2}{\sin 2\beta_1} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\sin 2\theta_3 = n_4 \sin 2(\beta_1 + \beta_2 + \phi) \cos 2\phi \pm |\sin 2\phi| \sqrt{1 - n_4^2 \sin^2 2(\beta_1 + \beta_2 + \phi)} \dots\dots\dots (10)$$

$$\cos 2\theta_3 = \frac{1}{\sin 2\phi} \{ \cos 2\phi \cdot \sin 2\theta_3 - n_4 \sin 2(\beta_1 + \beta_2 + \phi) \} \dots\dots\dots (11)$$

$$\omega_3 = n_4 \{ 1 - \cos 2(\beta_1 + \beta_2 + \phi) \} - \cos 2(\theta_3 - \phi) \dots\dots\dots (12)$$

$$\sin 2\theta_2 = \sin 2\theta_3, \text{ または } \sin 2(\theta_3 - 2\alpha) \dots\dots\dots (13)$$

$$\cos 2\theta_2 = \frac{1}{\sin 2\alpha} \{ \cos 2\alpha \cdot \sin 2\theta_2 - \sin 2(\theta_3 - \alpha) \} \dots\dots\dots (14)$$

$$\omega_2 = \omega_3 + \cos 2(\theta_3 - \alpha) - \cos 2(\theta_2 - \alpha) \dots\dots\dots (15)$$

$$n_1 = \frac{1}{2} \left\{ \omega_2 + \cos 2(\theta_2 - \beta_3) + \frac{1 + \cos 2\beta_3}{\sin 2\beta_3} \sin 2(\theta_2 - \beta_3) \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$p_1 = -\frac{1}{2} \left\{ \omega_2 + \cos 2(\theta_2 - \beta_3) - \frac{1 - \cos 2\beta_3}{\sin 2\beta_3} \sin 2(\theta_2 - \beta_3) \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$n_4 = \frac{-\sin 2\beta_1}{2 \sin 2\beta_2} \left\{ \omega_2 + \cos 2(\theta_2 - \beta_3) + \frac{1 + \cos 2\beta_3}{\sin 2\beta_3} \sin 2(\theta_2 - \beta_3) - 2p_2 \right\} \dots\dots\dots (18)$$

以上式 (9)~(18) において独立な式は 8 個であり、スパン長 L と板幅 B が与えられたものとすれば、これらの式は 11 個の未知量を含むことになるから、各領域の応力値を求めることは 3 自由度を有する問題となる。したがって $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha, \phi$ 中の 3 個が既知であれば、一つの応力場は定まり、式 (9)~(18) より各領域の応力値; $p_1, n_1, p_2, n_4, \omega_2, \theta_2, \omega_3, \theta_3$ が決定できる。それゆえ

$$0 \leq \beta_1 \leq \tan^{-1} \frac{L}{B}, \quad 0 \leq \beta_3 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\pi - \tan^{-1} \left\{ \frac{L}{B} \left(1 + \frac{\tan \beta_3}{\tan \beta_1} \right) - \tan \beta_3 \right\} \leq \alpha \leq \pi + \beta_3$$

の範囲内の β_1, β_3, α のあらゆる値に対して各領域の応力値を計算し、降伏条件式 (1)、すなわちこの場合は

$$\left. \begin{aligned} |n_1| \leq 1, \quad |p_1| \leq 1, \quad |n_1 + p_1| \leq 1, \\ |\omega_2| \leq 1, \quad |\omega_3| \leq 1, \quad 0 \leq n_4 \leq 1, \\ 0 \leq p_2 \leq 1, \quad |p_2 - n_1| \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

の 8 個の不等式を満足する範囲内で、式 (2) の λ の最大値、すなわち

$$\lambda = \frac{B \tan \beta_1}{2(\tan \beta_1 + \tan \beta_3) \sigma_0} (p_1 + p_2) - \frac{B p_2}{2 \sigma_0} \dots\dots\dots (20)$$

の最大値を求めれば、応力場 1 に対する最良の有効幅となる。

(2) 板の幅がはりのスパン長に比して十分小さい場合

B が L に比して十分小さければ、Y 軸上断面には圧縮応力のみが作用することが予想でき、図-5 に示すよ

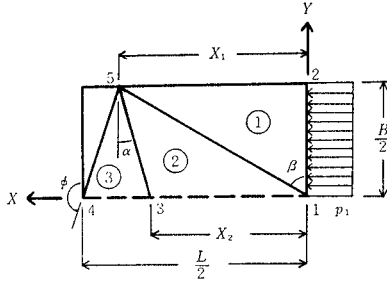


図-5 応力場 2

うな応力場 (これを応力場 2 と名付ける) を仮定することができる。

応力場 1 と同様に, 1~2 線, 2~5 線および 4~5 線での応力つりあい条件より,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad s_1 = -p_1, \quad n_1 = 0$$

$$\theta_3 = \pi - \phi, \quad n_3 = 0$$

を得る。したがって, 応力不連続線 1~5 線および 3~5 線での条件式 (3) より, つぎの関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} -p_1 - p_1 \cos 2\beta &= \omega_2 + x_2 \cos 2(\theta_2 - \beta) \\ p_1 \sin 2\beta &= x_2 \sin 2(\theta_2 - \beta) \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 + x_2 \cos 2(\theta_2 - \alpha) &= s_3 - s_3 \cos 2(\phi + \alpha) \\ x_2 \sin 2(\theta_2 - \alpha) &= s_3 \sin 2(\phi + \alpha) \end{aligned} \right\} (22)$$

応力場 1 の場合と同様な理由から $x_2 = 1$ とおけば, 式 (21), (22) よりつぎの各式を得る。

$$p_1 = \frac{\sin 2(\theta_2 - \beta)}{\sin 2\beta} \dots (23)$$

$$\omega_2 = -p_1(1 + \cos 2\beta) - \cos 2(\theta_2 - \beta) \dots (24)$$

$$s_3 = \frac{\sin 2(\theta_2 - \alpha)}{\sin 2(\phi + \alpha)} \dots (25)$$

$$\sin 2\theta_2 = \pm \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \dots (26)$$

$$\cos 2\theta_2 = \frac{A}{B} \sin 2\theta_2 \dots (27)$$

ここにおいて,

$$A = \frac{1 - \cos 2(\phi + \alpha)}{\sin 2(\phi + \alpha)} \cos 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\beta}{\sin 2\beta} \cos 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 2\beta$$

$$B = \frac{1 - \cos 2(\phi + \alpha)}{\sin 2(\phi + \alpha)} \sin 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\beta}{\sin 2\beta} \sin 2\beta + \cos 2\alpha - \cos 2\beta$$

以上, 式 (23)~(27) において, 独立な式は 4 個であり, 未知量は 6 個である。したがって, 2 自由度の問題となり, α, β の値を定めれば, 一つの応力場は定まり, それゆえ,

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\tan^{-1}\left(\frac{L}{B} - \tan \beta\right) \leq \alpha \leq \beta$$

の範囲内の α, β のあらゆる値に対して, 式 (23)~(27) より各領域の応力値を計算し, 降伏条件式 (1), すな

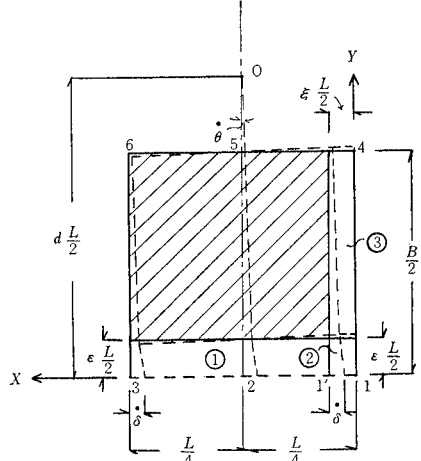


図-6

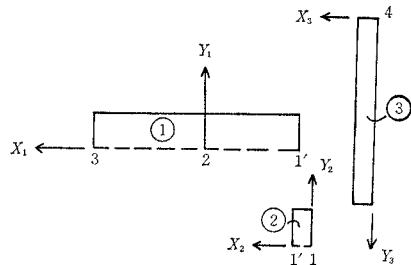


図-7

わちこの場合,

$$0 \leq p_1 \leq 1, \quad |\omega_2| \leq 1, \quad -1 \leq s_3 \leq 0 \dots (28)$$

の 3 個の不等式を満足する範囲内で

$$\lambda = \frac{B p_1}{2 \sigma_0} \dots (29)$$

の最大値を求めれば, この場合の最良の有効幅となる。

4. 上 界 解

上界解を求めるためには, まず最初に変形に関する境界条件を満足する運動学的許容な速度場 (Kinematically Admissible Velocity Field) を考えなければならぬ。

下界解の場合と同様, 対称性を考慮して, 図-1 に示す板の 1/4 領域のみを取り出して考える。一般に, 極限状態において板は X 軸と平行な運動と, 同時に回転運動も起こすことが予想できるから, 一つの簡単な運動学的許容な速度場を図-6 のように仮定することができる。この図において, ハッチを施した部分は点 $O(L/4, dL/2)$ を中心に剛体として回転運動し, はりと板との接触線 $1' \sim 2 \sim 3$ では X 軸方向のみに運動するものとする。それゆえ領域 ①~③ のみにおいてひずみ速度が生ずるものとする。

計算の便宜のため、各領域において、それぞれ座標軸を図-7 のように選び、つぎの無次元量を導入する。

$$b = \frac{2B}{L}, \quad x_i = \frac{2X_i}{L}, \quad y_i = \frac{2Y_i}{L} \quad (i=1, 2, 3)$$

ここに、添字は着目する領域の番号を意味する。いま x_i, y_i 方向の無次元化した速度を u_i, v_i とすれば、速度に関する境界条件はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} y_1=0 \text{ において, } v_1 &= 0 \\ x_2=y_2=0 \text{ において, } u_2 &= v_2 = 0 \\ x_3=0 \text{ において, } u_3 &= 0 \end{aligned}$$

また 1~2~3 線ははりのとの接触線であることから、この線上において x 方向のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_x$ は 0 でなければならない。それゆえ $\xi L/2$ ははりの高さに比して十分小さいものとする*。

さて、板の回転速度を $\dot{\theta}$ 、 X 軸方向のはりの速度を $-\dot{\delta}$ で表示すれば、上記の境界条件を満足し、各領域内で直線分布をなす速度はつぎのように表わされる (図-6 の変形図参照)。

$$u_1 = -\dot{\delta} - \{(d-\epsilon)\dot{\theta} - \dot{\delta}\} \frac{y_1}{\epsilon} \quad \nearrow$$

領域 1

$$\dot{\epsilon}_{1, \max} = -\frac{\dot{\theta}}{2\epsilon} x_1 - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta} x_1}{\epsilon}\right)^2 + \left\{\dot{\theta}\left(1 - \frac{y_1}{\epsilon}\right) + \frac{\dot{q}}{\epsilon}\right\}^2} \dots\dots\dots(30)$$

領域 2

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{2, \max} &= \frac{1}{2\xi} \left| \frac{\xi\dot{\theta}}{2\epsilon} - \dot{\delta} + \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{q}}{\epsilon}\right) y_2 - \frac{\xi\dot{\theta}}{\epsilon} x_2 \right| \\ &+ \frac{1}{2\xi} \sqrt{\left\{-\frac{\xi\dot{\theta}}{2\epsilon} - \dot{\delta} + \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{q}}{\epsilon}\right) y_2 + \frac{\xi\dot{\theta} x_2}{\epsilon}\right\}^2 + \left\{\left(\dot{\theta} + \frac{\dot{q}}{\epsilon}\right) x_2 - \frac{\xi y_2}{\epsilon} \dot{\theta}\right\}^2} \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

領域 3

$$\dot{\epsilon}_{3, \max} = -\frac{d-b+y_3}{2\xi} \dot{\theta} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{d-b+y_3}{\xi}\right)^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{x_3}{\xi} + 1\right)^2 \dot{\theta}^2} \dots\dots\dots(32)$$

これらの式において、 $\dot{q} = \dot{\delta} - d\dot{\theta}$ とおいている。

一方、全内部エネルギー逸散速度量 \dot{W}_i は

$$\frac{\dot{W}_i}{H\sigma_0} = -\int_{-(1/2)+\xi}^{1/2} \dot{\epsilon}_{1, \max} dy_1 dx_1 + \int_0^{\xi} \dot{\epsilon}_{2, \max} dy_2 dx_2 - \int_0^{b-\epsilon} \int_0^{\xi} \dot{\epsilon}_{3, \max} dx_3 dy_3 \dots\dots\dots(33)$$

上式において、 ϵ, ξ はひずみ速度を受ける領域の大きさを決める量であり、前述したように ξ は微小な値となるが、 ϵ は b より小さな任意の値をとることができる。

しかしながら、ここでは計算の簡単化のため ξ とともに ϵ も 1 に比して十分小さな値にとり、式 (30)~(32) において卓越項だけを残し、それらを式 (33) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}_c}{H\sigma_0} &\doteq \int_0^{1/2} \dot{\theta} x_1 dx_1 + \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta} x_1}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{\dot{q}}{\epsilon}\right)^2} dy_1 dx_1 \\ &+ \frac{\dot{q}}{2\epsilon\xi} \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} \{y_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\} dy_2 dx_2 + \frac{\dot{\theta}}{2\xi} \int_0^b \int_0^{\xi} \{d-b+y_3 + \sqrt{(d-b+y_3)^2 + x_3^2}\} dx_3 dy_3 \\ &\doteq \frac{\dot{\theta}}{2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\dot{q}}{\dot{\theta}}\right)^2} + \left(\frac{\dot{q}}{\dot{\theta}}\right) \log \left\{ \frac{\dot{\theta}}{2\dot{q}} + \frac{\dot{\theta}}{\dot{q}} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\dot{q}}{\dot{\theta}}\right)^2} \right\} + b(2d-b) \right] \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

となる。したがって Y 軸上断面に作用する直応力 σ_x の総和は X 軸上断面に作用するせん断応力の総和に等し

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{\dot{\theta}}{\epsilon} x_1 y_1 \\ u_2 &= \left\{ -\dot{\delta} + y_2 \dot{\theta} + \frac{\dot{\delta} - d\dot{\theta}}{\epsilon} y_2 \right\} \frac{x_2}{\xi} \\ v_2 &= \frac{y_2 \dot{\theta}}{2\epsilon} (1-2x_2) \\ u_3 &= -(d-b+y_3) \frac{\dot{\theta} x_3}{\xi} \\ v_3 &= \frac{\dot{\theta}}{2} (1-2x_3) \end{aligned}$$

一方、ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

と表わされるから、非圧縮性材料を仮定すれば、主ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ は

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{1,2} &= \frac{\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2}\right)^2} \\ \dot{\epsilon}_3 &= -(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) \end{aligned}$$

により計算でき、各領域の最大ひずみ速度はつぎのようになる。

* 厳密に言えば、はりに生ずる塑性関節における塑性流れを生ずる領域と適合しなければならない。

いことから、式 (2) で定義した有効幅の最適値を上界定理により求めるには、はりと板の接触線 1'~2~3 における速度 $\dot{\delta}$ を 1 とおいて、 $\dot{q}, \dot{\theta}, d$ のあらゆる値の組み合わせを考えて式 (34) の \dot{W}_i の最小値を求めれば

よい。すなわち $\mu = d \dot{\theta} / \dot{q}$ とおけば、

$$\lambda = \frac{L}{2} \cdot \frac{\mu}{2d(1+\mu)} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{d}{\mu}\right)^2} + \left(\frac{d}{\mu}\right)^2 \log \left\{ \frac{\mu}{2d} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{d}\right)^2} \right\} + b(2d-b) \right] \dots\dots\dots(35)$$

となり、 $\partial\lambda/\partial\mu=0, \partial\lambda/\partial d=0$ より、 μ, d の値を求め、最良の有効幅が決定できる。

表一 応力場1の数値計算結果

B/L	2Y/L	2X ₁ /L	2X ₂ /L	λ(×L)
0.5	0.310	0.370	0.51899	0.1505
1.0	0.410	0.585	0.67095	0.1988
2.0	0.446	0.753	0.75820	0.2181
3.333	0.490	0.735	0.77469	0.2261
5.0	0.500	0.750	0.78955	0.2321
10.0	0.500	0.755	0.80460	0.2383
∞	0.705	0.705	* -	0.2500

この場合は、領域②と③は同一応力場となる。

表二 応力場2の数値計算結果

B/L	2X ₁ /L	2X ₂ /L	λ(×L)
0.10	1.000	0.5150	0.050
0.15	1.000	0.5348	0.075
0.20	1.000	0.5630	0.100
0.25	1.000	0.6020	0.125
0.30	1.000	0.6525	0.150
0.35	1.000	0.7170	0.175
0.414	1.000	0.8285	0.207
0.50	0.800	0.7508	0.2189
0.60	0.760	0.7130	0.2061
0.75	0.690	0.6578	0.1935

5. 数値計算結果

(1) 下界解, 応力場 1

数値計算はすべて電子計算機によって行ない、図-3 に示す X_1, X_2, Y の値を $0 \leq X_2 \leq L/2, 0 \leq X_1 \leq L(1/2 - Y/B), 0 \leq Y \leq B/2$ の範囲内で変動させて、式(20)の λ の最大値を求めた。すなわち、まず最初に n_4, X_1, Y に適当な値を入れて、 X_2 の値を変動させ、試索法により式(9)~(18)を解き、 $p_2, \theta_3, \omega_3, \theta_2, \omega_2, n_1, p_1$ の順に各値を求め、 λ の値を計算し、その後 n_4 を 1/50 刻み、 X_1, Y を L/200 刻みで変化させて同じ計算を繰り返し、式(19)の不等式を満足する範囲内で λ の最大値を求めた。B/L の各値に対して計算した結果を表一に示す。

(2) 下界解, 応力場 2

応力場1の場合と同様な方法で計算を行なった。すなわちこの場合は、図-5 に示す X_1, X_2 に L/2 なる値を代入し、式(23)~(27)より $\theta_2, p_1, \omega_2, s_3$ の各値を求め、

(29) の λ の値を計算し、その後 X_1, X_2 をそれぞれ L/200 刻みで変化させ、同じ計算を繰り返し、式(28)の不等式を満足する範囲内で λ の最大値を求めた。それらの結果を表二に示す。

(3) 上 界 解

式(35)の λ を μ, d に関して微分することにより最小の λ の値を求めることができるが、ここでは直接 μ, d に任意の正の値を代入し、試索法によって λ の最小値を求めた。B/L の各値に対して計算した結果、結局 λ の最小値は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{L} \leq 0.5 \text{ の場合, } \lambda_{\min} &= 0.5 B \\ \frac{B}{L} \geq 0.5 \text{ の場合, } \lambda_{\min} &= 0.25 L \end{aligned} \right\} \dots\dots(36)$$

となることが判明した。したがって対応する速度場は、 $B/L \leq 0.5$ では図-6 の 1~4 線のみにおいてひずみ速度が生じ、板は X 軸と平行に運動することになり、 $B/L \geq 0.5$ では 1~2~3 線がすべり線となり、板とはりはこの線上で相対的にずれることになる。

6. 上, 下界解の比較

数値計算結果である表一、表二 および式(36)を取りまとめて図示したものが図-8 である。すなわち応力場1による下界解は、 $B/L=0$ で $\lambda=0$ となり、 $B/L=\infty$ で、 $\lambda=0.25L$ となる曲線であり、応力場2による下界解は、 B/L が 0 から 0.414 まで直線で進み、その後 $B/L=0.5$ で最大値をもつ曲線を描く。したがって下界解は $B/L=1$ の付近で著しく低下することになるが、 $B/L=0.5$ における応力場2は、同時に $B/L > 0.5$ における一つの静的許容、かつ安全な応力場にもなることができる。それゆえ B/L の増大につれて λ の値が減少することはなく、結局この場合の最良の有効幅は 図-8 の実線で示すものとなる。

一方、上界解は、 $\lambda=0.5B$ と $\lambda=0.25L$ の2本の直線で表わされるから、 $B/L=\infty$ と $B/L \leq 0.414$ の場合は上、下界解は一致するが、その他の場合は一致せず、 $0.5 \leq B/L \leq 2.1$ において最大の差が生じ、それらの平

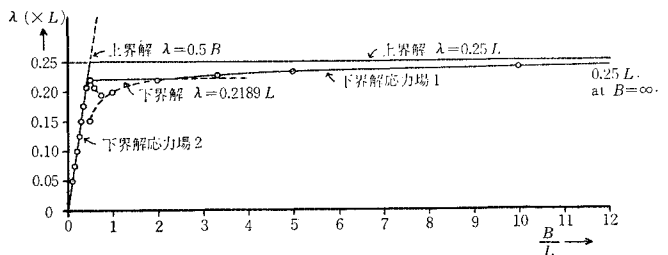


図-8

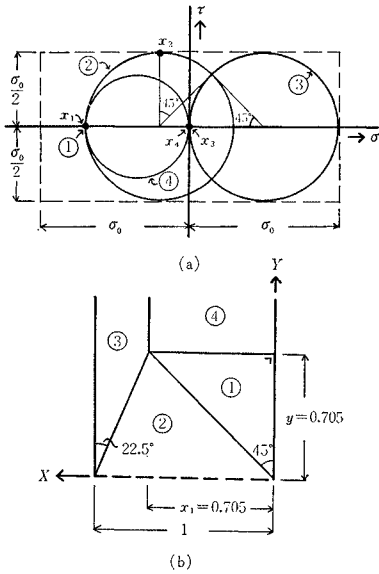


図-9 $B=\infty$ の場合の応力状態

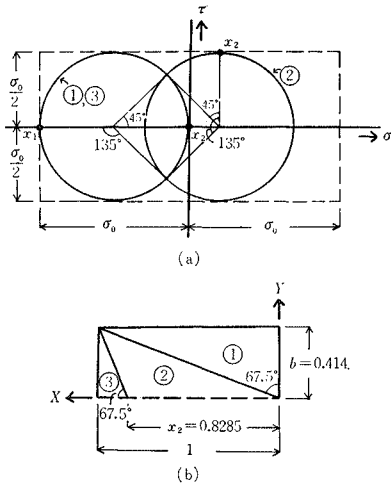


図-10 $B=0.414$ の場合の応力状態

均値をとっても $\pm 6.6\%$ の精度の解となる。

つぎに、 $B/L=\infty$ と $B/L=0.414$ の場合について、極限状態における板内の応力状態を図-9、図-10に示す。図-9 (a)、図-10 (a) において、①、②、… で示した各円は図-9 (b)、図-10 (b) の領域 ①、②、… の応力状態をモールの応力円によって表示したものであり、 x_1, x_2, \dots で示した各点はそれぞれの領域において、 Y 軸と平行な断面に作用する応力値 (σ_x, τ_{xy}) を表わしている。これらの図から図-9 (b) の領域 ② では、せん断応力 τ_{xy} が限界値 $\sigma_0/2$ に達しており、図-10 (b) の領域 ① では、直応力 σ_x が圧縮降伏応力 $-\sigma_0$ に達していることがわかる。それゆえこれらの応力場と図-6 から求めた速度場の間には塑性流れ法則 (Flow Rule of Plastic

Theorem) を満足しているの、ここで求めた解は正確解*であることが保証される。

7. はり上の任意の位置に単一集中荷重が作用する場合についての考察

はりのスパン中央に単一集中荷重を受ける場合には、対称性を考慮して本論文で述べた方法で解析することができたが、一般的な荷重に対しては対称性はなく、板全体を同時に考えて解析しなければならない。しかしながら、極限解析法の上、下界定理にしたがえば、このような場合に対しても対称性をもつ場合の解を利用して簡単に求めることができる。すなわちはり上の任意の位置に集中荷重が作用した場合、単純ばりとして計算される最大曲げモーメントの生ずる位置すなわち荷重位置と両支点までの短い方の距離を $L'/2$ とし、 $L=L'$ とおいて図-8 より有効幅を求めることができる。なぜならば、はりにおける最大曲げモーメントの生ずる位置をとおり、はりの軸に直角な切断線によって板を二分し、小さい方の板に対して図-3 および図-5 に示す応力場を適用すれば、同じ応力場は大きい方の板に対する一つの静的許容、かつ安全な応力場にもなることができる。また、運動学的許容速度場は、この切断線においてのみ圧縮ひずみ速度が生ずることによっても、また小さい方の板において板とはりの接触線上ですべり線ができることによっても得られるから、上述の方法によって任意の位置の単一集中荷重に対する有効幅を求めることが可能となる。

8. むすび

極限解析法の上、下界定理にしたがってはりのスパン中央に単一集中荷重を受ける幅の広いフランジをもつT形ばりの極限状態における有効幅を求める計算式を誘導し、はりのスパン長さに対するフランジ幅の比を変化させて数値計算した。それらの結果、フランジ幅が無限に大きい場合と、はりのスパン長さに対するフランジ幅の比が0.414より小さい場合には上、下界解が一致する解を得たが、その他の場合では一致せず、それらの平均値をとっても最大 $\pm 6.6\%$ の誤差を覚悟しなければならない。これらの解を改善するためにはさらに研究を要する

* この解が真の解であるためには、ここで得られた板内の応力分布とつりあい、かつ降伏条件式を犯さない応力分布がはり断面内においても作ることができなければならない。はり断面が非常に小さくなければ、このことは十分可能となるであろう。しかしながら、はり断面が非常に小さい場合には、このような応力分布は作れず、有効幅 λ は $A/2H$ 、 A ははり断面積、より大きな値をとることはできない。

が、実用的には十分満足できる解が得られたものと思われる。したがって、はり付き床板などの崩壊荷重の算定にあたって、本論文で求めた有効幅と同じ大きさのフランジ幅をもつ T 形ばりとしてはり理論により計算すれば、崩壊荷重は容易に求めることができる。

最後に、この研究に対して第 4 回松永記念科学振興財団研究助成金、ならびに昭和 42 年文部省科学研究費を受けたことを付記します。

記号の説明

L =はりのスパン長

B =フランジ板の幅

H =フランジ板の厚さ

X, Y =直交座標 (X : はりの軸方向, Y : はり軸に直角な方向)

x, y =無次元化した座標 ($x=2X/L, y=2Y/L$)

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ = X, Y 座標に関する直応力, せん断応力

σ_0 =フランジ板の一軸引張 (圧縮) 降伏応力

σ_1, σ_2 =主応力 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$)

n, s, ω, χ =無次元化した主応力 ($n=\sigma_1/\sigma_0, s=\sigma_2/\sigma_0, \omega=n+s, \chi=n-s$)

θ =最小主応力方向と Y 軸とのなす正の角度 (反時計回り)

p_1, p_2 =フランジ板の Y 軸上断面に作用する直応力

β, α, ϕ =応力不連続線と Y 軸とのなす角度
 λ =有効幅

u, v = x 軸, y 軸方向の無次元化した速度

$\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$ = x, y 座標に関するひずみ速度

$\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3$ =主ひずみ速度

$\dot{\theta}$ =フランジ板の回転速度

$\dot{\delta}$ =はりの x 軸方向への速度

ϵ, ξ =ひずみ速度を受ける領域の大きさを表わすパラメータ

参考文献

- 1) P.G. Hodge, Jr.; Plastic Analysis of Structures
Mc GRAW HILL New York 1958.

(1968.6.24・受付)