

変断面長方形板の曲げ、および、振動に対する 有限要素法の応用

A FINITE ELEMENT APPROACH TO THE ANALYSIS OF BENDING AND
VIBRATION OF RECTANGULAR PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

梶田建夫*・成岡昌夫**
By Tateo Kajita and Masao Naruoka

1. ま え が き

変断面長方形板は、板剛度が任意の関数となるので、一般には、変断面板に対するたわみ曲面の微分方程式より直接に解くことはできない。この微分方程式を最初に取り扱ったのは、R.G. Olsson⁷⁾ で、周辺単純支持された正方形板に対し、板剛度と分布荷重が一方向にのみ一次式で変化する場合の計算を行なっている。つぎに、H. Favre⁸⁾ は厚さが線形に変化する場合の問題を近似的に取り扱っている。また、H. Homberg, W. Ropers⁹⁾ は、無限、あるいは、半無限にひろがった帯状の変断面片持板の、たわみ・曲げモーメントの影響面を計算した。このように、ある限られた境界条件、荷重条件などの場合については、正解値あるいは近似値が得られるが、任意の条件を持つ変断面長方形板に対する解を得ることは困難である。

有限要素法では、任意の境界条件、荷重条件、および、断面の変化の状態を、容易に取り扱うことができる。ここでは、有限要素法で変断面板を解析するために、まず、一方向に断面の厚さが線形に変化する場合の剛性マトリックスを誘導した。つぎに、この剛性マトリックスを用いて、等分布荷重を満載する変断面片持板のたわみ・曲げモーメントを計算し、この値と、一定断面と考えた場合の値、断面を階段状断面におきかえた場合の値と比較した。剛性マトリックスの計算には、一般によく用いられている変位関数(文献1))が、要素の境界における変位の連続条件を満足していないので、この連続条件を満足するような変位関数を用いた。

変断面長方形板の動的解析は、航空機の翼について計算されている以外、あまり行なわれていないので、変断面片持板について、曲げの場合と同じ断面変化の状態に

ついて、固有値・固有ベクトルを計算し、比較した。この質量マトリックスには、回転慣性の影響まで含ませることができるようにしたので、回転慣性の影響についても検討した。

2. 変位関数

長方形要素の剛性マトリックスを計算するために、変位がいろいろな関数で仮定されるが、この変位は、要素の境界で連続条件が満足されていなければならない。変位が要素の境界で連続でないと、網目を細かくしても、正しい値に収束する保証はない。文献1)に示された変位関数による剛性マトリックスは、ある程度の近似解を与えているが、境界における連続条件は満足されていない。この変位関数は、つぎのようである。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 + \dots \dots \dots (1)$$

この式に、 $x = \text{const.}$ を代入すると、 w は y の3次式となり、これは $x = \text{const.}$ の境界辺の両端でのたわみ、回転角 ($\partial w / \partial y$) の値により定義される。しかし、回転角 ($\partial w / \partial x$) の式に $x = \text{const.}$ を代入すると、 y の3次式となるが、この3次式を定義する境界辺の両端での値は、回転角 ($\partial w / \partial x$) しかない。このため、 $x = \text{const.}$ なる境界辺では、たわみ、回転角 ($\partial w / \partial y$) は連続となるが、回転角 ($\partial w / \partial x$) は連続とならない。

このような回転角の不連続性をなくするために、変位関数における x, y の次数を最高3次とし、最大の項数をとると、16となる。すなわち、自由度が16となり、一つの節点における未知変位として4個のものがとれるようになる。この未知変位として、たわみ、2つの回転角のほか、ねじり率を考える。

図-1に示す座標において、変位関数はつぎのように示される。

* 学生会員 工修 名大大学院工学研究科 博士課程在学
** 正会員 工博 名大教授工学部 土木工学科

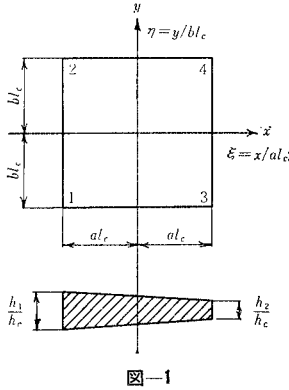


表-1 16・[A⁻¹] の値

4	2	2	1	4	2	-2	-1	4	-2	2	-1	4	-2	-2	1
-6	-2	-3	-1	-6	-2	3	1	6	-2	3	-1	6	-2	-3	1
-6	-3	-2	-1	6	3	-2	-1	-6	3	-2	1	6	-3	-2	1
0	-2	0	-1	0	-2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	-1
9	3	3	1	-9	-3	3	1	-9	3	-3	1	9	-3	-3	1
0	0	-2	-1	0	0	2	1	0	0	-2	1	0	0	2	-1
2	2	1	1	2	2	-1	-1	-2	2	-1	1	-2	2	1	-1
0	3	0	1	0	-3	0	1	0	-3	0	-1	0	3	0	-1
0	0	3	1	0	0	-3	-1	0	0	-3	1	0	0	3	-1
2	1	2	1	-2	-1	2	1	2	-1	2	-1	-2	1	2	-1
-3	-3	-1	-1	3	3	-1	-1	3	-3	1	-1	-3	3	1	-1
0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1
-3	-1	-3	-1	3	1	-3	-1	3	-1	3	-1	-3	1	3	-1
0	0	-1	-1	0	0	1	1	0	0	1	-1	0	0	-1	1
0	-1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	1	0	-1	0	1
1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi^2 \eta^2 + \alpha_{13} \xi \eta^3 + \alpha_{14} \xi^3 \eta^2 + \alpha_{15} \xi^2 \eta^3 + \alpha_{16} \xi^3 \eta^3 \dots (2)$$

ここで、

$$\{r\} = \{w_i, (\partial w / \partial \xi)_i, (\partial w / \partial \eta)_i, (\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta)_i\}_{i=1,2,3,4}$$

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}\}$$

とすると、

$$\{r\} = [A] \{\alpha\} \text{ または } \{\alpha\} = [A^{-1}] \{r\} \dots (3)$$

となる。[A⁻¹] を表-1 に示す。

式(3)を式(2)に代入すると、つぎのような式が得られる。

$$16w = [(\xi+2)(\eta+2), (\xi+1)(\eta+2), (\xi+2)(\eta+1), (\xi+1)(\eta+1)](\xi-1)^2(\eta-1)^2$$

$$[(\xi+2)(\eta-2), (\xi+1)(\eta-2), (\xi+2)(\eta-1), (\xi+1)(\eta-1)](\xi-1)^2(\eta+1)^2$$

$$[(\xi-2)(\eta+2), (\xi-1)(\eta+2), (\xi-2)(\eta+1), (\xi-1)(\eta+1)](\xi+1)^2(\eta-1)^2$$

$$[(\xi-2)(\eta-2), (\xi-1)(\eta-2), (\xi-2)(\eta-1), (\xi-1)(\eta-1)](\xi+1)^2(\eta+1)^2 \{r\} \dots (4)$$

式(4)より (∂w/∂ξ), (∂w/∂η), (∂²w/∂ξ∂η) を計算し、ξ=1 を代入すると、それぞれの値は、

$$\{w_i, (\partial w / \partial \xi)_i, (\partial w / \partial \eta)_i, (\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta)_i\}_{i=3,4}$$

に関する値となる。すなわち、たわみ、回転角、ねじり率は辺3-4ですべて連続となる。H. Hansteen²⁾ は、式(4)を shape function として仮定し、剛性マトリックスを誘導している。

式(1)より求められる剛性マトリックスと、式(2)または(4)より求められる剛性マトリックスを用いた場合の解の収束状況を、一辺の長さ a の等方形正方形板

分 割	周辺単純支持		周辺固定	
	式(1)による	式(2)による	式(1)による	式(2)による
2×2	0.00345	0.00412	0.00148	0.00132
8×8	0.00403	0.00406	0.00130	0.00127
正 解 値	0.00406		0.00126	

に等分布荷重 q が満載される場合の中心点のたわみ (単位 qa⁴/D) について示すと、左下の表のようである。

3. 変断面要素の剛性マトリックス

図-1 に示されているような、ξ 方向に一次式で厚さが増えている要素について、剛性マトリックスを計算する。

直交異方性板の曲げモーメント、ねじりモーメントと曲率、ねじり率との関係は、つぎのように示される。

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left(\frac{h}{h_c} \right)^3 \cdot D_c \times \begin{bmatrix} E_x & \nu_x E_y & 0 \\ \nu_y E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}}{2} \sqrt{E_x \cdot E_y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

あるいは、略して、

$$\{M\} = \left(\frac{h}{h_c} \right)^3 \cdot D_c \cdot [D] \{x'\} \dots (5)$$

ここで、E_x, ν_x, E_y, ν_y は x, y 軸方向のヤング係数、ポアソン比である。

E_x, E_y は無次元数で、D_c = Eh_c³/12(1-ν_xν_y) とし、E に弾性係数の次元をもたせる。h_c は定数で、h は ξ の関数であり、図-1 より、つぎのような式で示される。

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_2 - h_1}{2} \xi$$

表-2 $\frac{1575}{16ab}$ $[k_i]$ における $E_1=E_x/a^4$, $E_2=\nu_x E_y/a^2b^2$, $E_3=E_y/b^4$, $E_4=(1-\sqrt{\nu_x\nu_y})\sqrt{E_x\cdot E_y}/2a^2b^2$ の係数の値
 対角線より上に $[k_1]$, $[k_2]$ を, 下に $[k_3]$, $[k_4]$ を示す。() 内の値は $[k_2]$, $[k_4]$ である。
 対角線上の2つの値は上が $[k_1]$, 下が $[k_3]$ である。

		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	E_1	$\frac{1575}{525}$			(1 575)					525		(525)		
	E_2			1 575			(525)			525		(315)		
5	E_4		$\frac{1575}{525}$			(1 050)			1 575		1 575		(1 050)	1 575
6	E_2	525			(1 575)					525		(525)		
	E_3			$\frac{1575}{525}$			(525)			525		(315)		
7	E_1	(945)			$\frac{4725}{2835}$					(525)		1 575		
	E_2			(945)			1 575			(945)		945		
8	E_1					$\frac{525}{175}$			(525)				315	(315)
	E_2										(525)		525	(315)
	E_4		(630)			$\frac{2100}{1260}$			(1 890)		(1 050)		2 100	(1 890)
9	E_2	(315)			945					(175)		525		
	E_3			(315)			$\frac{525}{315}$			(315)		315		
	E_4						$\frac{2100}{700}$			(1 400)		2 100		
10	E_2				525				(1 575)				945	(945)
	E_3						$\frac{4725}{1575}$				(1 575)		1 575	(945)
11	E_1				(315)				$\frac{1575}{945}$				(315)	945
	E_2							(945)			1 575		(945)	945
	E_4		945			(1 350)			$\frac{2835}{2025}$		1 575		(1 890)	2 835
12	E_1	175			(315)					$\frac{315}{105}$		(315)		
	E_2	315		175	(675)		(105)			$\frac{350}{210}$		(420)		
	E_3			315			(225)			$\frac{315}{225}$		(225)		
	E_4						(840)			$\frac{2800}{1680}$		(2 520)		
13	E_2				(315)				945				(315)	945
	E_3							(945)			$\frac{1575}{945}$		(945)	945
	E_4		525			(630)			945		$\frac{4725}{945}$		(1 890)	4 725
14	E_1	(315)			945					(189)		$\frac{945}{567}$		
	E_2	(225)		(315)	675		315			(300)		$\frac{630}{450}$		
	E_3			(225)			225			(175)		$\frac{225}{175}$		
	E_4						1 260			(1 800)		$\frac{3780}{3700}$		
15	E_1					105			(189)				$\frac{225}{75}$	(225)
	E_2					315		315	(675)		(189)		$\frac{630}{378}$	(756)
	E_3							945			(675)		$\frac{945}{675}$	(675)
	E_4		(630)			1 260			(1 350)		(1 134)		$\frac{3780}{2268}$	(3 402)
16	E_1						(189)		567				(135)	$\frac{675}{405}$
	E_2					(225)		(567)	675		567		(540)	$\frac{1134}{810}$
	E_3							(675)			675		(525)	$\frac{675}{525}$
	E_4		945			(1 350)			2 025		1 701		(2 430)	$\frac{5103}{3645}$

表の使用例

行列 $[k] = \{h_a^3[k_1] + 3h_a^2h_b[k_2] + 3h_a h_b^2[k_3] + h_b^3[k_4]\}$ の要素

$$k(12,7) = \frac{16ab}{1575} \{3h_a^2h_b(525E_1 + 945E_2) + h_b^3(315E_1 + 675E_2)\}$$

$$k(14,9) = \frac{16ab}{1575} \{h_a^3(525E_2 + 315E_3 + 2100E_4) + 3h_a h_b^2(315E_2 + 225E_3 + 1260E_4)\}$$

$$k(16,16) = \frac{16ab}{1575} \{h_a^3(675E_1 + 1134E_2 + 675E_3 + 5103E_4) + 3h_a h_b^2(405E_1 + 810E_2 + 525E_3 + 3645E_4)\}$$

$$\frac{h}{h_c} = \frac{h_1}{h_c} + \frac{h_2}{h_c} + \frac{h_2}{h_c} - \frac{h_1}{h_c} \xi = h_a + h_b \cdot \xi \dots\dots\dots(6)$$

ひずみエネルギーを U とすると、式 (5), (6) より、つぎの式が得られる。

$$U = \frac{1}{2} \iint \{M\}^T \{x'\} dx dy = \frac{D_c}{2 l_c^2} \iint (h_a + h_b \xi)^3 \{x\}^T \{D'\} \{x\} ab d \xi d \eta \dots\dots\dots(7)$$

ここで、

$$\{x\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right\} = [B] \{a\} = [B] [A^{-1}] \{r\} \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここに、 $[B]$ は 3×16 の ξ, η を含む行列である。また、 $[D']$ はつぎのように示される。

$$[D'] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{a^4} & \frac{\nu_x E_y}{a^2 d^2} & 0 \\ \frac{\nu_y E_x}{a^2 b^2} & \frac{E_y}{b^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}}{2} \cdot \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{a^2 b^2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(9)$$

式 (7) を式 (8) で書きなおすと、

$$U = \frac{D_c}{2 l_c^2} \iint (h_a + h_b \xi)^3 \{r\}^T [A^{-1}]^T [B]^T \times [D'] [B] [A^{-1}] \{r\} ab d \xi d \eta$$

となる。 $\{F\}$ を $\{r\}$ に対応する節点力とすると、Castigliano の定理により、

$$\{F\} = \frac{D_c}{l_c^2} \cdot [K] \{r\}$$

となり、剛性マトリックスは、つぎのようになる。

$$[K] = [A^{-1}]^T \{h_a^3 [k_1] + 3 h_a^2 h_b [k_2] + 3 h_a h_b^2 [k_3] + h_b^3 [k_4]\} [A^{-1}] \dots\dots(10)$$

ここで、 $[k_1], [k_2], \dots$ は、つぎの式で計算される。

$$[k_i] = \iint [B]^T [D''] [B] \xi^{i-1} ab d \xi d \eta \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$[k_i]$ を表-2 に示す。

曲げモーメント、ねじりモーメントは、式 (5) より、

$$\{M\} = \left(\frac{h}{h_c}\right)^3 D_c [D''] [B] [A^{-1}] \{r\} \dots\dots\dots(11)$$

となる。ここで、 $[D'']$ はつぎのように示される。

$$[D''] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{a^2} & \frac{\nu_x E_y}{b^2} & 0 \\ \frac{\nu_y E_x}{a^2} & \frac{E_y}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}}{2} \cdot \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{ab} \end{bmatrix}$$

式 (11) をかきなおし、節点 i における式にすると、

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{xyi} \end{bmatrix} = \left(\frac{h_i}{h_c}\right)^3 \cdot \frac{D_c}{l_c^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 E_1 & 0 & -2 E_2 & -6 \xi_i E_1 & -2 \eta_i E_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 E_3 & 0 & -2 E_4 & -6 \xi_i E_3 & -2 \eta_i E_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 E_5 & 0 & 0 & 4 \xi_i E_5 \\ -2 \xi_i E_2 & -6 \eta_i E_2 & -6 \xi_i \eta_i E_1 & -2 \eta_i^2 E_1 & -2 \xi_i^2 E_2 \\ -2 \xi_i E_4 & -6 \eta_i E_4 & -6 \xi_i \eta_i E_3 & -2 \eta_i^2 E_3 & -2 \xi_i^2 E_4 \\ 4 \eta_i E_5 & 0 & 6 \xi_i^2 E_5 & 8 \xi_i \eta_i E_5 \\ -6 \xi_i \eta_i E_2 & -6 \xi_i \eta_i^2 E_1 & -2 \xi_i^3 E_2 \\ -6 \xi_i \eta_i E_4 & -6 \xi_i \eta_i^2 E_3 & -2 \xi_i^3 E_4 \\ 6 \eta_i^2 E_5 & 12 \xi_i^2 \eta_i^2 E_5 \\ -2 \eta_i^3 E_1 & -6 \xi_i \eta_i^2 E_2 & -6 \xi_i \eta_i^3 E_1 & -6 \xi_i^3 \eta_i E_2 \\ -2 \eta_i^3 E_3 & -6 \xi_i \eta_i^2 E_4 & -6 \xi_i \eta_i^3 E_3 & -6 \xi_i^3 \eta_i E_4 \\ 12 \xi_i \eta_i^2 E_5 & 18 \xi_i^2 \eta_i^2 E_5 \end{bmatrix} \times [A^{-1}] \{r\} \dots\dots\dots(12)$$

となる。ここで

$$E_1 = \frac{E_x}{a^2}, E_2 = \frac{\nu_x E_y}{b^2}, E_3 = \frac{\nu_y E_x}{a^2} \\ E_4 = \frac{E_y}{b^2}, E_5 = \frac{1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}}{2} \cdot \frac{\sqrt{E_x \cdot E_y}}{ab}$$

であり、また、 h_i, ξ_i, η_i は節点 i の厚さ、 ξ, η 座標を表わす。

4. 計算例

図-2 に示されるような、一辺が l の等方性正方形片持板が等分布荷重を受ける場合のたわみ、曲げモーメントを計算しよう。厚さが 2:1, 3:1 と変化する場合を取り扱うものとし、変形が中心線に関して対称であるので、下半分について計算すればよい。厚さの変化が 2:1 のときは、 $h_c = 1.5$, 3:1 のときには $h_c = 2.0$ として、実際の厚さを h_c で割った値をデータとして用いる。

分割数は x 方向に 5, y 方向に 8 とした。計算結果を表-3 に示す。

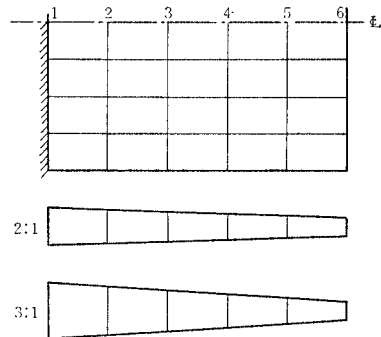


図-2

表-3 等方性正方形片持板が等分布荷重を満載する場合の中心線(対称軸)上のたわみ, 曲げモーメント

項 目		1	2	3	4	5	6
た わ み $\left(\frac{ql^4}{D_c}\right)$	①	0.	0.0092	0.0318	0.0619	0.0956	0.1306
	②	0.	0.0046	0.0169	0.0354	0.0581	(0.1280)
	③	0.	0.0043	0.0163	0.0344	0.0568	0.0812
	④	0.	0.0032	0.0124	0.0273	0.0468	0.0692
曲げモーメント $M_x (ql^2)$	①	0.5284 (0.5275)	0.3236	0.1774	0.0786	0.0201	0.
	②	0.5340	0.3271	0.1794	0.0791	0.0198	0.
	③	0.5418	0.3332	0.1844	0.0831	0.0221	0.
	④	0.5450	0.3353	0.1861	0.0861	0.0232	0.

備考 ① $h=1.5, h=2$ とした等断面板の値 ② 2:1 の断面変化を階段状断面(5段)で計算した値 ③ 2:1 の断面変化を式(10)を用いて計算した値 ④ 3:1 の断面変化を式(10)を用いて計算した値
 () の値は, 文献 3) に示された Point Matching 法による値

5. 質量マトリックス

図-1 に示される要素について, 動的解析に用いられる質量マトリックスを誘導する。これには, 厚さの変化による影響と, 回転慣性による影響を含める^{4),5)}。

まず, 回転慣性を含まない場合の質量マトリックス $[M_a]$ を誘導する。

式(2)をつぎのように表わす。

$$w = \{L\} \{\alpha\} = \{L\} [A^{-1}] \{r\}$$

ここで,

$$\{L\} = \{1, \xi, \eta, \dots, \xi^3 \eta^3\}$$

である。

板要素の単位面積あたりの質量を $r h/g$ (r : 単位体積重量, g : 重力加速度) とすると, $[M_a]$ はつぎのように示される。

$$[M_a] = [A^{-1}]^T \iint \{L\}^T \frac{r h}{g} \{L\} ab l_c^2 d\xi d\eta [A^{-1}] \dots \dots \dots (14)$$

$m_c = r h_c/g$ とすると,

$$[M_a] = m_c l_c^2 [A^{-1}]^T \iint \{L\}^T (h_a + h_b \xi)$$

$$\times \{L\} abd \xi d\eta [A^{-1}]$$

となる。これを, つぎのように, 2つの行列の和とする。

$$[M_{a1}] = \iint \{L\}^T \{L\} abd \xi d\eta$$

$$[M_{a2}] = \iint \{L\}^T \{L\} \xi abd \xi d\eta$$

とすると,

$$[M_a] = m_c l_c^2 [A^{-1}]^T (h_a [M_{a1}] + h_b [M_{a2}]) [A^{-1}] \dots \dots \dots (15)$$

となる。 $[M_{a1}]$, $[M_{a2}]$ を, 表-4 に示す。

つぎに, 回転慣性の項だけによる質量マトリックス $[M_b]$ を誘導する。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [R] \{\alpha\} = [R] [A^{-1}] \{r\} \dots \dots \dots (16)$$

$[R]$ は 2×16 の行列となり, $[M_a]$ と同様に, $[M_b]$ はつぎのように示される。

$$[M_b] = [A^{-1}]^T \iint [R]^T [G] [R] ab l_c^2 d\xi d\eta [A^{-1}] \dots \dots \dots (17)$$

ここに, $[G]$ は回転半径に関する行列で, つぎのように

表-4 $\frac{11}{4 ab} [M_{ai}]$ の値 () 内の値は $[M_{a2}]$ を, その他は $[M_{a1}]$ を示す

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	11 025															
2	(3 675)	3 675														
3			3 675													
4	.3 675	(2 205)		2 205												
5			(1 225)		1 225											
6	3 675	(1 225)		1 225		2 205										
7	(2 205)	2 205		(1 575)		(795)	1 575									
8			1 225	(735)	(735)			735								
9	(1 225)	1 225		(735)	(735)	735			735							
10			2 205	(735)	(735)			735		1 575						
11			(735)	735	735			(525)		(441)	525					
12	1 225	(735)		735	735	735	(525)		(441)		441	441				
13			(735)	735	735			(441)			441		525			
14	(735)	735		(525)	(441)	525			441			(315)		315		
15			735					441		525	(315)		(315)		315	
16		(441)			441			(315)		(315)	315	315			(225)	225

表-5 $\frac{33\ 075}{4ab} [M_{bi}]$ における $G_1 = \frac{h_c^2}{12l_c^2 a^2}$, $G_2 = \frac{h_c^2}{12l_c^2 b^2}$ の係数の値

対角線上より上に $[M_{b1}]$, $[M_{b2}]$, 下に $[M_{b3}]$, $[M_{b4}]$ を示す。() 内の値は $[M_{b2}]$, $[M_{b4}]$ である。
対角線上の2つの値は, 上が $[M_{b1}]$, 下が $[M_{b3}]$ である。

		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	G_1	33 075 11 025		(22 050)			33 075		11 025			(7 350)		11 025		
3	G_2		33 075 11 025		(11 025)			11 025		33 075	(6 615)		(11 025)		11 025	(6 615)
4	G_1	(13 230)		44 100 26 460			(39 690)		(7 350)			14 700		(13 230)		
5	G_1				11 025 3 675			(7 350)			11 025		6 615		(4 410)	6 615
	G_2		(6 615)		11 025 6 615			(6 615)		(11 025)	6 615		11 025		(6 615)	
6	G_2					54 100 14 700			(14 700)			14 700				(8 820)
7	G_1	19 845		(28 350)			59 535 42 525		11 025			(13 230)		19 845		
8	G_1				(4 410)			14 700 8 820			(13 230)		(4 410)		8 840	(7 938)
	G_2		6 615		(4 725)			6 615 4 725		11 025	(4 725)		(6 615)		6 615	(4 725)
9	G_1	3 675		(4 410)			6 615		6 615 4 725			(4 410)		6 615		
	G_2					(8 820)			14 700 8 820			(8 820)		8 820		
10	G_2		11 025		(6 615)			6 615		59 535 19 845	(6 615)		(19 845)		19 845	(11 907)
11	G_1				6 615			(3 150)			19 845 14 175		6 615		(7 938)	11 907
	G_2		(4 725)		4 725			(3 675)		(4 725)	4 725 3 675		6 615		(4 725)	(4 725)
12	G_1	(4 410)		8 820			(3 150)		(2 646)			8 820 5 292		(7 938)		
	G_2					8 820			(6 300)			8 820 6 300		6 300		
13	G_1				4 725			(2 645)			3 969		4 725 1 575		(3 150)	4 725
	G_2		(6 615)		6 615			(4 725)		(11 907)	4 725		19 845 11 907		(11 097)	11 907
14	G_1	6 615		(3 150)			14 175		3 969			(5 770)		11 907 8 505		
	G_2					(6 300)			6 300			(4 900)		6 300 4 900		
15	G_1				(2 646)			5 292			(5 670)		(1 890)		6 300 3 720	(5 670)
	G_2		6 615		(4 725)			4 725		11 907	(3 675)		(8 505)		11 907 8 505	(8 505)
16	G_1				3 969			(5 670)			8 505		2 835		(4 050)	8 505 6 075
	G_2		(4 725)					(3 675)		(8 505)	3 675		8 505		(6 615)	8 505 6 615

注：この表の使用法は，表-3 の使用法と全く同じである。

なる。

$$[G'] [R] abd \xi d \eta [A^{-1}] \dots\dots\dots(18)$$

$$[G] = \frac{h^3 r}{12 l_c^2 g} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$[M_{bi}] = \iint \frac{h_c^2}{12 l_c^2} [R]^T [G'] [R] ab \xi^{i-1} d \xi d \eta, \quad i=1, 2, 3, 4$$

$$= m_c \frac{h_c^2 (h_a + h_b \xi)^3}{12 l_c^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$[M_b] = m_c l_c^2 [A^{-1}]^T (h_a^3 [M_{b1}] + 3 h_a^2 h_b [M_{b2}] + 3 h_a h_b^2 [M_{b3}] + h_b^3 [M_{b4}]) [A^{-1}] \dots\dots\dots(19)$$

ここで，

$$[G'] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

となる。 $[M_{bi}]$ を表-5 に示す。

式 (15) と式 (19) とを加え，質量マトリックスをつぎのように表わす。

とすると，

$$[G] = m_c \cdot \frac{h_c^2 (h_a + h_b \xi)^3}{12 l_c^2} \cdot [G']$$

$$[M] = [A^{-1}]^T (h_a [M_{a1}] + h_b [M_{a2}] + h_a^3 [M_{b1}] + 3 h_a^2 h_b [M_{b2}] + 3 h_a h_b^2 [M_{b3}] + h_b^3 [M_{b4}]) [A^{-1}]$$

となり，これを式 (17) に代入すると，

$$[M_b] = m_c l_c^2 \cdot [A^{-1}]^T \iint \frac{h_c^2}{12 l_c^2} [R]^T (h_a + h_b \xi)^3 \times$$

6. 固有値の計算

構造全体の振動方程式は、つぎのように示される。

$$\frac{D_c}{l_c^2} \cdot [K']\{r'\} + m_c l_c^2 [M']\{\ddot{r}'\} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 $[K']$ 、 $[M']$ 、 $\{r'\}$ は、構造全体についての剛性マトリックス、質量マトリックス、および節点変位を示す。また、 $\{\ddot{r}'\}$ は $\{\partial^2 r' / \partial t^2\}$ を示す。式(20)で円振動数 p の正規振動を考えると、

$$[K']\{r'\} - \frac{m_c l_c^4}{D_c} \cdot p^2 \cdot [M']\{r'\} = 0$$

となる。 $\lambda = m_c l_c^4 p^2 / D_c$ とすると、上式はつぎのようになる。

$$[K']\{r'\} = \lambda \cdot [M']\{r'\} \dots\dots\dots(21)$$

式(21)より、固有値 λ 、固有ベクトル $\{r'\}$ が求められるが、 $[M']^{-1}[K']$ は一般に対称行列とならないため、式(21)より直接、固有値を計算するよりも、つぎのような操作で対称な行列になおして計算した方が有利である⁶⁾。

まず、 $[M']$ を Cholesky の平方根法により、二つの三角形行列に分割する。

$$[M'] = [T][T]^T \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 $[T]$ は下三角形行列である。式(22)を式(21)に代入すると、

$$[K']\{r'\} = \lambda \cdot [T][T]^T\{r'\}$$

となり、これをつぎのように変形する。

$$[T^{-1}][K']\{r'\} = \lambda \cdot [T]^T\{r'\} \dots\dots\dots(23)$$

ここで、

$$\{x\} = [T]^T\{r'\} \dots\dots\dots(24)$$

とし、式(24)の両辺に $[T^{-1}][K']\{r'\} = [V]\{x\}$ をかけると、つぎのようになる。

$$[V]\{x\} = [T^{-1}][K']\{r'\} = \lambda\{x\} \dots\dots\dots(25)$$

式(25)の固有値は式(21)と同じ固有値を与えるから、対称行列 $[V]$ の固有値 λ 、固有ベクトル $\{x\}$ を計算し、 $\{x\}$ は式(24)で $\{r'\}$ に変換すれば、所要の値が得られる。

7. 計算例

4. の計算例と同じように、図-2 に示すような変断面片持板を取り扱う。板全体を 2×2 、 3×3 分割し、等断面、変断面 (2:1 および 3:1) の場合について計算した。固有値の計算においては、必要な固有値が小さい方の値であるので、式(25)の行列 $[V]$ の逆行列 $[V^{-1}]$ について、Jacobi の方法により最初の数項だけを収束させ、その逆数を必要な固有値とした。回転慣性の影響は、板の幅と厚さとの比 (h_c/l_c) の値によって異なる。ここでは、 $h_c/l_c = 0.1$ の場合について計算した。計算結果は表-6 のようである。また、mode を図-3 に示す。

本文で得られた剛性行列 $[K]$ 、質量行列 $[M]$ は、図-1 に示される ξ, η 座標におけるものである。実際の計算においては、つぎのような行列で、 x, y 座標に変換して用いる。

$$[S] = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a l_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b l_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a b l_c^2 \end{bmatrix}$$

表-6 $\sqrt{m_c l_c^4 p^2 / D_c}$ の値

mode		mode 1			mode 2			mode 3		
有限要素法	分割数	2x2		3x3	2x2		3x3	2x2		3x3
	h_c/l_c	0	0.1	0	0	0.1	0	0	0.1	0
	等断面	3.49	3.48	3.48	8.57	8.52	8.53	21.48	21.16	21.37
	変断面 (2:1)	5.04	5.03	5.03	9.96	9.91	9.93	23.47	23.18	23.29
変断面 (3:1)	5.97	5.95	5.96	10.65	10.60	10.62	23.85	23.57	23.67	
等断面 (エネルギー法)		3.49			8.55			21.44		

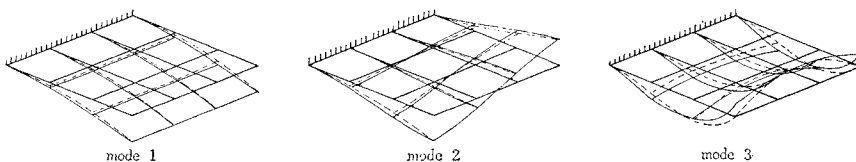


図-3 振動モード (破線は 2:1 の変断面)

8. む す び

有限要素法を用いて、変断面板の曲げ、および、振動の解析をするために、剛性マトリックス、質量マトリックスを誘導し、2, 3 の断面形状をもつ正方形片持板について計算を行なった。曲げの計算では、等分布荷重満載の場合を計算したが、変断面板を一定断面板とみなして計算した場合と、変断面板として忠実に計算した場合とでは、たわみはかなり異なったが、曲げモーメントはあまり変わらなかった。なお、一定断面板の結果は、文献 3) の値とよく一致した。また、変断面板を階段状の断面におきかえて計算すると、曲げモーメントは変断面に忠実に計算した場合にくらべて、一般に小さい値が得られるが、差はあまり大きくない。この差は、集中荷重が作用する場合、断面変化が一様でない場合、また、分割があらわい場合には、一般に大きくなる。

固有振動数の計算では、分割があらわい場合だけについて計算したが、かなりよい近似解が得られた。回転慣性の影響は、この計算例のみからすると、あまりないと考えられる。

以上の計算例より、ここで誘導された剛性マトリックス、質量マトリックスはよい近似解を与えるものであることがわかる。

なお、これらの計算は、すべて、東大大型計算センターの HITAC 5020 E によった。

参 考 文 献

- a) 有限要素法に関する文献
- 1) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw Hill, 1967.
 - 2) H. Hansteen : Finite Element Displacement Analysis of Plate Bending Based on Rectangular Elements, International Symposium, The Use of Electronics Digital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle upon Tyne, 1966, Working Session 4, Paper No. 14.
 - 3) A.W. Leissa and F.E. Niedenfuhr : A Study of the Cantilevered Square Plate Subjected to a Uniform Loading, J. Aero. Sci., Vol. 29, p. 162, 1962.
 - 4) J.S. Przemieniecki : Equivalent Mass Matrices for Rectangular Plates in Bending, J.A.I.A.A., Vol. 4, p. 949, 1966.
 - 5) K.K. Kapur : Prediction of Plate Vibration Using a Consistent Mass Matrix, J.A.I.A.A., Vol. 4, p. 565, 1966.
 - 6) M. Flower, R.T. Severn and P.R. Taylor : Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells Using the Finite Element Method; 2と同じ, Paper No. 11.
- b) 変断面板に関する文献
- 7) R.G. Olsson : Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Biegesteifigkeit, Ingr. Arch., Bd. 5, S. 363. 1934.
 - 8) H. Favre, B. Gilg : La plaque rectangulaire fléchie dépaissur linéairment variable. Zeitschrift für angew. Math. u. Physik, Vol. 3, Fasc. 5, p. 354, 1952.
 - 9) H. Homberg und W. Ropers : Fahrbahnplatten mit Veränderlicher Dicke, Springer, 1965.
H. Homberg und W. Ropers : Kragplatten Veränderlicher Dicke, B. u. St., Bd. 58, S. 67, 1963.
- (1968.4.27・受付)