

テーパーのついている円弧アーチの固有振動について

THE FREE VIBRATIONS OF CONSTANTLY TAPERED CIRCULAR ARCHES

奥村 敏 恵*・松 浦 聖**
By Toshie Okumura and Sei Matuura

要 旨 本論文は図-1 に示すようなテーパーの著しくついている円弧アーチの固有振動性状について考察したものである。解析に当っては、アーチの各種振動形を考慮して、各固有振動数を解析し、とくにアーチ テーパーの角度の振動におよぼす影響を吟味の対象とし、また着目すべき生じやすい振動変形モードを解析的に考察した。なおかかるアーチの固有振動に関する模型実験をも行なって、解析計算に対する検討を加えている。

1. 緒 言

テーパーのついているアーチの弾性安定の基礎的研究の一つとして、先きには弾性座屈を考察したが¹⁾、ここでは振動を考察している。

ところで、アーチの面内および面外振動に関する研究成果は、すでに数多く発表されている²⁾。しかしここで

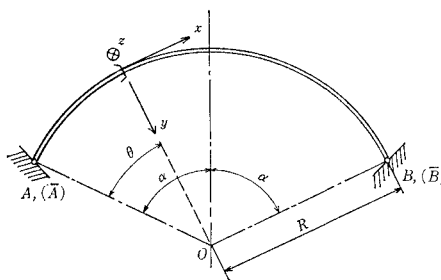


図-2 アーチ実形図

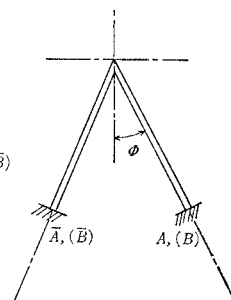


図-3 アーチの横断面図

解析の対象としたテーパーのついているアーチでは、テーパーをつけるための構造から、支間中央での拘束によって、振動変形をする場合に、面内および面外振動変形が同時に引き起こされる。したがって振動数に、テーパーの角度 ϕ が影響してくる。そこで、ここではとくにこの ϕ の変化による影響に着目して考察をしている。

解析に当っては、Walking³⁾の論文を参考として、つりあい法により、振動基本式の誘導を考えている。

考慮した振動形としては、振動が起りやすいモードとして、先きに述べた座屈変形の場合⁴⁾と同様な変形状態が考えられるので、ここでも図-6 に示すような4つの場合を考察して、各固有振動数を比較検討している。

さて解析の対象としたテーパーのついているアーチは、いわゆるバスケット ハンドル形式のアーチで、図-1, 2, 3 に示すように、その両端では主構たるアーチは一定の間隔があるが、支間中央で一体となって剛結されている。その支点条件としては、主としてヒンジ構造、すなわち、支点はアーチの面 I, II に垂直な軸のまわりのみ、自由な回転ができるものと考えて解析している。

4. では若干の実験的考察も加えているが、ここでは実験上の便宜を考慮して、両端固定の場合を取り扱っている。

なお解析に当っては、曲げねじりに関する量は考慮に

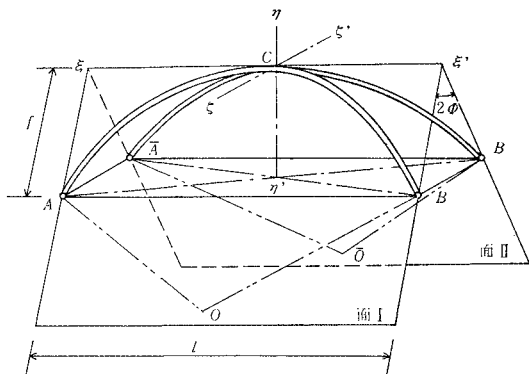


図-1 アーチ見取図

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 名古屋工業大学助教授 土木工学科

入っていないし、構造部材の断面も計算の便宜上一定と
している。

2. 理論的考察

(1) 記号および振動形

座標系、変位および断面力の記号や符号は図-2, 3, 4, 5 に示したとおりであり、座標系は、アーチ部材断面に固定して、その原点は断面のせん断中心にとる。なお変位の符号のうち、ねじり回転角 φ の符号は、ねじりモーメント M_x の正の方向と一致させてとっている(図-4, 5 参照)。

さらに部材の質量を μ (アーチ材軸に沿った単位長さ当りの質量)、 x, y, z 方向の慣性力をそれぞれ X, Y, Z とし、またねじり慣性力は M_φ とする。

つぎに振動モードとしては、図-6 に示すような、振動変形として基本的と考えられる4つの状態すなわち、逆対称形や対称形を(先きに考察した弾性座屈モードと同じ)考察することにする。以下では、この4つのモードに対応して、 ξ 振動、 η 振動、対称振動そして ε 振動と呼ぶことにする。

すなわち、ここで考察する振動形において ξ 振動では、アーチの頂点たる C 点は面 $\xi\eta$ 内にあるが ξ 軸ま

わりに回転するし、 η 振動では C 点は η 軸上にあるが η 軸まわりに回転し、さらに対称振動では C 点は η 軸上にある。そして ξ 振動では C 点は $\eta\zeta$ 面内にあるが ξ 軸まわりに回転する振動形とする。

(2) 振動数方程式の誘導

a) 応力および慣性力とひずみとの諸関係

断面力の変位 $u(\theta, t), \dots, \varphi(\theta, t)$ による表示は、先きにも考察した⁵⁾と同じように、つぎの式(1.1)~(1.4)のようになる。また慣性力も d'Alembert の原理から式(2.1)~(2.4)のように書き表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{GJ_T}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \dots\dots(1.1) \\ M_y &= -\frac{EI_y}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \varphi \right) \dots\dots(1.2) \\ M_z &= -\frac{EI_z}{R^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots\dots(1.3) \\ N &= \frac{EA}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \dots\dots(1.4) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots(2.1) \\ Y &= -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots\dots(2.2) \\ Z &= -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots(2.3) \\ M_\varphi &= -\frac{\mu I_p}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \dots\dots(2.4) \end{aligned} \right\} (2)$$

ここに、 GJ_T はアーチの x 軸まわりのねじり剛性、 EI_y, EI_z は、アーチの y 軸および z 軸まわりのそれぞれ曲げ剛性、 A は横断面積である。なお I_p はせん断中心に関する断面2次極モーメントである。

b) アーチのつりあい条件式

アーチの微小要素に対して静的なつりあいを考えることとする。すなわちいま X, Y, Z および M_φ を、この微小アーチ部材要素に働く慣性外力とし、さらにまた x

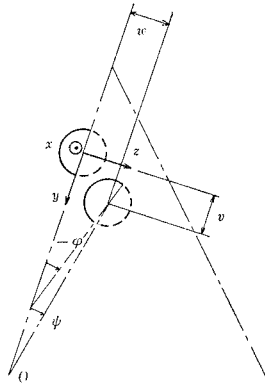


図-4 変位の符号

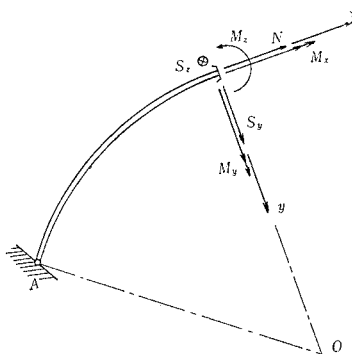


図-5 断面力の符号

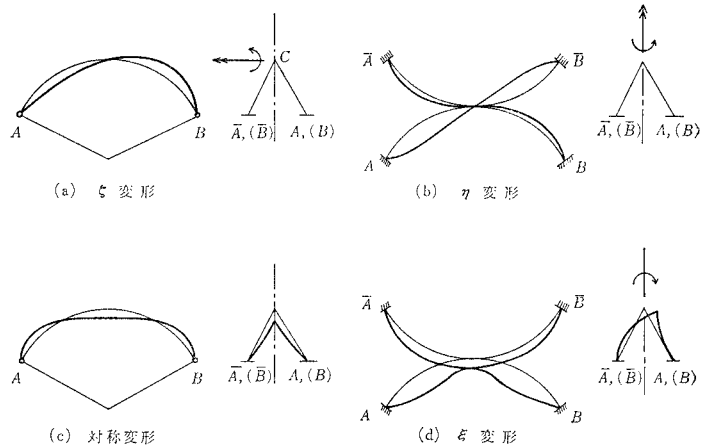


図-6 振動変形状態

軸に平行な分力を F_x , x 軸に関するモーメントの総和を $\Sigma_x \mathfrak{M}$ などとすると, つぎの式 (3.1)~(3.6) が得られる。

$$\Sigma F_x=0; \frac{dN}{d\theta} - S_y + XR=0 \dots\dots\dots(3.1)$$

$$\Sigma F_y=0; \frac{dS_y}{d\theta} + N + YR=0 \dots\dots\dots(3.2)$$

$$\Sigma F_z=0; \frac{dS_z}{d\theta} + ZR=0 \dots\dots\dots(3.3)$$

$$\Sigma_x \mathfrak{M}=0; \frac{dM_x}{d\theta} - M_y + M_\varphi R=0 \dots\dots\dots(3.4)$$

$$\Sigma_y \mathfrak{M}=0; \frac{1}{R} \frac{dM_y}{d\theta} + \frac{M_x}{R} - S_z=0 \dots\dots\dots(3.5)$$

$$\Sigma_z \mathfrak{M}=0; \frac{1}{R} \frac{dM_z}{d\theta} - S_y=0 \dots\dots\dots(3.6)$$

.....(3)

c) 運動方程式およびその解

まず運動方程式はつぎのようにして算定される。式 (1), (2) を考慮して, 式 (3.1), (3.2), (3.6) から動的な変位 $u(\theta, t)$, $v(\theta, t)$ に関するつぎの連立微分方程式 (4.1), (4.2) が得られ, また式 (3.3), (3.4), (3.5) からは, 動的回転角 $\varphi(\theta, t)$ に関する連立微分方程式 (4.3), (4.4) が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - v = \frac{F_2}{F_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{R}{F_2} \right) \dots\dots\dots(4.1)$$

$$\frac{F_2}{F_1} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{R}{F_1} = 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} -F_4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + F_3 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} R^2 = 0 \dots\dots\dots(4.3) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F_3 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + F_4 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \varphi \right) \\ - \frac{\mu I_p}{A} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} R = 0 \dots\dots\dots(4.4) \end{aligned} \right\}$$

.....(4)

ここで,

$$F_1 \equiv \frac{EA}{R}, \quad F_2 \equiv \frac{EI_z}{R^2}, \quad F_3 \equiv \frac{GJ_T}{R}, \quad F_4 \equiv \frac{EI_y}{R}$$

である。

つぎに式 (5) のようにおいてみる。

$$\left. \begin{aligned} u = \bar{u} \cos \omega t, \quad v = \bar{v} \cos \omega t, \\ w = \bar{w} \cos \omega t, \quad \varphi = \bar{\varphi} \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

ここに, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ および $\bar{\varphi}$ は θ のみの関数であり, ω は円振動数である。この式 (5) を式 (4) に代入すれば, この $\cos \omega t$ は消去されて, 式 (4) はつぎの式 (6) のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\theta} - \bar{v} = \frac{F_2}{F_1} \left(\frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} + \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} - \frac{R}{F_2} \mu \omega^2 \bar{v} \right) \dots\dots\dots(6.1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_2}{F_1} \frac{d^2 \bar{v}}{d\theta^2} - \frac{d\bar{v}}{d\theta} + \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \right) \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + \frac{R}{F_1} \mu \omega^2 \bar{u} = 0 \\ \dots\dots\dots(6.2) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -F_4 \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} - \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\theta^2} \right) + F_3 \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\theta^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} \right) \\ + \mu \omega^2 R \bar{w} = 0 \dots\dots\dots(6.3) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F_3 \left(\frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\theta^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} \right) + F_4 \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} - \bar{\varphi} \right) \\ + \frac{\mu I_p}{A} \omega^2 R \bar{\varphi} = 0 \dots\dots\dots(6.4) \end{aligned} \right\}$$

.....(6)

つぎに式 (6.1) と (6.2) から \bar{v} の項を消去すれば, \bar{u} に関する微分方程式 (7.1) が, また式 (6.3) と (6.4) から $\bar{\varphi}$ の項を消去すれば, \bar{w} に関する微分方程式 (7.2) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} + \left(2 + \frac{\mu R^2}{EA} \omega^2 \right) \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} \\ + \left\{ 1 - \omega^2 \left(\frac{\mu R^4}{EI_z} + \frac{\mu R^2}{AE} \right) \right\} \frac{d^2 \bar{u}}{d\theta^2} \\ + \left(\frac{\mu R^4}{EI_z} \omega^2 - \frac{\mu R^4}{EI_z} \frac{\mu R^2}{EA} \omega^4 \right) \bar{u} = 0 \dots\dots\dots(7.1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} + \left(2 + \frac{\mu R^2 I_p}{AGJ_T} \omega^2 \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} \\ + \left\{ 1 - \omega^2 \left(\frac{\mu R^4}{EI_y} + \frac{\mu R^2 I_p}{AEI_y} \right) \right\} \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} \\ + \left(\frac{\mu R^4}{GJ_T} \omega^2 - \frac{\mu R^4}{EI_y} \frac{\mu R^2 I_p}{AGJ_T} \omega^4 \right) \bar{w} = 0 \dots\dots\dots(7.2) \end{aligned} \right\}$$

.....(7)

ここでまた, さらにつぎの式 (8) で示すような無次元パラメーターを定義することにすれば, 式 (7) は式 (9) のように書きかえられることになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\eta} \equiv \frac{\bar{u}}{R}, \quad \bar{\psi} \equiv \frac{\bar{w}}{R} \dots\dots\dots(8.1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} k \equiv \frac{\mu R^4}{EI_z} \omega^2, \quad r \equiv \frac{I_z}{AR^2}, \quad h \equiv \frac{GJ_T}{EI_y}, \\ g \equiv \frac{EI_z}{EI_y} \dots\dots\dots(8.2) \end{aligned} \right\}$$

.....(8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\theta^2} + (2 + rk) \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\theta^2} + (1 - k - rk) \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\theta^2} \\ + (k - rk^2) \bar{\eta} = 0 \dots\dots\dots(9.1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} + \left\{ 2 + \frac{kg}{h} r \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} \\ + \left\{ 1 - kg - kgr \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\} \frac{d^2 \bar{\psi}}{d\theta^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} + \left\{ \frac{kg}{h} - \frac{k^2 g^2}{h} r \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\} \bar{\psi} = 0 \dots\dots\dots(9.2) \end{aligned} \right\}$$

.....(9)

式 (9) の解として, つぎの式 (10) のように考えられる。

式 (9.1) の解:

$$\bar{n} = \sum_{X=1}^{X=3} (H_X \cos n_X \theta + I_X \sin n_X \theta) \dots\dots(10.1)$$

ここで n_X はつぎのような特性方程式の根である。

$$n^6 - (2+rk)n^4 + (1-k-rk)n^2 - (k-rk^2) = 0 \dots\dots\dots(11.1)$$

式(9.2)の解：

$$\bar{\psi} = \sum_{X=1}^{X=3} (J_X \cos \bar{n}_X \theta + K_X \sin \bar{n}_X \theta) \dots\dots(10.2)$$

ここで \bar{n}_X はつぎのような特性方程式の根である。

$$\begin{aligned} \bar{n}_0^6 - \left\{ 2 + \frac{kg}{h} r \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\} \bar{n}^4 \\ + \left\{ 1 - kg - kgr \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\} \bar{n}^2 \\ - \left\{ \frac{kg}{h} - \frac{k^2 g^2}{h} r \left(1 + \frac{1}{g} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots(11.2) \end{aligned}$$

なお、 n_X, \bar{n}_X が虚数をとる場合は、式(10.1), (10.2)は、 $i\nu_X = n_X, i\bar{\nu}_X = \bar{n}_X$ とすれば、 $\sin i\nu_X = i \sinh \nu_X, \cos i\nu_X = \cosh \nu_X$ などにより変形しなければならない。たとえば \bar{n}_2, \bar{n}_3 が虚数をとる場合は、式(10.2)はつぎの式(10.2)' とすべきである。

$$\begin{aligned} \bar{\psi} = J_1 \cos \bar{\nu}_1 \theta + K_1 \sin \bar{\nu}_1 \theta + J_2 \cosh \bar{\nu}_2 \theta \\ + K_2 i \sinh \bar{\nu}_2 \theta + J_3 \cosh \bar{\nu}_3 \theta + K_3 i \sinh \bar{\nu}_3 \theta \\ \dots\dots\dots(10.2)' \end{aligned}$$

つぎに式(11.1), (11.2)の実根存在の判定に対する概算、目安について触れておくことにする。

式(11.1)において n^2 に関する3次方程式の3根が、実根となる判別条件は、いま判別式を Δ とすれば、

$$\Delta = \left\{ \frac{2}{27} \left(1 - \frac{45}{2} k \right) \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{1}{9} (3k+1) \right\}^3 \leq 0$$

から、 $k \geq 17.64$ ならば実根となる。いま $r > 0$ の値をとる場合は $\Delta \leq 0$ を満足する k の値は 17.64 より小さくなる。

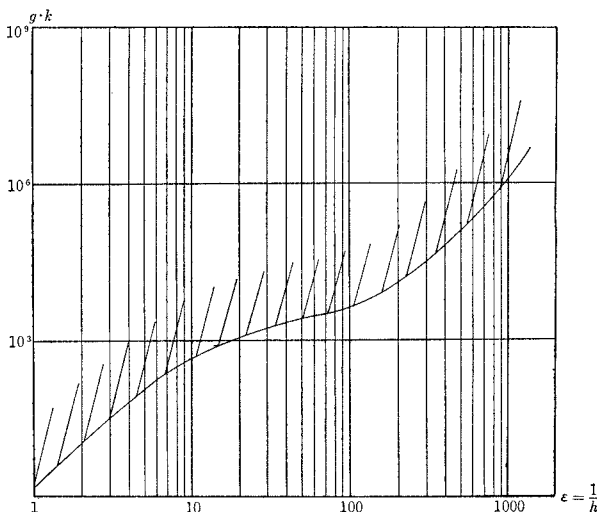


図-7 実根の範囲

つぎに式(11.2)においては3実根をもつ $g \cdot k$ の範囲は、 h と r で規定されるが、いま

$$\delta \equiv \left(\frac{1}{g} + 1 \right) \cdot r = 0$$

とおいて考えてみると、判別式を Δ とすれば、

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \bar{k} \left\{ -27 \bar{k}^2 + \left(\frac{729}{4} \frac{1}{h^2} + 243 \frac{1}{h} + 54 \right) \bar{k} \right. \\ \left. - 27 \frac{1}{h} - 27 \right\} \leq 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{k} \equiv g \cdot k$ 、これを図示したのが図-7で、図の斜線をほどこした範囲に $g \cdot k$ があれば、実根条件は満足されることになる。

また $\delta > 0$ で変化するとき、判別式は

$$\begin{aligned} \Delta_2 = \left(\frac{2}{27} \right)^{27} \left[9 \cdot \delta \cdot \frac{1}{h} \bar{k}^2 + \left(\frac{15}{12} \delta \cdot \frac{1}{h} - 9(\delta+1) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{27}{2} \frac{1}{h} \right) \bar{k} + 1 \right]^2 - \frac{4}{9^3} \left\{ \left(4 \cdot \delta \cdot \frac{1}{h} + 3\delta + 3 \right) \bar{k} + 1 \right\}^3 \end{aligned}$$

となり、図-7の斜線範囲に $g \cdot k$ があれば、十分実根をとることとなる。

以上微分方程式(9)の一般解として、式(10)を考え、その特性方程式(11)の解において結局3次方程式が実根をとる場合についての解を考察してきたが、一般的には、特性方程式である式(11)から導かれた3次方程式は1つの実根と2つの共役複素数根をとることが考えられる。工学的な配慮からすれば、ここで問題としているアーチの振動の場合、式(11.1)についてはかかる考慮を払う必要はないが、式(11.2)の面外振動に関連しては若干の考慮が必要となる場合があり得る。この場合には、つぎのような計算をすればよい。すなわち、いま式(11.2)から導かれた3次方程式の複素数根の1つを $n^2 = a + ib$ とすれば、結局式(10.2)の \bar{n}_X のうちの2つの値は

$$\bar{n} = \rho^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

および

$$\rho^{1/2} \left\{ \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right\} \dots(12)$$

ここで、

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho}$$

となる。

このような式(12)を考慮した一般解式(10.2)を考えていかなければならない。

ただし一般解として以下の考察では、 n^2, \bar{n}^2 は実根をとる場合に、数値計算の簡略の便宜から限定しておくが、まず通常の断面寸法の場合には、不都合が起こることは少ないと考えられよう。

d) 振動数方程式

ここで運動方程式の解、式(10.1), (10.2)に

含まれる積分定数 $H_1, \dots, I_3, J_1, \dots, K_3$ の 12 個は境界条件より決定される。

図-6 に示す 4 つのモードにつき境界条件を列記すれば、つぎの式 (13) のとおりである。ただし、式 (13) において、 $\theta, \bar{\eta} \left(= \frac{\bar{u}}{R} \right), \xi \left(= \frac{\bar{v}}{R} \right), \bar{\psi} \left(= \frac{\bar{w}}{R} \right), \bar{\varphi}$ および各断面力につけた添字 1, 2 は、アーチ $AC(\overline{BC})$ 部分には 1 を、アーチ $CB(C\overline{A})$ 部分には 2 をつけることとする。

なお対称振動の場合はアーチを頂点 C で 2 つに区分して考える必要はなく、たとえば添字 2 の分だけで考えればよい。

まず支点すなわち $\theta_1=0, \theta_2=\alpha$ における条件式は各振動形に共通でつぎのように考えられる。

$$\begin{aligned} \theta_1=0; \bar{\psi}_1=0 \dots\dots\dots(13.1), \quad d\bar{\psi}_1/d\theta_1=0 \dots\dots(13.2), \\ \bar{\varphi}_1=0 \dots\dots\dots(13.3), \quad \xi_1=0 \dots\dots\dots(13.4), \\ d^2\xi_1/d\theta_1^2=0 \dots\dots(13.5), \quad \bar{\eta}_1=0 \dots\dots\dots(13.6) \\ \theta_2=0; \bar{\psi}_2=0 \dots\dots\dots(13.7), \quad d\bar{\psi}_2/d\theta_2=0 \dots\dots(13.8), \\ \bar{\varphi}_2=0 \dots\dots\dots(13.9), \quad \xi_2=0 \dots\dots\dots(13.10), \\ d^2\xi_2/d\theta_2^2=0 \dots\dots(13.11), \quad \bar{\eta}_2=0 \dots\dots(13.12) \end{aligned}$$

なお、支承条件として固定支承を考える場合は、式 (13.5), (13.11) のみをつぎのように変更すればよい。

$$\begin{aligned} (d\xi_1/d\theta_1)_{\theta_1=0}=0 \dots\dots\dots(13.15)' \\ (d\xi_2/d\theta_2)_{\theta_2=\alpha}=0 \dots\dots\dots(13.11)' \end{aligned}$$

つぎに支間中央 C 点における条件式は、つぎのように考えられる。

① ζ 振動の場合

$$\begin{aligned} \theta_1=\alpha; \bar{\psi}_1=0 \dots\dots\dots(13.13\cdot\zeta) \\ \bar{\varphi}_1=0 \dots\dots\dots(13.14\cdot\zeta) \\ \xi_1=0 \dots\dots\dots(13.15\cdot\zeta) \\ \frac{d\xi_1}{d\theta_1} = \cot\phi \frac{d\bar{\psi}_1}{d\theta_1} \dots\dots\dots(13.16\cdot\zeta) \\ \frac{d\bar{\eta}_1}{d\theta_1} = 0 \dots\dots\dots(13.17\cdot\zeta) \\ \theta_2=0; \bar{\psi}_2=0 \dots\dots\dots(13.18\cdot\zeta) \\ \bar{\varphi}_2=0 \dots\dots\dots(13.19\cdot\zeta) \\ \xi_2=0 \dots\dots\dots(13.20\cdot\zeta) \\ \frac{d\xi_2}{d\theta_2} = \cot\phi \frac{d\bar{\psi}_2}{d\theta_2} \dots\dots\dots(13.21\cdot\zeta) \\ \frac{d\bar{\eta}_2}{d\theta_2} = 0 \dots\dots\dots(13.22\cdot\zeta) \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} - \left(\frac{d\xi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots\dots(13.23\cdot\zeta) \\ [\bar{M}_{y1}\tan\phi + \bar{M}_{z1}]_{\theta_1=\alpha} = [\bar{M}_{y2}\tan\phi + \bar{M}_{z2}]_{\theta_2=0} \dots\dots\dots(13.24) \end{aligned}$$

② η 振動の場合

$$\begin{aligned} \theta_1=\alpha; \bar{\varphi}_1=0 \dots\dots\dots(13.13\cdot\eta) \\ \bar{\psi}_1 = \xi_1 \tan\phi \dots\dots\dots(13.14\cdot\eta) \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi_1}{d\theta_1} = -\tan\phi \frac{d\bar{\psi}_1}{d\theta_1} \dots\dots\dots(13.15\cdot\eta)$$

$$\bar{\eta}_1=0 \dots\dots\dots(13.16\cdot\eta)$$

$$\theta_2=0; \bar{\varphi}_2=0 \dots\dots\dots(13.17\cdot\eta)$$

$$\bar{\psi}_2 = \xi_2 \tan\phi \text{ あるいは } (\bar{\psi}_1)_{\theta_1=0} - (\bar{\psi}_2)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots\dots(13.18\cdot\eta)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\theta_2} = -\tan\phi \frac{d\bar{\psi}_2}{d\theta_2} \text{ あるいは}$$

$$\left(\frac{d\bar{\psi}_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} - \left(\frac{d\bar{\psi}_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots(13.19\cdot\eta)$$

$$\bar{\eta}_2=0 \dots\dots\dots(13.20\cdot\eta)$$

さらに

$$(\xi_1)_{\theta_1=\alpha} - (\xi_2)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots\dots(13.21\cdot\eta)$$

$$\left(\frac{d\xi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} - \left(\frac{d\xi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots\dots(13.22\cdot\eta)$$

$$[\bar{M}_{y1} - \bar{M}_{z1}\tan\phi]_{\theta_1=\alpha} + [-\bar{M}_{y2} + \tan\phi \bar{M}_{z2}]_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots(13.23\cdot\eta)$$

$$[\bar{S}_{y1} + \bar{S}_{z1}\tan\phi]_{\theta_1=\alpha} + [-\bar{S}_{y2} - \bar{S}_{z2}\tan\phi]_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots(13.24\cdot\eta)$$

③ 対称振動の場合

$$\begin{aligned} \theta_2=0; d\bar{\psi}_2/d\theta_2=0, \quad \bar{\varphi}_2=0, \quad \bar{\psi}_2 - \tan\phi \xi_2=0, \\ d\xi_2/d\theta_2=0, \quad \bar{\eta}_2=0, \end{aligned}$$

さらに

$$(S_{y2})_{\theta_2=0} + (S_{z2})_{\theta_2=0} \tan\phi = 0$$

④ ξ 振動の場合

$$\theta_1=\alpha; d\xi_1/d\theta_1=0 \dots\dots\dots(13.13\cdot\xi)$$

$$d\bar{\psi}_1/d\theta_1=0 \dots\dots\dots(13.14\cdot\xi)$$

$$\bar{\eta}_1=0 \dots\dots\dots(13.15\cdot\xi)$$

$$\theta_2=0; d\xi_2/d\theta_2=0 \dots\dots\dots(13.16\cdot\xi)$$

$$d\bar{\psi}_2/d\theta_2=0 \dots\dots\dots(13.17\cdot\xi)$$

$$\bar{\eta}_2=0 \dots\dots\dots(13.18\cdot\xi)$$

さらに

$$(\bar{\varphi}_1)_{\theta_1=\alpha} + (\bar{\varphi}_2)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots\dots(13.19\cdot\xi)$$

$$(\xi_1)_{\theta_1=\alpha} = (\bar{\psi}_2)_{\theta_2=0} \sin 2\phi + (\xi_2)_{\theta_2=0} \cos 2\phi \dots\dots\dots(13.20\cdot\xi)$$

$$(\bar{\psi}_1)_{\theta_1=\alpha} = -(\bar{\psi}_2)_{\theta_2=0} \cos 2\phi + (\xi_2)_{\theta_2=0} \sin 2\phi \dots\dots\dots(13.21\cdot\xi)$$

$$\left(\frac{d\bar{\psi}_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} + \left(\frac{d\bar{\psi}_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} = 0 \dots\dots\dots(13.22\cdot\xi)$$

$$\begin{aligned} (\bar{S}_{y1})_{\theta_1=\alpha} - (\bar{S}_{y2})_{\theta_2=0} \\ + \tan\phi \{ (\bar{S}_{z1})_{\theta_1=\alpha} - (\bar{S}_{z2})_{\theta_2=0} \} = 0 \dots\dots\dots(13.23\cdot\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{S}_{z1})_{\theta_1=\alpha} + (\bar{S}_{z2})_{\theta_2=0} \\ - \tan\phi \{ (\bar{S}_{y1})_{\theta_1=\alpha} + (\bar{S}_{y2})_{\theta_2=0} \} = 0 \dots\dots\dots(13.24\cdot\xi) \end{aligned}$$

さて以上の 24 の境界条件 (対称振動の場合は 12 の境界条件) に、式 (10) の $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\psi}_2$ など、〔下記式 (14), (15) など〕 代入すれば 24 元連立 1 次の同次

程式（対称の場合は 12 元連立 1 次の同次方程式）〔式 (16) 参照〕が得られる。結局積分定数が 0 でなくて、かかる式が成立するため、すなわち振動が存在するためには、各積分定数の係数行列式が 0 でなければならぬ。この条件から、固有値 $k \equiv \frac{\mu R^4}{EI_z} \omega^2$ を決めるに必要な条件式が、たとえば式 (16) のように求められる。

さてここでは、かくのごとき固有振動が規定される振動判別式を示すのは、 κ 振動の場合にのみ限ることとする。

なお、ここで一応限定して考えている振動の場合、式 (10.1), (10.2) の根は、一般に $n_1^2 < 0$, $n_2^2 > 0$, $n_3^2 < 0$; $\bar{n}_1^2 \leq 0$, $\bar{n}_2^2 > 0$, $\bar{n}_3^2 < 0$ となるので、たとえば κ 振動の場合の振動判別式 (16) においては、とくにたとえば、 $\bar{n}_1^2 < 0$ のとき、式 (16) のエレメントで 2 つある場合 (a_{ij} と a_{ij}') は a_{ij} を、 $\bar{n}_1^2 > 0$ のときは a_{ij}' をとる。

つぎに、境界条件式 (13) に代入するにも必要な変位、断面力の式を列挙しておくこととする。

変位 $\bar{v} \equiv R \bar{\xi}$, $\bar{\varphi}$ については、それぞれ式 (6.1) と (6.2) より式 (14.1) のように、また式 (6.3) と (6.4) から式 (14.2) のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \beta \left(c_1 \frac{d\bar{\eta}}{d\theta} - c_3 \frac{d^3\bar{\eta}}{d\theta^3} - r \frac{d^5\bar{\eta}}{d\theta^5} \right) \dots\dots\dots(14.1) \\ \bar{\varphi} &= \kappa \left(\frac{d^4\bar{\psi}}{d\theta^4} + e_0 \frac{d^2\bar{\psi}}{d\theta^2} - gk\bar{\psi} \right) \dots\dots\dots(14.2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

断面力のうち \bar{M}_x , \bar{M}_y , \bar{M}_z , \bar{N} は式 (1) からつぎの式 (15.1), (15.2), (15.3), (15.4) のように、また \bar{S}_y は式 (3.6) から、 \bar{S}_z は式 (3.5) からそれぞれ式 (15.5), (15.6) のようになる。

$$\bar{M}_x = \frac{GJ_T}{R} \kappa \left(\frac{d^3\bar{\psi}}{d\theta^3} + e_0 \frac{d^3\bar{\psi}}{d\theta^3} + e_2 \frac{d\bar{\psi}}{d\theta} \right) \dots\dots\dots(15.1)$$

$$\bar{M}_y = \frac{EI_y}{R} \kappa \left(\frac{d^4\bar{\psi}}{d\theta^4} + e_1 \frac{d^2\bar{\psi}}{d\theta^2} - gk\bar{\psi} \right) \dots\dots\dots(15.2)$$

$$\bar{M}_z = -\frac{EI_z}{R} r \left(c_0 \frac{d\bar{\eta}}{d\theta} + c_2 \frac{d^3\bar{\eta}}{d\theta^3} + r \frac{d^5\bar{\eta}}{d\theta^5} \right) \dots\dots\dots(15.3)$$

$$\bar{N} = EA \beta \left[\left(\frac{1}{\beta} - c_1 \right) \frac{d\bar{\eta}}{d\theta} + c_3 \frac{d^3\bar{\eta}}{d\theta^3} + r \frac{d^5\bar{\eta}}{d\theta^5} \right] \dots\dots\dots(15.4)$$

$$\bar{S}_y = -\frac{EI_z}{R^2} r \left(c_0 \frac{d^2\bar{\eta}}{d\theta^2} + c_2 \frac{d^4\bar{\eta}}{d\theta^4} + r \frac{d^6\bar{\eta}}{d\theta^6} \right) \dots\dots\dots(15.5)$$

$$\bar{S}_z = \frac{GJ_T}{R^2} \kappa \left(\frac{d^3\bar{\psi}}{d\theta^3} + e_3 \frac{d^3\bar{\psi}}{d\theta^3} + e_1 \frac{d\bar{\psi}}{d\theta} \right) \dots\dots\dots(15.6)$$

$$\dots\dots\dots(15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{(1-rk)(1+r-r^2k)}, & r &= \frac{1}{1+r-r^2k} \\ c_0 &= 1+r+rk-r^2k, & c_1 &= 1+r-r^2k^2, \\ c_2 &= 1+2r+r^2k, & c_3 &= r(1+2rk), \\ \kappa &= \frac{h}{[1-(1+g)rk](h+1)}, & \varepsilon &= \frac{1}{1-(1+g)rk} \\ e_0 &= 2 + \frac{1}{h} \\ e_1 &= 1 + (1+g)rk + (1+g) \frac{rk}{h} \\ e_2 &= -gk \left(\frac{1+g}{g} r + \frac{1+g}{g} \frac{r}{h} + 1 \right) + 1 + \frac{1}{h} \\ e_3 &= (1+g) \frac{rk}{h} + 2 \\ e_4 &= - \left(1 + \frac{1+g}{g} r \right) gk + 1 \end{aligned}$$

さて、 κ 振動の振動判別式は次頁の式 (16) のようである。

ここで、

$$\begin{aligned} a_{1,13} &= a_{7,16} = 1, & a_{1,14} &= a_{7,17} = 1, & a_{1,15} &= a_{7,18} = 1 \\ a_{2,19} &= a_{8,22} = \bar{v}_1, & a_{2,19}' &= a_{8,22}' = \bar{n}_1, \\ a_{2,20} &= a_{8,23} = \bar{n}_2, & a_{2,21} &= a_{8,24} = \bar{v}_3 \\ a_{3,13} &= a_{9,16} = \bar{b}_1, & a_{3,14} &= a_{9,17} = \bar{b}_2, \\ a_{3,15} &= a_{9,18} = \bar{b}_3 \\ a_{4,7} &= a_{10,10} = \nu_1 \cdot h_1, & a_{4,8} &= a_{10,11} = n_2 \cdot h_2, \\ a_{4,9} &= a_{10,12} = \nu_3 \cdot h_3 \\ a_{5,1} &= a_{11,4} = n_1^2 \cdot h_1, & a_{5,2} &= a_{11,5} = n_2^2 \cdot h_2, \\ a_{5,3} &= a_{11,6} = n_3^2 \cdot h_3 \\ a_{6,1} &= a_{12,4} = 1, & a_{6,2} &= a_{12,5} = 1, & a_{6,3} &= a_{12,6} = 1 \\ a_{13,13} &= a_{18,16} = \cosh \bar{v}_1 \alpha, & a_{13,13}' &= a_{18,16}' = \cos \bar{n}_1 \alpha, \\ a_{13,14} &= a_{18,17} = \cos \bar{n}_2 \alpha, & a_{13,15} &= a_{18,18} = \cosh \bar{v}_3 \alpha, \\ a_{13,19} &= a_{18,22} = \sinh \bar{v}_1 \alpha, & a_{13,19}' &= a_{18,22}' = \sin \bar{n}_1 \alpha, \\ a_{13,20} &= a_{18,23} = \sin \bar{n}_2 \alpha, & a_{13,21} &= a_{18,24} = \sinh \bar{v}_3 \alpha \\ a_{14,13} &= a_{19,16} = \bar{b}_1 \cdot \cosh \bar{v}_1 \alpha, \\ a_{14,13}' &= a_{19,16}' = \bar{b}_1 \cdot \cos \bar{n}_1 \alpha, \\ a_{14,14} &= a_{19,17} = \bar{b}_2 \cdot \cos \bar{n}_2 \alpha, \\ a_{14,15} &= a_{19,18} = \bar{b}_3 \cdot \cosh \bar{v}_3 \alpha \\ a_{15,1} &= a_{20,4} = -\nu_1 \cdot h_1 \cdot \sinh \nu_1 \alpha, \\ a_{15,2} &= a_{20,5} = n_2 \cdot h_2 \cdot \sin n_2 \alpha, \\ a_{15,3} &= a_{20,6} = -\nu_3 \cdot h_3 \cdot \sinh \nu_3 \alpha \\ a_{16,1} &= \beta \cdot n_1^2 \cdot h_1 \cdot \cosh \nu_1 \alpha \cdot \tan \Phi, \\ a_{16,2} &= \beta \cdot n_2^2 \cdot h_2 \cdot \cos n_2 \alpha \cdot \tan \Phi, \\ a_{16,3} &= \beta \cdot n_3^2 \cdot h_3 \cdot \cosh \nu_3 \alpha \cdot \tan \Phi, \\ a_{16,7} &= \beta \cdot n_1^2 \cdot h_1 \cdot \sinh \nu_1 \alpha \cdot \tan \Phi, \\ a_{16,8} &= \beta \cdot n_2^2 \cdot h_2 \cdot \sin n_2 \alpha \cdot \tan \Phi, \\ a_{16,9} &= \beta \cdot n_3^2 \cdot h_3 \cdot \sinh \nu_3 \alpha \cdot \tan \Phi, \\ a_{16,13} &= \bar{v}_1 \cdot \sinh \bar{v}_1 \alpha, & a_{16,13}' &= -\bar{n}_1 \cdot \sin \bar{n}_1 \alpha, \\ a_{16,14} &= -\bar{n}_2 \cdot \sin \bar{n}_2 \alpha, & a_{16,15} &= \bar{v}_3 \cdot \sinh \bar{v}_3 \alpha, \end{aligned}$$

方程式の番号	方程式左辺の係数										判別式														
	H_1	H_2	H_3	H_1'	H_2'	H_3'	H_1	H_2	H_3	$J_1^{i'}$	$J_2^{i'}$	$J_3^{i'}$	J_1^i	J_2^i	J_3^i	K_1	K_2	K_3	$K_1^{i'}$	$K_2^{i'}$	$K_3^{i'}$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{1,13}$	$a_{1,14}$	$a_{1,15}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{2,19}$	$a_{2,20}$	$a_{2,21}$	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{3,13}$	$a_{3,14}$	$a_{3,15}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	$a_{4,7}$	$a_{4,8}$	$a_{4,9}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$a_{6,1}$	$a_{6,2}$	$a_{6,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{7,16}$	$a_{7,17}$	$a_{7,18}$	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{8,22}$	$a_{8,23}$	$a_{8,24}$	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{9,16}$	$a_{9,17}$	$a_{9,18}$	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{10,10}$	$a_{10,11}$	$a_{10,12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	0	$a_{11,4}$	$a_{11,5}$	$a_{11,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	$a_{12,4}$	$a_{12,5}$	$a_{12,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{13,12}$	$a_{13,13}$	$a_{13,14}$	$a_{13,15}$	0	0	0	$a_{13,19}$	$a_{13,20}$	$a_{13,21}$	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{14,13}$	$a_{14,14}$	$a_{14,15}$	0	0	0	$a_{14,19}$	$a_{14,20}$	$a_{14,21}$	0	0	0	0	
15	$a_{15,1}$	$a_{15,2}$	$a_{15,3}$	0	0	0	$a_{15,7}$	$a_{15,8}$	$a_{15,9}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	$a_{16,1}$	$a_{16,2}$	$a_{16,3}$	0	0	0	$a_{16,7}$	$a_{16,8}$	$a_{16,9}$	0	0	$a_{16,13}$	$a_{16,14}$	$a_{16,15}$	0	0	0	$a_{16,19}$	$a_{16,20}$	$a_{16,21}$	0	0	0	0	0
17	$a_{17,1}$	$a_{17,2}$	$a_{17,3}$	0	0	0	$a_{17,7}$	$a_{17,8}$	$a_{17,9}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{18,16}$	$a_{18,17}$	$a_{18,18}$	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{19,13}$	$a_{19,14}$	$a_{19,15}$	0	0	0	$a_{19,19}$	$a_{19,20}$	$a_{19,21}$	0	0	0	0	
20	0	0	0	$a_{20,4}$	$a_{20,5}$	$a_{20,6}$	0	0	0	$a_{20,10}$	$a_{20,11}$	$a_{20,12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{21,13}$	$a_{21,14}$	$a_{21,15}$	$a_{21,16}$	$a_{21,17}$	$a_{21,18}$	$a_{21,19}$	$a_{21,20}$	$a_{21,21}$	$a_{21,22}$	$a_{21,23}$	$a_{21,24}$	0	
22	0	0	0	$a_{22,4}$	$a_{22,5}$	$a_{22,6}$	0	0	0	$a_{22,10}$	$a_{22,11}$	$a_{22,12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	$a_{23,1}$	$a_{23,2}$	$a_{23,3}$	$a_{23,4}$	$a_{23,5}$	$a_{23,6}$	$a_{23,7}$	$a_{23,8}$	$a_{23,9}$	$a_{23,10}$	$a_{23,11}$	$a_{23,12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	$a_{24,1}$	$a_{24,2}$	$a_{24,3}$	$a_{24,4}$	$a_{24,5}$	$a_{24,6}$	$a_{24,7}$	$a_{24,8}$	$a_{24,9}$	$a_{24,10}$	$a_{24,11}$	$a_{24,12}$	$a_{24,13}$	$a_{24,14}$	$a_{24,15}$	$a_{24,16}$	$a_{24,17}$	$a_{24,18}$	$a_{24,19}$	$a_{24,20}$	$a_{24,21}$	$a_{24,22}$	$a_{24,23}$	$a_{24,24}$	

= 0(16)

$$\begin{aligned}
 a_{16,19} &= \bar{\nu}_1 \cdot \cosh \bar{\nu}_1 \alpha, & a_{16,19}' &= \bar{n}_1 \cdot \cos \bar{n}_1 \alpha, \\
 a_{16,20} &= \bar{n}_2 \cdot \cos \bar{n}_2 \alpha, & a_{16,21} &= \bar{\nu}_3 \cdot \cosh \bar{\nu}_3 \alpha \\
 a_{17,1} &= a_{22,4} = \nu_1 \cdot \sinh \nu_1 \alpha, \\
 a_{17,2} &= a_{22,5} = -n_2 \cdot \sin n_2 \alpha, \\
 a_{17,3} &= a_{22,6} = \nu_3 \cdot \sinh \nu_3 \alpha, \\
 a_{17,7} &= a_{22,10} = \nu_1 \cdot \cosh \nu_1 \alpha, \\
 a_{17,8} &= a_{22,11} = n_2 \cdot \cos n_2 \alpha, \\
 a_{17,9} &= a_{22,12} = \nu_3 \cdot \cosh \nu_3 \alpha \\
 a_{21,13} &= a_{21,16} = \bar{\nu}_1 \cdot \sinh \bar{\nu}_1 \alpha, \\
 a_{21,13}' &= a_{21,16}' = -\bar{n}_1 \cdot \sin \bar{n}_1 \alpha, \\
 a_{21,14} &= a_{21,17} = -\bar{n}_2 \cdot \sin \bar{n}_2 \alpha, \\
 a_{21,15} &= a_{21,18} = \bar{n}_3 \cdot \sinh \bar{n}_3 \alpha, \\
 a_{21,19} &= a_{21,22} = \bar{n}_1 \cdot \cosh \bar{n}_1 \alpha, \\
 a_{21,19}' &= a_{21,22}' = \bar{n}_1 \cdot \cos \bar{n}_1 \alpha, \\
 a_{21,20} &= a_{21,23} = \bar{n}_2 \cdot \cos \bar{n}_2 \alpha, \\
 a_{21,21} &= a_{21,24} = \bar{\nu}_3 \cdot \cosh \bar{\nu}_3 \alpha \\
 a_{23,1} &= -a_{23,4} = n_1^2 \cdot h_1 \cdot \cosh \nu_1 \alpha, \\
 a_{23,2} &= -a_{23,5} = n_2^2 \cdot h_2 \cdot \cos n_2 \alpha, \\
 a_{23,3} &= -a_{23,6} = n_3^2 \cdot h_3 \cdot \cosh \nu_3 \alpha, \\
 a_{23,7} &= -a_{23,10} = -n_1^2 \cdot h_1 \cdot \sinh \nu_1 \alpha, \\
 a_{23,8} &= -a_{23,11} = n_2^2 \cdot h_2 \cdot \sin n_2 \alpha, \\
 a_{23,9} &= -a_{23,12} = n_3^2 \cdot h_3 \cdot \sinh \nu_3 \alpha \\
 a_{24,1} &= a_{24,4} = -\nu_1 \cdot a_1 \cdot \sinh \nu_1 \alpha, \\
 a_{24,2} &= a_{24,5} = n_2 \cdot a_2 \cdot \sin n_2 \alpha, \\
 a_{24,3} &= a_{24,6} = -\nu_3 \cdot a_3 \cdot \sinh \nu_3 \alpha, \\
 a_{24,7} &= a_{24,10} = -\nu_1 \cdot a_1 \cdot \cosh \nu_1 \alpha, \\
 a_{24,8} &= a_{24,11} = -n_2 \cdot a_2 \cdot \cos n_2 \alpha, \\
 a_{24,9} &= a_{24,12} = -\nu_3 \cdot a_3 \cdot \cosh \nu_3 \alpha, \\
 a_{24,13} &= -a_{24,16} = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_1 \cdot \cosh \bar{\nu}_1 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,13}' &= -a_{24,16}' = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_1 \cdot \cos \bar{n}_1 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,14} &= -a_{24,17} = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_2 \cdot \cos \bar{n}_2 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,15} &= -a_{24,18} = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_3 \cdot \cosh \bar{\nu}_3 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,19} &= -a_{24,22} = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_1 \cdot \sinh \bar{\nu}_1 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,19}' &= -a_{24,22}' = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_1 \cdot \sin \bar{n}_1 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,20} &= -a_{24,23} = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_2 \cdot \sin \bar{n}_2 \alpha \cdot \tan \phi, \\
 a_{24,21} &= -a_{24,24} = \frac{\kappa}{g \cdot \gamma} \cdot \bar{P}_3 \cdot \sinh \bar{\nu}_3 \alpha \cdot \tan \phi
 \end{aligned}$$

なお、ここで

$$\begin{aligned}
 a_i &= c_0 - c_2 \cdot n_i^2 + r \cdot n_i^4, & \bar{a}_i &= c_0 - c_2 \cdot \bar{n}_i^2 + r \cdot \bar{n}_i^4, \\
 b_i &= -g \cdot k - e_0 \cdot n_i^2 + n_i^4, & \bar{b}_i &= -g \cdot k - e_0 \cdot \bar{n}_i^2 + \bar{n}_i^4 \\
 h_i &= c_1 + c_3 \cdot n_i^2 - r \cdot n_i^4, & \bar{h}_i &= c_1 + c_3 \cdot \bar{n}_i^2 - r \cdot \bar{n}_i^4 \\
 d_i &= e_4 - e_3 \cdot n_i^2 + n_i^4 & \bar{d}_i &= e_4 - e_3 \cdot \bar{n}_i^2 + \bar{n}_i^4
 \end{aligned}$$

を表わす。ただし、 $i=1,2,3$

3. 数値計算による固有振動数の検討

2. (2) で述べたように、振動数を表わす無次元化した固有値 $k \equiv \frac{\mu R^4}{EI_z} \omega^2$; あるいは $k' \equiv \frac{\mu l^4}{EI_z} \omega^2$; [$k' = k(2 \sin \alpha)^4$] は $g \equiv \frac{EI_z}{EI_y}$, $r \equiv \frac{I_z}{AR^2}$; あるいは $r' \equiv \frac{I_z}{AZ^2} : \left[r' = \frac{r}{(2 \sin \alpha)^2} \right]$, $h \equiv \frac{GJ_T}{EI_y}$, テーパーのおよび f/l のパラメーター5つに関連がある。ここではと

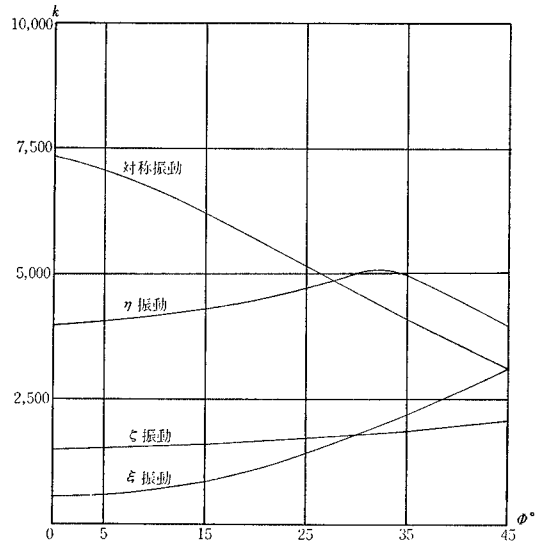


図-8 各種振動形に対応した固有値 k
($g=1, h=0.769, r=7.39 \times 10^{-6}, f/l=1/8$)

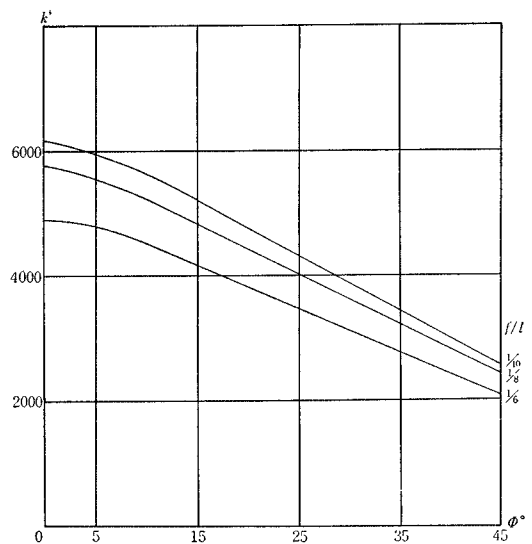


図-9 対称振動
($g=1, h=0.769, r=8.34 \times 10^{-6}$)

くに ϕ の影響に注目し、パイプ構造のアーチをまず考え、その他の場合についても若干考察してみることにする。

1) 図-8 は、パイプ断面の場合 ($g=1, h=2/2.6$) の各種振動形に対応した振動数を示している。ここで問題となるのは、とくに注目すべき振動数の小さい ϵ 振動、 ξ 振動に関していえば、それぞれ ϕ の増加とともに、振動数が増えて構造物がかたくなり確かにテーパ ϕ をつけることの効果を示してはいるが、しかし ξ 値の方が ϵ 値より小さい場合があることである (つぎの 4. の実験の場合の両端固定アーチのときも、 ξ 値が小さい値をとることを示す)。この ξ 振動数が ϵ 振動数より小さい値を示すということは、いわゆる面外振動の方が、面内振動より卓越して起こりやすいことを表わしているであろう。しかし実際の構造では、スラットなどで、2本のアーチを剛に連結しているので、まず面内振動が卓越する、すなわち ϵ 振動を一番考察すればよいと考えられよう。逆にいえば面外振動形、とくに ξ 振動形に対する考慮は当然払った構造にしておかねばならないということであろう。

2) パイプ断面の場合、 r' を一定にとって (たとえばこの場合 $r'=8.34 \times 10^{-6}$)、 $f/l, \phi$ の変化に対応する k' を調べたのが図-9 である。図から対称振動数は、テーパの増加にしたがい、減少することがわかる。いま図-9 に示す k' の値を、たとえば $f/l=1/6$ の場合をとり、外径 50 cm, 肉厚 1 cm の鋼パイプ断面で支間 $l=$

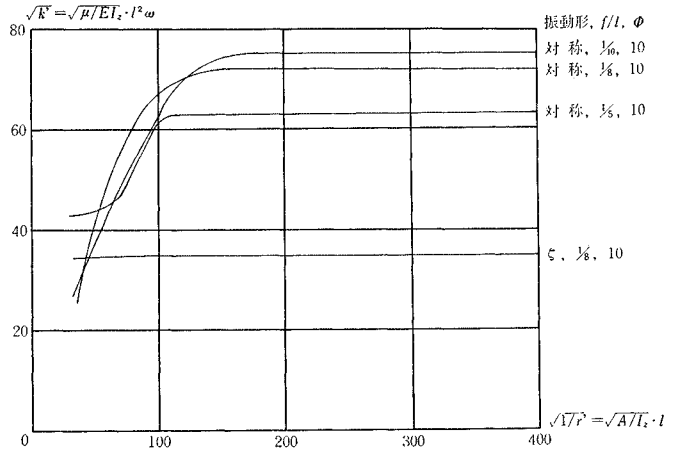


図-10 細長比に対応する振動固有値 ($g=1, h=0.769$)

60 m, $f=10$ m, アーチ半径 $R=50$ m のときに適用してみると、対称振動数 n はつぎの表-1 のようになる。

表-1 対称固有基本振動数

ϕ°	0	10	20	30	45
n (c/sec)	2.92	2.77	2.57	2.34	1.90

3) 図-10 は ϕ を一定にとって (この場合は 10°) (断面パイプ)、細長比に対応する振動固有値を示しているが、図から判断しても、 ϕ がついた場合、対称振動より、まず ϵ 振動数が小さい場合が多いということで、この傾向はたとえば $\phi=0$ の場合とも同じである。なおとくに図は $\sqrt{\frac{1}{r'}}$ の値がおよそ 150 より大きいときは、 $\sqrt{k'}$ の値は一定値をとることを示していることがわかる。

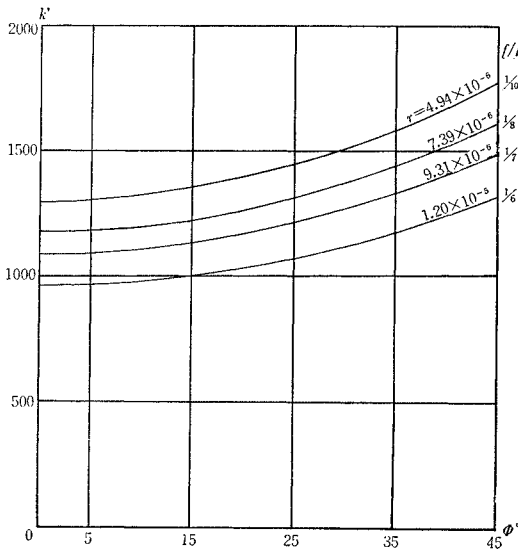


図-11 k' 振動数 ($g=1, h=0.769$)

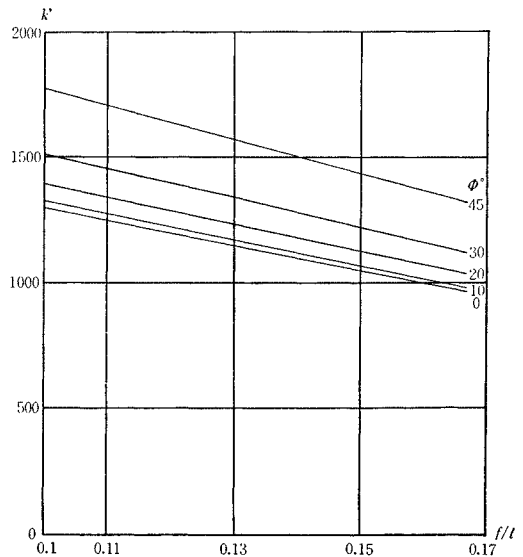


図-12 k' 振動数 ($g=1, h=0.769$)

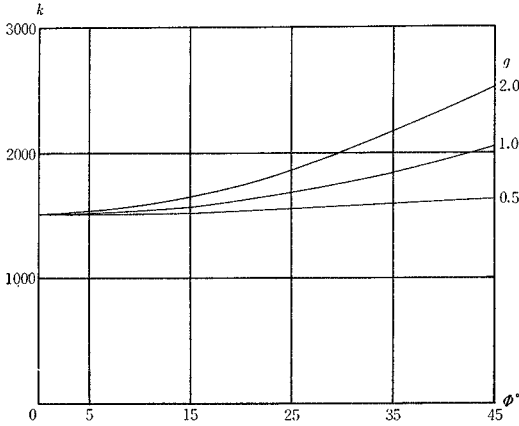


図-13 ζ 振動数
($h=0.769, r=7.388 \times 10^{-6}, f/l=1/8$)

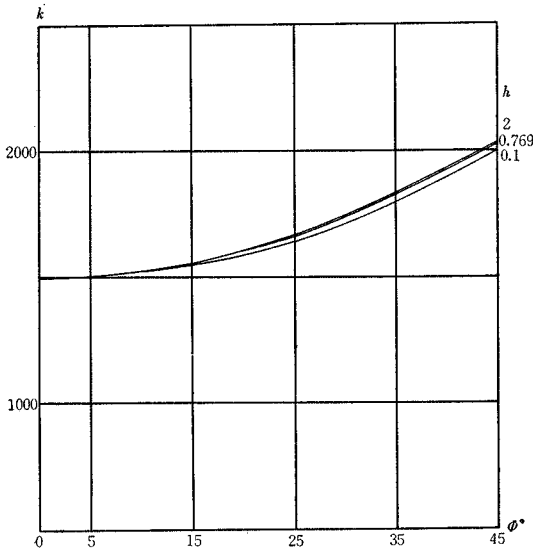


図-14 ζ 振動数
($g=1, r=7.388 \times 10^{-6}, f/l=1/8$)

4) 図-11, 12 は ζ 振動の場合の振動数 k' と ϕ および f/l との関係を示したものである。図からみると、とくに支間を一定にとれば、 f (図-1 参照) の増加は、振動数の減少をもたらすことがわかる。

5) 図-13, 14 は ζ 振動において、振動数 k の変化を ϕ と、さらにとくに図-13 ではパラメーター g の、図-14 ではパラメーター h の変化による影響を考察したものである。

4. 振動の実験的考察

テーパのついたアーチの固有振動について、3. では各種の振動形に対応した解析を試みたが、ここでは模型実験によって測定された振動形や実験値と計算値とを比

較考察している。

(1) 試験体模型の製作

実験の対象としたアーチ6本の各種寸法は、表-2 に示すとおりである。断面は長方形の部材で、支点は固定支承とした。すなわち支点のところでアーチを鋼板に溶接し、この板をあらかじめ固定されているコンクリートブロックにアンカー ボルトにより固定した (写真-1)。

表-2 模型アーチの諸元

供番 試 体号	l (cm)	f (cm)	f/l	断面(長方形)		ϕ (°)	h (cm)	R (cm)	支 点 間 隔 (cm)	2α
				厚 み (cm)	高 さ (cm)					
1	300	37.5	1/8	0.9	10	30	32.5	318.8	37.5	56°10'
2						45	26.5		53.0	
3				15	36.2	19.4	37.5			
4	30	37.5	1/8	1.2	10	30	32.5	312.0	37.5	57°30'
5						45	26.5		53.0	
6				30	26.0	30.0				



写真-1

(2) 測定方法

固有振動数の測定の順序として、まず図-15 に示す測点 1, ..., 6 の6カ所の各断面外側下辺に、電気抵抗線ひずみ計のゲージを接着した。つぎに荷重の載荷方法と

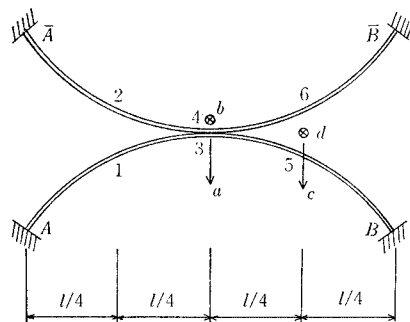


図-15 加振点および測定点の図

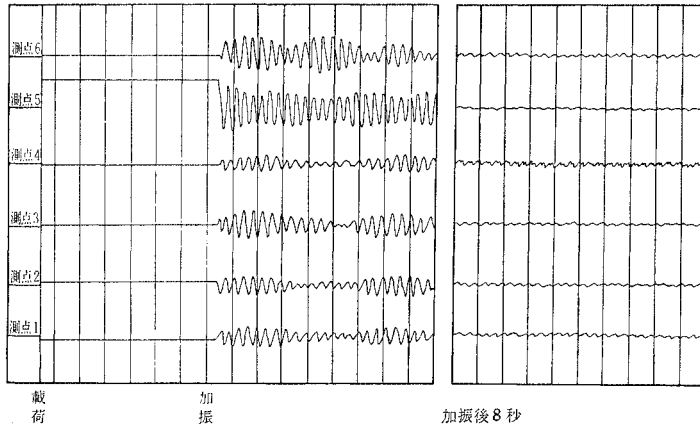


図-16 アーチ振動波形
(供試体 6, 加振点 c) (1目盛: 1/10 sec)

しては、図-15 に示す a, c のように、それぞれアーチ中央点および 1/4 点で水平方向に、b, d では、鉛直方向に荷重を載荷したあと、一挙にその負荷を取り除いた。このようにしてアーチに発生する動ひずみをオシログラフに記録し、その動的応力の週期的変化により、アーチの振動性状を考察した。

(3) 振動形の判定

供試体振動の振動形については、各測定した振動波形より判定した。すなわち、たとえば図-16 に示すような波形より、同時刻において測点 1 と 2

および 5 と 6 がそれぞれ同方向に、さらにお互いには逆方向に移動変位している場合をもって η 振動と判定した。 ζ 対称、 ξ 振動などに対しても、それぞれ同じような考えで振動形を判定した。

(4) 測定回数および考察

測定回数としては、載荷方法 a, b, c, d に対して各 2 回、計 8 回 1 本のアーチに対して原則的に実験をした。同じ載荷方法に対する 2 回の結果および 1 つの載荷測定に対する測点 6 つの示す値は、例として表-3 に示すように、割合一致している値が得られた。ただ測定のうちには、振動形の判定が困難な振動をしている場合も生じた。

測定結果および計算結果を表-4 にまとめてある。

実験の結果よりみて、まず振動形について考察すると、加振方法と発生する振動形との関連は、とくには見つけにくいだが、載荷方法 a では割合 ξ 形の振動が発生するようである。また模型によっては、特定の振動形が生じやすいようで、たとえば、供試体 3 の η 振動(表-3 参照)のごときであるが、総括的にみると、計算値からまずみて、 η, ζ 対称振動の各固有値より、 ξ は小さいが、また各固有値は似かよっているので、実験でも各種の振動形が生じやすいだろうと期待されるうちで、実験では η 振動の発生が多く見られた。

つぎに実験値と計算値とを比較してみると、だいたいにおいて、よく一致した値が得られたと考えられるが、なお誤差の原因としては、実験上から生じたものと推定されるが、その原因として、支点の完全固定度の不備とか、模型製作上避けられない寸法の誤差および実験では計算上の境界条件が完全に再現させることは、むずかしいなどが考えられよう。

表-3 測点の振動数 c/sec および振動形

供試体	加振方法	測定点						振動形	
		1	2	3	4	5	6		
3	a	(1)	24.5	24.5	24.5		24.5	24.5	η
		(2)	24.5	24.5	24.5		24.5	24.5	
	b	(1)	29.0	29.0	29.0	29.0			ζ
		(2)	29.0	29.0	29.0	29.0			
c	(1)	24.5	24.5	24.5		24.5	24.5	η	
	(2)	24.1	24.1	24.1		24.1	24.1		
d	(1)	24.3	24.2	24.2		24.3	24.2	η	
	(2)	24.2	24.3	24.2		24.2	24.2		
6	a	(1)	25.7		25.7		25.5	25.7	ξ
		(2)	25.7		25.7		25.7	25.7	
	b	(1)	29.0	29.0	29.0		29.0	29.5	対称
		(2)	29.0	29.5	29.5		29.0	29.0	
	c	(1)	27.7	27.7	27.7	27.7	27.8	27.8	η
		(2)	27.6	27.6	27.6	27.7	27.5	27.6	
	d	(1)	28.0	28.0	28.0		28.0	28.0	η
		(2)	27.8	27.8	27.5		27.8	27.8	

表-4 振動実験結果および計算値

供試体番号	実験値			計算値 (k)			
	固有値 k	振動数 c/sec	振動形	η 振動	対称振動	ξ 振動	ζ 振動
1	75.0	21.0	ξ	68.0	67.50	67.9	69.3
2	87.1	22.7	η	68.5	66.84	68.5	69.8
3	99.2	24.1	η	110.0	121.7	103.0	121.5
	142.0	29.0	ζ				
4	112.0	25.5	η	119.0	119.8	118.5	122.5
5	114.0	26.0	η	122.0	118.7	121.5	123.5
	118.0	26.4	ξ				
6	254.0	25.7	ξ	258.0	259.7	257.5	258.7
	295.0	27.7	η				
	324.0	29.0	対称				

5. 結語

以上テーパのついているアーチの弾性安定に関する基礎的研究の一つとして、円弧アーチの固有振動を解析し、さらに若干の実験的考察も行なったが、固有振動性状よりみる場合も、テーパの有効性は、テーパ ϕ をつけることにより、固有振動数が、とくに問題とすべき δ 振動にみるごとく大きくなって、アーチをより剛にするという結果より確かめられた。テーパは、座屈の場合の有効でないときがあるのにくらべて、固有振動に対する方がいつそう有効に働くと考えられる。ところで、解析結果からみると、実はテーパのついているアーチの一般的な構造からみて δ 振動より、むしろいわゆる面内振動が卓越する κ 振動を考察すれば、まず一般によいと考えられるが、また面外振動の卓越する δ 振動への配慮も、とくに ϕ の小さいときは一応は必要と考えられよう。

参考文献

- 1) 奥村敏恵・松浦 聖：「テーパのついているアーチの弾

性安定に関する基礎的研究—円弧の面内中心方向等分布荷重が満載した場合の弾性座屈について—, 土木学会論文集第 156 号 (1968).

- 2)-1. 平井 敦：「鋼橋(III)」, 技報堂.
 2. F.W. Waltking：「Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern」 Ingenieur-Archiv, 1934.
 3. 最上武雄：「低拋物線二鉸アーチの振動」, 土木学会誌, 12-1937.
 4. 村上永一：「2 鉸橋の振動に関する理論的算定と実測結果との比較」, 土木試験所報告, 60 号 (1943).
 5. 小坪清真：「円形アーチの振動について」, 第 11 回年次学術講演会, (昭 30-5).
 6. 伊藤 学・深沢泰晴：「円弧アーチの固有振動数」, 第 17 回年次学術講演会, (5-1962).
 7. V.V. Bolotin：「The Dynamic Stability of Elastic Systems」, p. 305, Holden, 1964.
 8. 白石成人・小国俊樹：「円弧アーチリブのねじれ振動に関する基礎的研究」, 関西支部年次学術講演会, 11-1966.
 9. 岡本舜三：「振動学」p 129, オーム社, 1967.
 3) 既出 2)-1.
 4) 既出 1)
 5) 奥村敏恵・松浦 聖：「テーパのついているアーチに関する応力・変形の解析」, 土木学会論文集, 132 号 (1966).

(1967.12.4
1968.6.1・受付)