

段波の変形に関する研究*

TRANSFORMATION OF SURGES

室田 明**・岩田好一朗***

By Akira Murota and Kōichiro Iwata

要 旨 不安定な理想段波はその進行につれ分散し、分散波列を形成し波状段波となりその分散素波は終局的には Keulegan-Patterson¹⁾ が指摘したようにクノイド波などの保存波に移行する。

本文は安定状態に至るまでの遷移過程における段波変形の水理学的特性、すなわち段波分散機構、遷移形態の分類、遷移波形、波高・波長の変化、分散第1波の碎波機構などについて理論的および(水理模型実験および数値実験により)実験的に考察を加えたものである。

その結果、段波の分散変形は波面曲率が伝達項として作用するため発生するものであり、生成分散波の波高は遷移過程においては Keulegan-Patterson, あるいは Thirriot-Bednarczyk²⁾ が指摘したような一定の値とはならず、ある変動範囲をもつこと、さらに遷移形態としては碎波しない場合と spilling 型, surging 型, plunging 型の碎波をする4つの形態があり、これらは段波相対波高だけで明確に分類されることが水理模型実験によって確認され、このうち surging 型, plunging 型碎波には段波波先ののり面勾配が重要な影響要因であることなどが理論的に明らかにされた。

なお分散機構に波面曲率が重要な役割りを果たすものとして基本式を整理して、それによって行なった数値実験によって分散発達の様相が十分実態を説明しうるものであることが確認された。

1. 緒 言

流量の急激な増加による正の段波 (positive surge) は衝撃性の不連続波面をもつ波であるが、津波あるいは高潮の沿岸部での挙動、とくに河川を遡上するそれらの波動がときに段波状をなすこともありうるので、段波の諸特性を基礎的に解明することは防災工学上も重要な課題である。

段波が不連続な階段状波面をもつ理想段波としてなんら変形することなく伝播するものならば、解析的取り扱いにはなほだ簡単明瞭であり Rayleigh³⁾, Lamb⁴⁾ の古

典理論を用いればたりる。しかし実際は不安定モーメントが無限大である理想段波はその進行にともない、かならず分散し非線型分散波列からなる波状段波に移行するのであるから、この変形の過程と機構を明確にすることが基本的に重要であるにもかかわらず、その遷移過程が複雑多岐にわたるため解析的取り扱いがきわめて困難であった。

段波の変形を定量的に把握しようとする試みは、周知のとおりすでに 1865 年 Bazin⁵⁾ により始められた。Bazin は段波がその進行につれて分散し、分散波列を形成すること、また分散第1波の波高が段波波高の1.5倍になることを実験的に示した。

Boussinesq⁶⁾ はこの分散第1波の発生機構を波頂曲率を考慮する有限振幅長波理論にもとづき、波面曲率が伝達項として作用するためであることを示唆した。

Favre⁷⁾ は遷移波に関する詳細な一連の実験の中で段波の変形に関する実験を行ない、分散波列の形成にはある緩和時間が必要とされ、この分散波は終局的には保存波に移行することを認めた。

Keulegan-Patterson は Bazin の実験結果を再整理して、段波相対波高 h_0/H_0 (h_0 : 段波波高, H_0 : 静水深) が 0.275 より大きい場合は第1波は碎波し、第1波の相対波高 η_1/H_0 (η_1 : 第1波の波高) は段波相対波高の増加につれて減少すること、段波相対波高が 0.275 より小さい場合は第1波は安定で碎波せず、第1波の安定限界波高として段波波高の 3/2 倍の値をとることを理論的に示した。また Favre の実験値から分散波の波速に注目し、これがクノイド波の波速によく一致することから、分散波は終局的にクノイド波になると結論した。

Lemoine⁸⁾ は古典理論で見積っているエネルギー逸散量は、段波相対波高 $h_0/H_0 < 0.275$ 程度の弱い段波の場合は波先部に擾乱域をもたないため、段波背後に形成される波のエネルギーに等価であると考え、分散波を微小振幅正弦波と仮定して、分散波の波高・波長を求めた。

しかしこの Lemoine の理論解は Favre の実験値と比較すると、波高に関して 25% の大きな相違があったので、Benjamin-Lighthill⁹⁾ は分散波を微小振幅正弦波と考えた点に問題があると¹⁾、有限振幅クノイド波理

* 一部第 10 回海岸工学国際会議 (1966) で発表

** 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 大阪大学助手 工学部土木工学教室

論によって、弱い段波の波先部で mass flux, momentum flux, energy flux がある場合のみクノイド波が形成されることを示し、Lemoine の考えを否定した。しかし逆に Sandover-Zienkiewicz¹⁰⁾, Sandover-Taylor¹¹⁾ は分散波の最高波高は Lemoine の理論解によく一致すると主張した。また遷移過程では波状段波は砕波しない undular surge, 砕波する breaking surge, steep fronted surge の三つの型に分類されることを観察した。

Sturtevant¹²⁾ は Benjamine-Lighthill のクノイド波理論を用いて Favre の実験結果に考察を加え、分散波が形成されるためには Benjamine-Lighthill が指摘したような波先部の擾乱よりむしろ底面の境界層内でエネルギーが逸散されなければならないことを示した。

Thirriot-Bednarczyk, Chester¹³⁾ らは Sturtevant と同じ立場をとり、Thirriot-Bednarczyk は波高、波長などを理論的に求め、分散波の安定限界波高として Keulegan-Patterson の値とは異なる $\eta_1/H=2.0$ を与えた。また Chester は分散波が発生しない限界として、Binnie-Orkney¹⁴⁾ が跳水の実験で求めたフルード数 $F=1.55$ にきわめて近い $F=1.60$ を理論的に求めた。

近年 Peregrine¹⁵⁾ は著者らと同じ問題を取り扱い、水粒子の鉛直加速度差により生ずる水平方向圧力勾配により分散波が発生するとの物理的説明を与え、Korteweg-de Vries¹⁶⁾ の式を差分式に直し数値計算により段波変形の状況を示した。しかしこれによれば波がまだ伝播していない波先静水面にも波が発生することになり分散機構に関するその説明は不合理といわなければならない。

このように従来多くの実験的、理論的研究がなされ、数多くの成果が得られてきているが、分散機構に関しては統一の見解がないこと、遷移過程での砕波機構にいたってはほとんど未解決であることなど、解明すべき多くの問題点があって高い精度の実験的研究、あるいは近似度の高い理論的研究が必要とされているのが現状である。

著者らは遷移過程における段波の変形、とくに砕波をとまなう分散波の挙動に注目し、まず段波の分散変形機構、分散波の波高分布および砕波機構を理論的に考察し、つぎに水理模型実験を行ない遷移過程での分散波の挙動を詳細に観察し理論解析で得られた結果の検証を行なう。最後に数値実験より遷移過程での分散波の波形を求め、水理模型実験で得た観測波形と対比して、段波変形過程にどのように波面曲率が重要な寄与をするかを検討した。

2. 段波の変形に関する理論的研究

(1) 分散機構

のちに水理模型実験の項で示すように分散波の伝播速

度はほとんど段波の伝播速度にひとしいことが実験的に確認されている。この実験事実にもとづき以下の解析を行なう。

分散波を波頂曲率を考慮すべき有限振幅長波であると見なせば、その伝播速度は Boussinesq によればつぎのようである。

$$C = \sqrt{gH_0} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta}{H_0} \right) + \frac{H_0^2}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right\}^{1/2} \dots (1)$$

一方、長方形断面水路における段波の伝播速度 C_s は

$$C_s = \sqrt{gH_0} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{h_0}{H_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{H_0} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots (2)$$

で与えられる。ただし、 H_0 : 静水深、 h_0 : 段波波高、 η : 分散波の静水面からの高さ、 g : 重力加速度、 x : 水平方向の距離である。

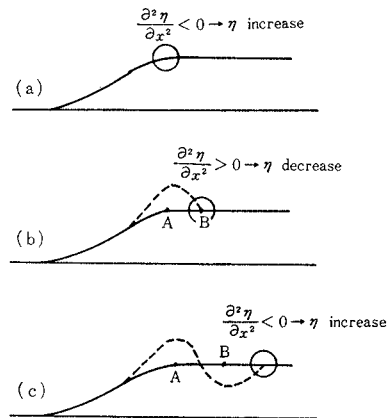
前述の知見から式 (1) と式 (2) を等置すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left(\frac{\eta}{H_0} \right) + \frac{H_0^2}{3\eta} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \\ = \frac{3}{2} \left(\frac{h_0}{H_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{H_0} \right)^2 (\equiv \text{const.}) \\ \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

式 (3) の右辺は η に関係せず、したがって分散波の相対波高の項と曲率項との和が保存されることになる。

式 (3) を満たしながら段波の分散が行なわれるので、図一 (a) に示す段波の肩 A 点では $(\partial^2 \eta / \partial x^2)_A < 0$ であり、式 (3) より $(\partial^2 \eta / \partial x^2)_A < 0$ の効果を打ち消すため正の η が現われ、ついで盛り上り部分と段波背面との接合部 B では $(\partial^2 \eta / \partial x^2)_B > 0$ であるから式 (3) より $(\partial^2 \eta / \partial x^2)_B > 0$ を消すため η が減少し $\eta < h_0$ となり (c) に点線で示す状態となる。この過程のくり返しにより、要するに曲率項が伝達項として作用し段波の分散が行なわれるものと考える。

図一 分散機構の説明図



(2) 分散波の遷移過程

式 (3) を変形すると

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\eta h_0}{H_0^3} \left\{ 3 \left(1 - \frac{\eta}{h_0} \right) + \frac{h_0}{H_0} \right\} \dots\dots(4)$$

となり、分散波の波頂では

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{\text{crest}} < 0 \text{ または } \frac{\eta_{\text{crest}}}{h_0} > 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h_0}{H_0} \right) \dots\dots(5)$$

波谷では

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{\text{trough}} > 0 \text{ または } \frac{\eta_{\text{trough}}}{h_0} < 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h_0}{H_0} \right) \dots\dots(6)$$

となる。式 (5), 式 (6) はおのおの分散波の峰と谷の存在範囲を与えるもので、遷移過程では Keulegan-Patterson あるいは Thirriot-Bednarczyk が指摘したような $\eta_1/h_0=3/2$ あるいは $\eta_1/h_0=2$ のとき一定の値とはならない。

つぎに Broer¹⁷⁾ の理論を若干変形し、遷移過程での分散波の波動式を導く。

波頂曲率を考慮した有限振幅長波理論で Laplace の方程式を満たすポテンシャルに対し、自由表面での dynamic condition, kinematic condition はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \eta - \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial x^2 \partial t} = 0 \dots\dots(7) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} - \left[\eta \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right] + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \phi_0}{\partial x^4} = 0 \dots\dots(8) \end{aligned}$$

ただし、 x, t, η, ϕ_0 は $x=x^*/H_0, t=t^*/\sqrt{H_0 g}, \eta=\eta^*/H_0, \phi_0=\phi_0^*/\sqrt{g H_0} \cdot H_0, H_0$: 静水深で無次元化された水平距離、時間、静水面からの波の高さ、水底でのポテンシャルを示す。式 (7), 式 (8) を x の正方向にのみ移動する条件のもとで解くが、所要の解は非線型項と分散項が同程度に影響するため、まず分散項を非線型項に比して小さいと考えて第 1 近似式を求めるとつぎのごとくである。

$$\left. \begin{aligned} \eta = U \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)$$

この第 1 近似式 (9) を式 (7), 式 (8) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) \dots\dots(10) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\eta u) + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \dots\dots(11) \end{aligned}$$

式 (9), 式 (10), 式 (11) より第 2 近似式として次式を得る。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial t} = 0 \dots\dots(12)$$

この式が x の正方向のみに移動する分散波の波動式であり、後の数値計算の基本式とする。

(3) 碎波機構

碎波形式ごとにそれぞれに対応する碎波機構があると考えるべきであるが、surging 型, plunging 型碎波は波先の立ち上りが急激であることから、波先の不安定性を解析することにより碎波機構が解明されるものと期待される。ここでは Stoker¹⁸⁾ の方法を拡張して考察を加える。

$$\text{運動式 } 2C \cdot C_X + U_t + U \cdot U_X - g(S - S_f) = 0 \quad (13)$$

$$\text{連続式 } C \cdot U_X + 2U \cdot U_X + 2C_t = 0 \dots\dots(14)$$

ただし、 $C = \sqrt{gH}, S_f = n^2 U \cdot |U|/R^{4/3}, H$ は水底からの水位である。

平均流速を X 方向に U_0 とし、 $\xi = X, \tau = (U_0 + C_0)t - X, C_0 = \sqrt{gH_0}$ とおき、さらに U および C を τ についで

$$\left. \begin{aligned} U = U_0 + U_1(\xi)\tau + U_2(\xi)\tau^2 + U_3(\xi)\tau^3 + \dots\dots \\ C = C_0 + C_1(\xi)\tau + C_2(\xi)\tau^2 + C_3(\xi)\tau^3 + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

のように展開し、これらを式 (13), 式 (14) に代入して τ^2 の項までとって整理すると

$$\begin{aligned} C_0(U_1 - 2C_1) + \left\{ 2C_0 \left(\frac{dC_1}{d\xi} - 2C_2 \right) - 2C_1^2 \right. \\ \left. + U_0 \cdot \frac{dU_1}{d\xi} - U_1^2 + 2C_0 \cdot U_2 \right\} \tau \\ + \left\{ 2C_0 \frac{dC_0}{d\xi} + 2C_1 \frac{dC_1}{d\xi} - 4C_2C_1 + U_0 \frac{dU_2}{d\xi} \right. \\ \left. + U_1 \cdot \frac{dU_1}{d\xi} - 3U_2U_1 - 6C_0C_3 - 3U_0U_3 \right. \\ \left. + 3(U_0 + C_0)U_3 \right\} \tau^2 - g(S - S_f) = 0 \dots\dots(16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0(-U_1 + 2C_1) + \left\{ 2U_0 \cdot \frac{dC_1}{d\xi} - 3U_1C_1 \right. \\ \left. + C_0 \left(\frac{dU_1}{d\xi} - 2U_2 \right) + 4C_0C_2 \right\} \tau \\ + \left\{ 2U_0 \frac{dC_2}{d\xi} + 2U_1 \frac{dC_2}{d\xi} - 5U_1C_2 - 4U_2C_1 \right. \\ \left. + C_0 \frac{dU_2}{d\xi} - 6U_0C_3 + C_1 \frac{dU_1}{d\xi} - 3U_0C_3 \right. \\ \left. + 6(U_0 + C_0)C_3 - 3C_0U_3 \right\} \tau^2 = 0 \dots\dots(17) \end{aligned}$$

式 (16), 式 (17) が τ の値いかにかわらず成立することから、 τ の 0 次の項, τ の一次の項の係数 (τ^2 の項を省略して) を 0 と等置し変形すると次式を得る。

$$(U_0 + C_0) \frac{dC_1}{d\xi} - 3C_1^2 + C_1 g S \left(\frac{1}{U_0} - \frac{2}{3kC_0} \right) = 0 \dots\dots(18)$$

ただし、長方形水路では

$$S = n^2 \cdot g^{1/3} \cdot U_0^2 \cdot \left\{ \frac{1}{C^2} + \frac{2}{gB} \right\}^{1/3}, B: \text{水路幅}$$

である。式 (18) を

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \tau} \right)_{\xi=0} = g \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \right)_{\xi=0} / \sqrt{2gH(0,0)} = C_1(0)$$

なる条件のもとで解くとつぎの解を得る。

$$C_1(\xi) = 1 / \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ke^{\beta\xi} \right) \dots\dots\dots(19)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{3}{(U_0 + C_0)}, \quad \beta = gS \left(\frac{1}{U_0} - \frac{2}{3kC_0} \right) / (U_0 + C_0) \dots\dots\dots(20)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 3/gS \left(\frac{1}{U_0} - \frac{2}{3kC_0} \right),$$

$$K = \left\{ \frac{2C_0}{g} / \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \right)_{\xi=0} \right\} - \frac{\alpha}{\beta}$$

波面と擾乱のおよんでいない水面とのなす角を θ (図—2 参照) とすれば、

$$\tan \theta = \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \right)_{\xi=0} = 2C_0 C_1(\xi) / g$$

したがって

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{2C_0}{g} \cdot \frac{1}{\{1 + (2C_0 C_1(\xi)/g)\}} \cdot \frac{K\beta}{\{(\alpha/\beta) + Ke^{\beta\xi}\}^2} e^{\beta\xi} \dots\dots\dots(21)$$

ただし

$$K\beta = \frac{1}{U_0 + C_0} \left\{ 2C_0 \frac{S}{(\partial H/\partial \tau)_{\xi=0}} \left(\frac{1}{U_0} - \frac{2}{3kC_0} \right) - 3 \right\}$$

したがって式 (21) より

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \right)_{\xi=0} > \frac{2}{3} C_0 S \left(\frac{1}{U_0} - \frac{2}{3kC_0} \right) \dots\dots\dots(22)$$

の場合 $d\theta/d\xi > 0$ となり波先の立ち上がりが見られ、逆の場合には波先波面勾配の減少が見られることになる。

つぎに $S=0$ (水平床水路), $U_0=0$ (静水上の伝播) の特別の場合を考えると、式 (18) より

$$C_0 \frac{dC_1}{d\xi} - 3C_1^2 = 0 \dots\dots\dots(23)$$

$C_1(0) = g(\partial H/\partial \tau)_{\xi=0} / 2C_0$ の条件のもとで解くと

$$C_1(\xi) = -1 / \left(\frac{3}{C_0} \xi + K' \right)$$

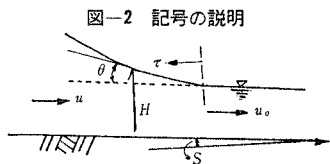
$$K' = -\frac{(2C_0/g)}{(\partial H/\partial \tau)_{\xi=0}}$$

となる。したがって

$$\tan \theta = -1 / \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{H_0} \right) - 1 \right\} / \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \right)_{\xi=0} \dots\dots\dots(24)$$

したがって

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{3 \cos^2 \theta / 2 H_0}{\{(3\xi/2 H_0) - (\partial H/\partial \tau)_{\xi=0}\}^2} > 0 \dots\dots\dots(25)$$



図—2 記号の説明

となる。つまり水平床水路では波先は波の進行にともない、つねに立ち上ることになる。そこで第1近似として波先が直立し、すなわち $\tan \theta \rightarrow \infty$ となって碎波すると考えると碎波点 X_b は結局

$$\frac{3}{2} \left(\frac{X_b}{H_0} \right) = \frac{C_0}{(\partial H/\partial \tau)_{\xi=0}} \dots\dots\dots(26)$$

で与えられ、初期水位上昇速度が大きいほど早く碎波することになる。

3. 水理模型実験

(1) 実験装置および実験方法

実験水路は 図—3 に示すように 30 m × 4 m × 0.5 m の鋼製水平床水路で、実験波は piston type の造波機で発生せしめる。発生波形は 同図に示す位置に設置した No. 0~No. 8 の 9 個の抵抗線式波高計で計測・記録する。なお波高計 No. 0 は piston の直前面にありピストンとともに移動する。また 16 mm シネカメラをのせて水路側壁上を段波の波速で移動するよう遠隔操作される wave tracer によって碎波の瞬間およびその前後での波形を正確にとらえた。なお理想段波に近い波形を作るには大きな加速度で piston を始動しなければならないが、筆者らの実験では加速度の最大は 3.5 cm/sec² である。発生段波の相対波高と piston の速度はつぎのような理論関係があるが 図—4 に示すように所要の段波を作るには理論値よりわずかに大きな速度で piston を動かす必要がある。これは piston で与えられるエネルギーがそのまま完全に流体に伝達されないためである。

$$\frac{V_0}{C_0} = \frac{(h_0/H_0) \cdot \{1 + (3h_0/4 H_0) + (h_0^2/4 H_0^2)\}}{\{1 + (h_0/H_0)\}} \dots\dots\dots(27)$$

ただし V_0 は piston の速度である。なお実験波の諸元は 表—1 に示す範囲のものである。

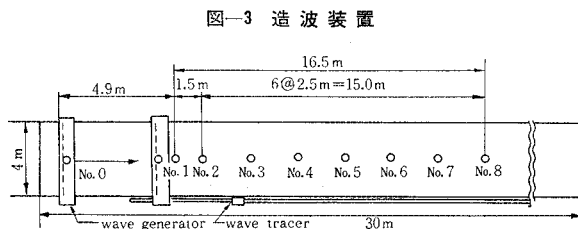
表—1 実験諸元

諸元	範囲
静水深 H_0	9.0 cm ~ 31.0 cm
段波相対波高 h_0/H_0	0.044 ~ 0.752
波形勾配 η/L	0.009 ~ 0.034
周期 T	0.30 sec ~ 1.61 sec

(2) 実験結果とその検討

a) 分散波の波形

分散波の波形は 図—6 にその一例を示すように碎け



図—3 造波装置

ないもの、spilling 型, surging 型および plunging 型の碎波をするものの4つの型に分類される。

碎波しないものは、波の進行につれて規則正しい分散波の成長がみられる。この分散波はこのまま保存波へ移行すると思われるが、これを定量的に示すため図-7に示すように分散波形と、その波高を同じくする保存波形(孤立波)の間の斜線で示した偏差部分の面積を不安定

量 m と定義し、波の進行にともなう m の変化を示したのが図-8である。同図より m/m_0 が伝播につれて0に近づくことから逐次保存波(孤立波)へ移行し静水深のほぼ80倍の伝播距離以上では保存波の領域に入ってしまうと考えてよい。なお m_0 は波高計 No. 1 での m の値である。

spilling 型碎波をするものは、碎波直後波形は乱れるがまもなく整正な波形に復帰する。この碎波形態は後述するように $0.25 < h_0/H_0 < 0.33$ の範囲でみられる。

surging 型碎波をするものは、碎波により生じた擾乱が第1波の波頭部に保存されるが後続波はそれほど乱れない。この波形は Sandover-Zienkiewicz らの観測した

図-4 Piston 速度 V_0 と発生段波波高 h_0 との関係

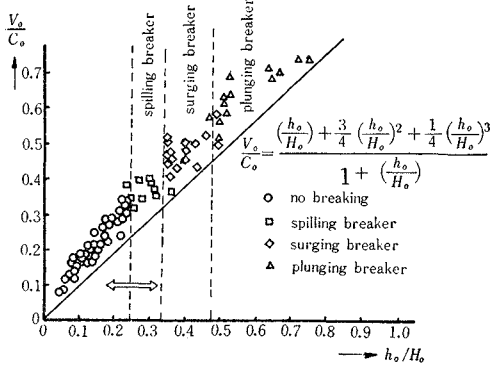


図-5 記号の説明

- h_0 : 理想段波波高
- η : 分散波波高
- η_i : 分散 i 波の波高
- L_i : 分散 i 波の波長
- H_0 : 静水深
- C_0 : 理想段波流速
- C_i : 分散 i 波の流速
- $C_0 = \sqrt{gH_0}$

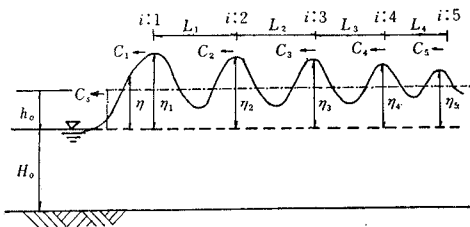


図-7 不安定量 m の定義

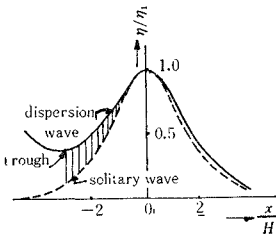


図-8 波の伝播にともなう m の変化

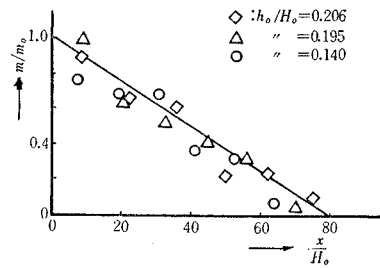
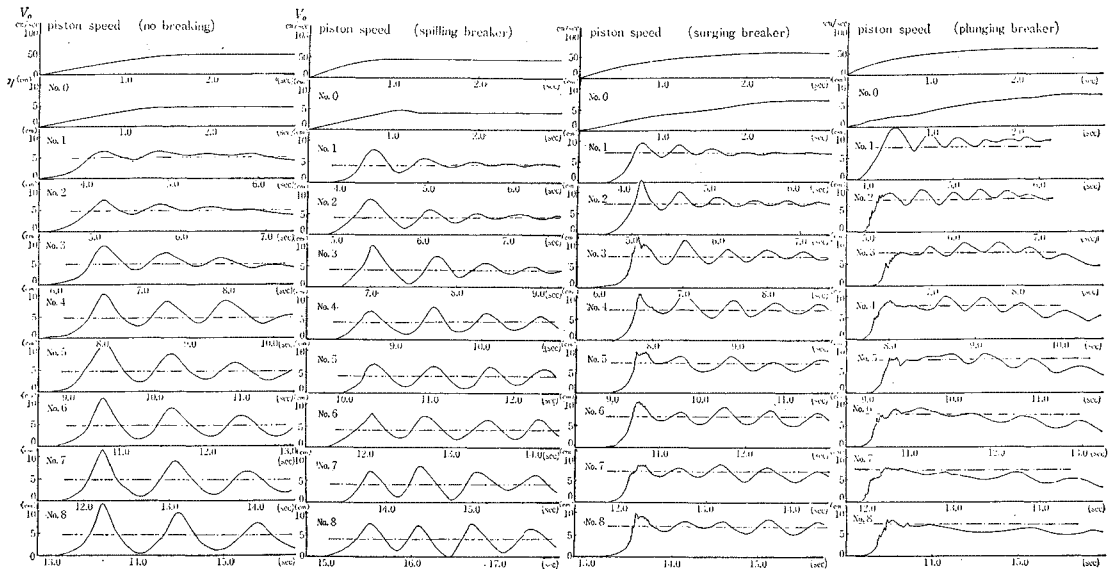


図-6 観測波形の一例



breaking surge であり後述するように $0.33 < h_c/H_0 < 0.475$ の範囲においてみられるものである。

plunging 型碎波をするものは、碎波による擾乱がきわめて大きいため碎波後、後続波のすべてがしだいに消滅し再び初期の階段状になっていく。この波形は Sandover-Zienkiewicz らの観測した steep fronted surge であり後述するように $0.475 < h_c/H_0$ の範囲においてみられるものである。

b) 伝播速度

波速は水路に設置された2組の波高計により記録された波の通過時間から求められ、筆者らの実験では 図-9 に示すように分散第1波の波速と理想段波の波速はほぼ

図-9 分散波の伝播速度と理想段波の伝播速度

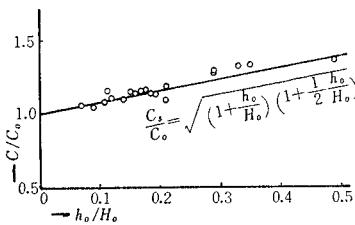


表-2 分散第1波と後続波の伝播速度の関係

$C_2 = 0.992 C_1$	$C_4 = 0.963 C_1$
$C_3 = 0.976 C_1$	$C_5 = 0.953 C_1$

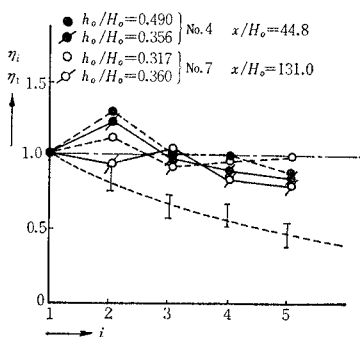
ひとしいことが認められる。また後続波の波速は表-2に示すように第1波の波速と等しいと考えてよく、分散波群は分散第1波の波速で伝播するといえる。なお、伝播速度の定義として、波の位相の

伝播する速度と、ある断面より前方における波のたかまりの容量がつねにひとしい容量をもつ断面の移動速度の二つが用いられているが、筆者らの実験においては両者の差はほとんど認められず、2.(1)で式(1)を用いることは許される。

c) 波高および波長

分散波列の各素波の波高分布を 図-10 に示す。碎波しないものについてはその分布は相対波高にはほぼ無関係に図示の範囲内にちらばり後続波ほど波高が小さく、その平均傾向を点線で示す。碎波するものについては実験値の散乱

図-10 分散波の波高分布



は大きいですが、ここで注目すべきことは碎波後の遷移過程では第2波波高、第3波波高が一時的に高くなることであって、その一例として波高計 No. 4, No. 7 での波高分布を同図に示した。このように後続波が一時的に高くなるのは、第1波が碎波によりエネルギーを損失するため波高が低減し、過渡的に第2波波高の方が大きくなる。このため第2波から第1波へ質量輸送が起こり(そのため第1波の谷が埋められる: 図-6 参照)、この輸送分だけ第2波の波高が低減し第3波の方が大きくなるものと考えられる。

伝播にともなう分散第1波の波高変化は 図-11 に示すように碎波しないものについてはゆるやかに波高が増大し前述したようにそのまま安定状態へと移行していくものと考えられる。碎波するものについては碎波点にいたるまで 図-12 に示すように plunging 型, surging 型, spilling 型の順で急激な波高の増大があり、碎波後は一時波高が著しく減少しその後は再びゆるやかに増大していく。

なお 図-11 の X_0 は波高計 No. 1 から No. 8 までの距離を示すものであり、図-12 の波高増加率 $n = d\eta/dx$ は波高計 No. 1 より piston 側へ 1m 離れた、分散がほとんど発生しない位置での分散第1波の波高と碎波時の波高を直線で結んだ場合の直線の勾配を示すものである。

また遷移過程での波高分布を示したのが 図-13 であり 図-11 伝播にともなう分散第1波の波高変化

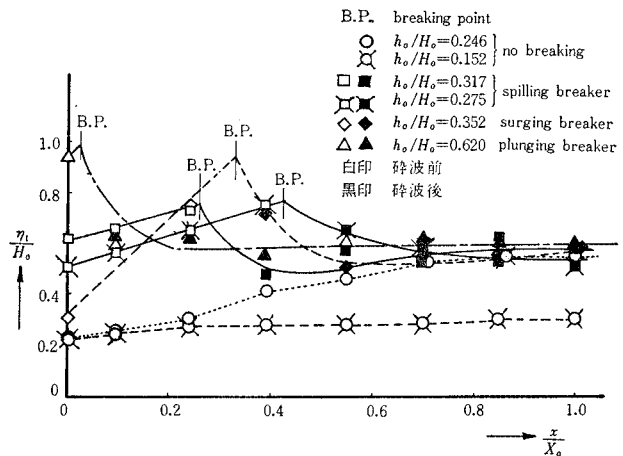


図-12 波高増加率

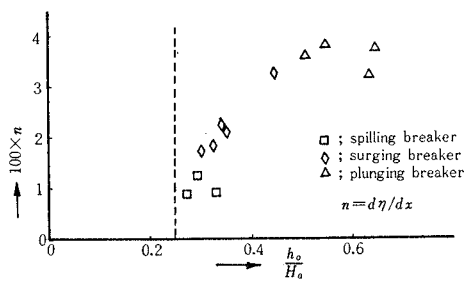
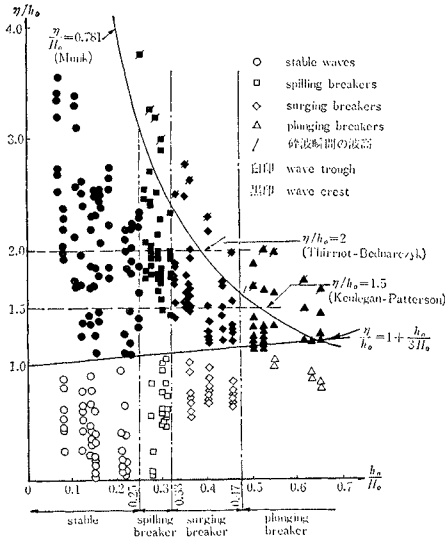


図-13 分散波の波高分布と砕波形式の分類



る。同図の砕波瞬間の波高は 16 mm シネカメラの高速撮影 (64 コマ/sec) の写真解析により読みとられたものである。同図より波の峰と谷の存在範囲は 2. (2) で示した理論曲線で規定されることが明瞭である。

砕波瞬時の波高はすべて Munk¹⁹⁾ の砕波限界値を越えている。この原因は今のところはっきりわからないが、Sandover-Taylor は砕波限界値として逆に Munk の値より小さい $\eta_{1b}/H_0 = 0.60$ を実験的に提案している。

また同図より安定波, 不安定波発生限界として $h_0/H_0 = 0.250$ を与えたが, これは Bazin および Favre の $h_0/H_0 = 0.275$ よりいくぶん小さい。しかし両者ともに実験値であり理論的に求まっているわけではない。

波高については上述のように種々の特性を見出したが, それらは 2. (1) で記したように波面曲率と密接な関係があり, 図-14 に示すように砕波の有無にかかわらず曲率の増減ともない波高の増加が認められ, 波高はほぼ式 (3) を満たしながら増大していくことが 図-15 から明らかである。なお同図の縦軸の値は各波高計において差異がほとんどないため, 波高計 No. 1~No. 7 での値を平均したものである。

図-14 波の伝播ともなう分散第 1 波の波高と曲率の関係

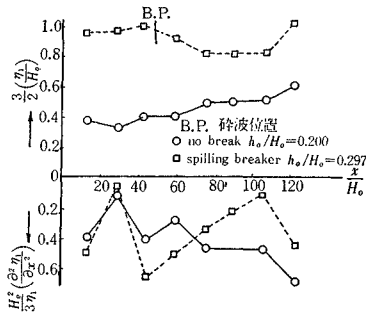


図-15 波高と曲率の関係

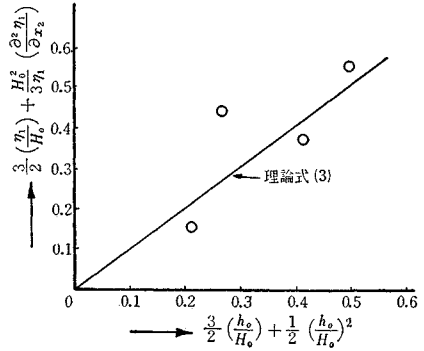


図-16 波の伝播ともなう分散第 1 波の波長変化

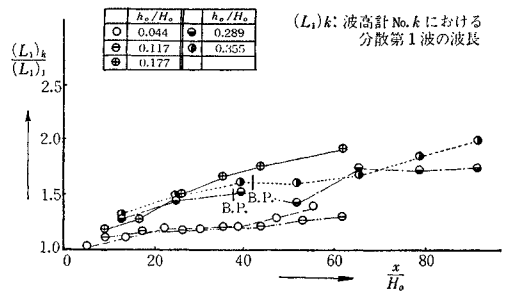
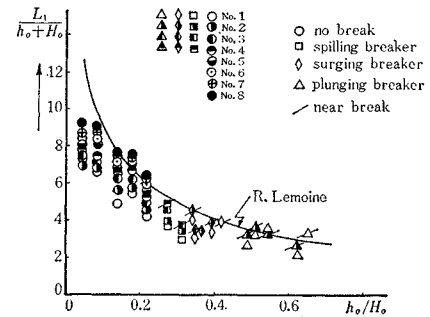


図-17 分散波の波長と段波波高との関係



波長については砕波しない場合は, 後続波ほど波長が短く波の進行につれて長くなるが, 砕波後の遷移過程で複雑な挙動を示し, 分散第 1 波の波長は一時減少し (図-16 参照) 第 2 波より小さくなる。また波長分布を段波相対波高で示すと 図-17 のようになり, 段波の相対波高が大きくなれば波長が短くなるということが認められる。またかなり熟成した波に対しては Lemoine の理論解はよい近似を与えるものと考えられる。

d) 砕波の形態

段波の相対波高 $h_0/H_0 > 0.25$ の場合, 分散第 1 波は必ず砕波する。この砕波形式は spilling 型, surging 型, plunging 型の三つに分類されその特徴を示すとつぎのようである。

① spilling breaker : 波形は波頂を通る鉛直軸に対称な形を保ちつつ波頂が cusp 状になりその尖角が $120^\circ \sim 130^\circ$ (Stokes²⁰) の碎波限界) で碎波するもので碎波により生じた気泡は波の進行にともない消滅し, 波形は再び整正になる。

② surging breaker: spilling 型と後述する plunging 型碎波の中間に位置するもので波先部の立ち上りが強く, 波頂部で弱い巻き込みがみられる。碎波により生じた気泡は波頂前面に保存され後続波は碎波による擾乱の影響を若干うける。

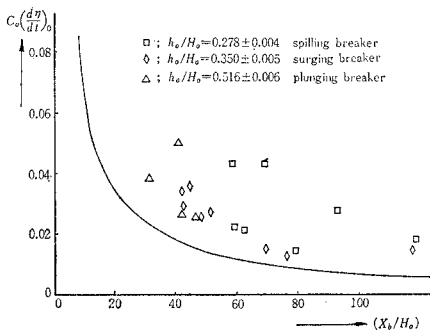
③ plunging breaker : 波先部が急激な立ち上りをみせはげしく巻き込みながら碎波する。生じた気泡は波前面部に保存され, 波の進行にともない碎波後のため後続波のすべてが消滅していく。

筆者らは wave tracer に据えた 16 mm シネカメラの高速撮影で碎波の瞬間の様相をとらえ, この写真解析により碎波型の分類を行なった。これによれば碎波型は図-13 に示したように, 段波波高のみで決定され, つぎのようになる。

- $h_0/H_0 < 0.25$ 安定波 (no breaking)
- $0.25 < h_0/H_0 < 0.33$ spilling breaker
- $0.33 < h_0/H_0 < 0.47$ surging breaker
- $0.47 < h_0/H_0$ plunging breaker

図-18 は初期水位上昇速度と碎波点との関係を示したもので, 図中の曲線は 2. (3) で求めた理論曲線 $3X_b/2H_0 = C_b/(\partial H/\partial t)_{X=t=0}$ である。spilling 型碎波をするものは実験値と理論値がかけはなれているがこれは前述のように spilling 型碎波は波頂が cusp 状になり碎波するため初期水位上昇には関係しないためであろう。また surging 型, plunging 型碎波は全体としては理論式と同じ傾向を示すが, 理論値と実験値がかけはなれているのは $\tan \theta \rightarrow \infty$ を碎波条件とする仮定の近似度の悪さによるものであるが, それにもかかわらず波先の水位上昇速度が surging 型, plunging 型碎波機構の重要な影響素因と考えるべきであろう。

図-18 初期水位上昇速度と碎波距離



4. 数値実験

(1) 基本式とその差分化

遷移過程での波形変動を 3. (2) で導いた式 (12) を差分式に直し, 初期値, 境界値問題として数値計算により求める。

式 (12) を有限差分法で差分化すると次式を得る。

$$\frac{\eta_{X+1,T+1} - \eta_{X+1,T}}{\Delta T} + \left(1 + \frac{3}{2}\eta_{X+1,T}\right) \cdot \left(\frac{\eta_{X+2,T+1} - \eta_{X,T+1} + \eta_{X+2,T} - \eta_{X,T}}{4\Delta X}\right) = \frac{1}{6(\Delta X)^2 \Delta T} (\eta_{X+2,T+1} - 2\eta_{X+1,T+1} + \eta_{X,T+1} - \eta_{X+2,T} + 2\eta_{X+1,T} - \eta_{X,T}) \dots (28)$$

ただし上式で添字 X は場所, T は時刻を示し, ΔX , ΔT は場所と時間の差分を意味する。

図-19 に示すように $T=1$ で初期値 $\eta_{X,1}$, $X=1, n$ で境界値 $\eta_{1,T}$, $\eta_{n,T}$ を与えて式 (28) を用いて連立方程式を作り $\eta_{X,T}$ ($2 \leq X \leq n-1, 2 \leq T \leq m$) の値を求めるのであるが, その計算方法はまず $T=2$ について式 (28) から $(n-2)$ 元連立式を作りその解 $\eta_{X,2}$ ($2 \leq X \leq n-1$) の値を求め, この値 $\eta_{X,2}$ を用いて $T=3$ について再び式 (28) から $(n-2)$ 元連立式を作り, その解 $\eta_{X,3}$ ($2 \leq X \leq n-1$) の値を求め, 以後 $T=m$ まで同様の操作をくり返し時間 T に関し step by step method で所要の解 $\eta_{X,T}$ ($2 \leq X \leq n-1, 2 \leq T \leq m$) を求める。差分式をこういった step by step method で解く場合, 計算の進行にともない, 打切り誤差, 丸めの誤差などが累積し正確な解が得られないおそれがあるため差分 ΔX , ΔT をできるだけ小さくすることが望ましい。筆者らは $\Delta X = \Delta T = 0.5$, $\Delta X = \Delta T = 0.3$, $\Delta X = \Delta T = 0.2$ の 3 種類の差分に対して予備計算を行ない解の収れん性あるいは電子計算機の容量と演算能力の点を考慮して, 差分として $\Delta X = \Delta T = 0.2$ をとれば十分であることを確認し, したがってここで行なう計算は $\Delta X = \Delta T = 0.2$ として行なわれた。静水域へ伝播する波を対象にしているため, 初期値 $\eta_{X,1} = 0$, 境界値 $\eta_{1,T}$ として波高計 No. 1 での記録波, $\eta_{n,T} = 0$ を与え, 波高計 No. 4 までの波

図-19 初期値, 境界値と所要解

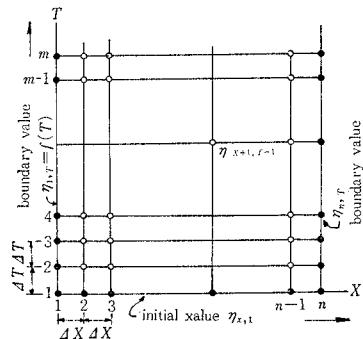
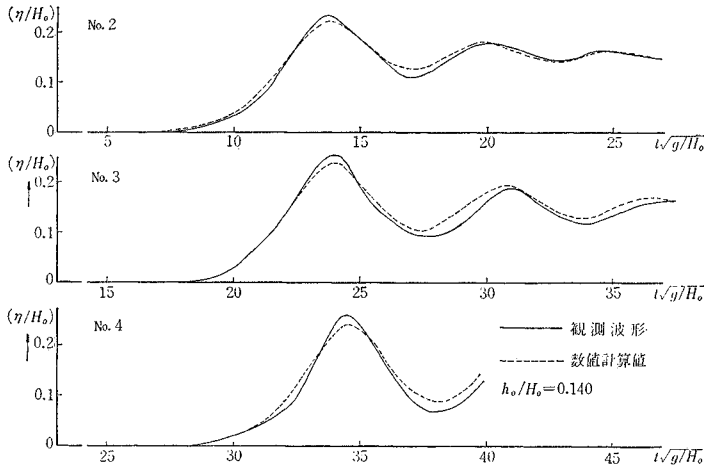


図-20 観測波形と数値計算による波形との比較の一例

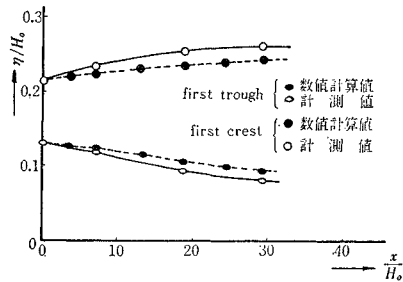


形を追跡した。なお数値計算はすべて大阪大学の NIAC 2200 電子計算機で行なったものである。

(2) 計算結果とその検討

数値計算で求めた波形と水理模型実験で観測した波形との比較の一例を 図-20 に示す。同図より計算波形と観測波形がきわめてよく一致していることが認められるが、図-21 に示すように分散第1波の計算波峰は観測波より小さく、波谷は逆に観測波より大きくなっている。このようにわずかではあるが両者に差異がある原因の一つとしては式 (12) が二次項以上を省略して得られた近似式であるためと思われ、高次の項を含む場合はさらに観測波形に近づくものと考えられる。

図-21 分散第1波の峰と谷の高さに対する数値計算値と計測値との比較の一例 (h₀/H₀=0.140 の場合)



この数値計算により少なくとも分散波形は波面曲率を考慮した式 (12) で与えられることが明確になり、波面曲率は段波の変形に非常に重要な要素であることがこのことから解明されたものといえよう。

5. 結 言

本研究は段波変形の諸特性を解明するため、まず波面曲率を考慮した有限振幅波の基本式によって理論解析を行ない、つぎに水理模型ならびに数値模型により遷移過程について種々考察を加えた。

得られた結論を要約すればつぎのごとくである。

① 段波の分散は波面曲率が伝達項として作用するため発生する。

② 遷移過程における分散波の挙動はつぎに示す4つの型に分類され、この分類は段波の相対波高 h_0/H_0 のみで明確に与えられる。

- | | | |
|------|-------------------|-----------------------------|
| 安定波 | 砕波しないもの | $h_0/H_0 < 0.25$ |
| 不安定波 | spilling 型砕波をするもの | ... $0.25 < h_0/H_0 < 0.33$ |
| | surging 型砕波をするもの | ... $0.33 < h_0/H_0 < 0.47$ |
| | plunging 型砕波をするもの | $0.47 < h_0/H_0$ |

なお砕波しない安定な波はその進行にともない保存波へ移行する。

③ 段波変形の遷移過程では、各分散素波の波高は確定せず、各形態別に進行につれて広い範囲に変動する。しかし静水面から波峰までの高さ η_{crest} および波谷までの高さ η_{trough} は必ずつぎの範囲に存在する。

$$\frac{\eta_{crest}}{h_0} > 1 + \frac{h_0}{3H_0}, \quad \frac{\eta_{trough}}{h_0} < 1 + \frac{h_0}{3H_0}$$

④ surging 型, plunging 型砕波機構として波先部の水位上昇速度が重要な要因と考えられ、理論の示すとおり水位上昇速度が大きいほど早く砕波する。

⑤ 数値計算によれば遷移過程での分散波の波峰と波谷の高さは、観測値と対比すると前者は若干小さく後者は若干大きい。周期は波の進行につれて観測値より小さくなりこのため分散第2波以後になると観測波形と計算による波形のずれが認められる。しかし分散第1波に関してずれがないため少なくとも第1波の波形は式 (12) で与えられると考えてよい。

本論文は昭和 39 年から継続して行なった一連の研究成果を総括したものであり、この間実験あるいは計算について多数の方々の協力を得た。とくに新日本技術コンサルタント・渡辺泰清氏の本学修士在学中の重要な寄与を高く評価し謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Keulegan, G.H. and Patterson, G.W. : Mathematical theory of irrotational transition waves, J. of Research of the National Bureau of Standard. Vol. 124 (1940)
- 2) Thirriot, C. and Bednarczyk, S. : Ondulation secondaires en front d'intumescence et ondes solitaires, La Houille Blanche. No. 8. (1964)
- 3) Rayleigh, Lord. : Phil. Mag. (5) 1. 257 paper 1 (1876), On the theory of long waves and bores, Proc.

- Roy. Soc. A.90. 324 (1914)
- 4) Lamb, Sir H. : Hydrodynamics p. 278, Cambridge Univ. Press (1932)
 - 5) Bazin : Mém. divers Savants a L'Acad des Sci. 19. 495 (1865)
 - 6) Boussinesq, J. : Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal de vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, Liouville's J. Math. 17. 55 (1872)
 - 7) Favre, H. : Ondes de transition, Paris Dunod. (1934)
 - 8) Lemoine, R. : Sur les ondes positive de translation dans les canaux et sur les ressaut ondule de faible amplitude, La Houille Blanche No. 2. (1948)
 - 9) Benjamine, T.B. and Lighthill, M.J. : On cnoidal waves and bores, Proc. Roy. Soc. Vol. 224. (1954)
 - 10) Sandover, J.A. and Zienkiewicz, O. : Experiments on surge waves, Water Power No. 11, p. 418 (1957)
 - 11) Sandover, J.A. and Taylor, C. : Les ondes de translation et les ondulations, La Houille Blanch No. 3, (1962)
 - 12) Sturtevant, B. : Implications of experiments on the weak undular bore, The Physics of Fluid. Vol. 8. (1965)
 - 13) Chester, W. : A model of the undular bore on a viscous fluid, J. of Fluid Mech. Vol. 24. part 2. (1966)
 - 14) Binnie, A. and Orkney, J.C. : Experiments on the flow of water from a reservoir through an open channel, The formation of hydraulic jump. Proc. Roy. Soc. A. 224. (1955)
 - 15) Peregrine, D.H. : Calculations of the development of an undular bore, J. of Fluid Mech. Vol. 25. Part 2. (1966)
 - 16) Korteweg, D.J. and De Vries, G. : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag. S. 5, Vol. 39, No. 240, May. (1895)
 - 17) Broer, L.J.F. : On the interaction of non-linearity and dispersion in wave propagation, Appl. Sci. Res. B. 11. (1964)
 - 18) Stoker, J.J. : Water waves, New York Univ. Press. (1957)
 - 19) Munk, W.H. : The solitary wave theory and its application to surf problem, Ann. New York Acad. of Sci. Vol. 51, Art 3. (1949)
 - 20) Stokes, G.G. : On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Phil. Soc. Vol. III p. 441. (1847)
(1963.4.24・受付)
-