

遷移行列法による任意骨組構造の解析

ANALYSIS OF ARBITRARY FRAMED STRUCTURES
BY TRANSFER MATRIX METHOD

遠 田 良 喜*

By Yoshihiro Enda

1. ま え が き

最近の構造物の応力解析においては、マトリクス代数を本格的に用いた手法が数多く発展、普及し、構造解析法はしだいにこの種の流儀に改められつつある。われわれがしばしば利用しているアメリカで開発された STRESS あるいは FRAN は、マトリクス法による構造解析の好例で、これによって複雑な骨組構造の解析は簡単な仕事となった。STRESS や FRAN で用いられている解析法は変位法であり、その究極においてすべての節点の変位、変形量を未知量とする多元の連立方程式の処理に帰し、したがって、大容量の電子計算機の使用が前提となる。

一方、このマトリクス法が発展してきた同じ 1950 年ころから、変位法とは異なってマトリクスの掛算をおもな仕事とした解法が発展してきている。S. Falk 教授の Reduction 法¹⁾、E.C. Pestel, F.A. Leckie 両教授の著書²⁾で述べられている Transfer-Matrix 法はそのよく知られた方法である。これらの解法では連立式の元数は節点数には関係なく、構造系の左端における自由度の数のみによって決まる。

わが国においても、早稲田大学奥村教授の立体骨組構造の振動・安定問題を Transfer-Matrix 法によって解析された先駆的研究³⁾、信州大学谷本教授のはり、トラス、矩形板、円板などの弾性理論における諸問題を固有マトリクス法（演算子法）によって解析した研究^{4)~7)}、また、名古屋大学成岡教授は格子桁、連続トラス、アーチの解析に Reduction 法を適用し^{8)~10)}、さらに、変位法と Reduction 法にもとづいた逐次代入法の提案をする¹¹⁾、など多くの研究がある。いずれにしても、これらの解法では多元の逆行列の計算をさけて、計算機の記憶容量の節約をはかったものとみることができる。

本論文は Reduction 法あるいは Transfer-Matrix 法の流儀をさらに発展させて、複雑な平面および立体構造の解析を行ない、本解法によって汎用性のある構造解析プログラムを作成し得るようにマトリクスによる公式化を試みたものである。その際に、変位法において演算の

簡易化より構造系全体の剛性マトリクスを 3 軸対角マトリクス (Three-band matrix, Tri-diagonal matrix) の形に配列するのが一般的のようであるが^{12), 13)}、本法においても、解析を支配する径間マトリクスをサブマトリクスの対角マトリクス、節点マトリクスをサブマトリクスの 3 軸対角マトリクスで表示して、数値要素を集約し、計算プログラミングの便宜をはかっている。

本法によれば、骨組系が複雑になっても、逆行列の元数は移行される state vector の変位、変形量の数（構造系の一面のみの変位、変形量の数）以下になり、変位法に比較して、計算機の記憶容量の節約および演算時間の短縮が可能である。

2. 記 号

X, Y, Z 直交絶対座標軸

x, y, z 直交部材座標軸

u, v, w x, y, z 軸方向の変位量

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z x, y, z 軸回りの回転変形量

Q_x, Q_y, Q_z x, y, z 軸方向の力

M_x, M_y, M_z x, y, z 軸回りのモーメント

$Q = \{M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, Q_z\}$

$q = \{u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z\}$

V state vector $\{q, Q\}$

i, L 部材要素の左端を表わす指標

k, R 部材要素の右端を表わす指標

k, j, i 節点の位置を表わす指標

l, a, h X, Y, Z 軸方向部材の部材長および指標

K_B 枝部材の剛性マトリクス

A_d 変位の適合条件マトリクス

\bar{A}_d A_d の転置マトリクス

A_f 力のつりあい条件マトリクス

$\bar{K}_B = A_f K_B \bar{A}_d$

F, F 径間マトリクス

P, P 節点マトリクス

P, B, C, B', C' P のサブマトリクス

R, R' 左端および右端の境界条件マトリクス

R, S, T, S', T' R のサブマトリクス

GJ ねじり剛性

* 正会員 石川島播磨重工業 KK 鉄構設計部 橋梁設計課

- EI_y, EI_z 曲げ剛性
- EF 伸び剛性
- A^L : 左端の自由度から成るベクトル
- L 荷重ベクトル
- { } 列ベクトル (column vector)
- Ω 不規則部材をとり扱うマトリクス

3. 力学量の定義

構造物の任意の一要素 g をとりだして、その直交部材座標軸を図-1 のように定める。この要素 g に作用する静力学的量は、断面力と

して x, y, z 軸方向の力 Q_x, Q_y, Q_z および x, y, z 軸回りの回転モーメント M_x, M_y, M_z , 変位, 変形量として x, y, z 軸方向の変位量 u, v, w お

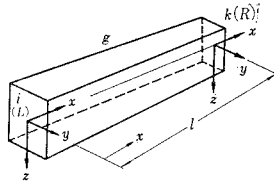


図-1

よび x, y, z 軸回りの回転変形量 ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z である。

要素 g の左端 $i(L)$ および右端 $k(R)$ におけるこれらの力学量の符号はつぎの約束にしたがう。

(1) 左端 $i(L)$ においては

断面力 Q_x, Q_y, Q_z は軸正方向を正, M_x, M_y, M_z は軸正方向に向って時計回りを正とする。変位, 変形量 $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ も断面力と同じ向きおよび回転を正とする。

(2) 右端 $k(R)$ においては

断面力 Q_x, Q_y, Q_z は軸負方向を正, M_x, M_y, M_z は軸負方向に向って時計回りを正とする。変位, 変形量 $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ は断面力とは反対に軸正方向の変位を正, 軸正方向に向って時計回りの回転を正にとる。

4. 支配方程式と解

要素 g に作用する 12 個の静力学的量を支配する微分方程式はそれぞれの力学量に対してつぎのようである。

$$(u, Q_x) \dots -EFd^2u/dx^2 = q_x \dots \dots \dots (1)$$

$$(\phi_x, M_x) \dots -GJd^2\phi_x/dx^2 = t_x \dots \dots \dots (2)$$

$$(v, Q_y) \dots \dots EI_z d^4v/dx^4 = p_y \dots \dots \dots (3)$$

$$(w, Q_z) \dots \dots EI_y d^4w/dx^4 = p_z \dots \dots \dots (4)$$

式 (1)~(4) の一般解はそれぞれの式の 2 回あるいは 4 回の積分によって得られ、積分定数は要素 g の左端 L ($x=0$) における力学量から得られる。要素 g の部材長を l としてこれらの解において $x=l$ とおくと、右端 R における力学量がつぎのように得られる。

すなわち、式 (1) より

$$\begin{Bmatrix} u \\ Q_x \\ 1 \end{Bmatrix}_g^R = \begin{Bmatrix} 1 & -f_u & u_0^R \\ 0 & 1 & Q_{x0}^R \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} u \\ Q_x \\ 1 \end{Bmatrix}_g^L \dots \dots \dots (5)$$

式 (2) より

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ M_x \\ 1 \end{Bmatrix}_g^R = \begin{Bmatrix} 1 & -f_t & \phi_{x0}^R \\ 0 & 1 & M_{x0}^R \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} \phi_x \\ M_x \\ 1 \end{Bmatrix}_g^L \dots \dots \dots (6)$$

式 (3) より

$$\begin{Bmatrix} v \\ \phi_z \\ M_z \\ Q_y \\ 1 \end{Bmatrix}_g^R = \begin{Bmatrix} 1 & l & -g_z & h_z & v_0^R \\ 0 & 1 & -f_z & g_z & \phi_{z0}^R \\ 0 & 0 & 1 & -l & M_{z0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q_{y0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} v \\ \phi_z \\ M_z \\ Q_y \\ 1 \end{Bmatrix}_g^L \dots \dots \dots (7)$$

また、式 (4) より

$$\begin{Bmatrix} w \\ \phi_y \\ M_y \\ Q_z \\ 1 \end{Bmatrix}_g^R = \begin{Bmatrix} 1 & -l & g_y & h_y & w_0^R \\ 0 & 1 & -f_y & -g_y & \phi_{y0}^R \\ 0 & 0 & 1 & l & M_{y0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q_{z0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} w \\ \phi_y \\ M_y \\ Q_z \\ 1 \end{Bmatrix}_g^L \dots \dots \dots (8)$$

すなわち、要素 g の右端 R の力学量は左端 L の力学量によって表わされる。また、上式における係数マトリクス (径間マトリクス) は部材要素 g の幾何的条件および外力 q_x, t_x, p_y, p_z による力学量から作られる。すなわち

$$f_u = l/EF, f_t = l/GJ, f_y = l/EI_y, f_z = l/EI_z, \\ g_y = l^2/2 EI_y, g_z = l^2/2 EI_z, h_y = l^3/6 EI_y, \\ h_z = l^3/6 EI_z,$$

$$Q_{x0}^R = \int_0^l q_x dx, -u_0^R = \int_0^l Q_{x0}(x)/EF dx,$$

$$M_{x0}^R = \int_0^l t_x dx, -\phi_{x0}^R = \int_0^l M_{x0}(x)/GJ dx,$$

$$Q_{y0}^R = \int_0^l p_y dx, M_{z0}^R = -\int_0^l Q_{y0}(x) dx,$$

$$\phi_{z0}^R = -\int_0^l M_{z0}(x)/EI_z dx, v_0^R = \int_0^l \phi_{z0}(x) dx,$$

$$Q_{z0}^R = \int_0^l p_z dx, M_{y0}^R = \int_0^l Q_{z0}(x) dx,$$

$$\phi_{y0}^R = -\int_0^l M_{y0}(x)/EI_y dx, w_0^R = -\int_0^l \phi_{y0}(x) dx.$$

式 (5), (6), (7), (8) が要素 g に対する一般解 (径間遷移式) で、これらの 4 つの式が基本になってすべての骨組構造物の静力学的問題が解析される。

これらの 4 つの式を変形すれば、ただちに要素 g の両端における内力-変位の関係式が得られる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_k \end{Bmatrix}_g = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix}_g \begin{Bmatrix} q_i \\ q_k \end{Bmatrix}_g \dots \dots \dots (9)$$

ここに、

$$Q = \{M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, Q_z\}, \\ q = \{u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z\}.$$

また、剛性マトリクス $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ はつぎのようになる。

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & GJ/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 & 4EI_y/l & 0 \\ 0 & 6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/l \\ EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -GJ/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 & 2EI_y/l & 0 \\ 0 & -6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l \\ -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & GJ/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 & -2EI_y/l & 0 \\ 0 & -6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & -2EI_z/l \\ EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -GJ/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 & -4EI_y/l & 0 \\ 0 & 6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & -4EI_z/l \\ -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

式 (10), (11), (12), (13) における剛性マトリクスは要素 g の両端が各力学量に対して弾性的に拘束されている場合で、端部が弾性拘束されない場合や支持点となる場合は剛性マトリクスの要素を適当に修正しなければならない。節点マトリクス P のサブマトリクス P, C, C' はこれらの剛性マトリクスを基にして構成される。

5. 演算マトリクスの組立て

(1) 任意形立体ラーメン

解析の基本となる径間遷移式 (Field transfer equation) および節点遷移式 (Point transfer equation) は、一般に次式のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & F_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}^L \dots (14)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} P_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ C_1' & P_2 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & C_{m-1}' & P_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}^R \dots (15)$$

ここに、 F_1, F_2, \dots, F_m は state vector V_1, V_2, \dots, V_m に対応する径間マトリクスであり、 $P_1, C_1, C_1', \dots, C_{m-1}', P_m$ は節点に集合する部材の連続条件から得られるマトリクスで、式 (15) の係数マトリクスを節点マトリクスと呼ぶ。

図-2 の立体ラーメンの任意径間を例にとる。X軸方向部材を主部材 (Main member) とし、各節点におい

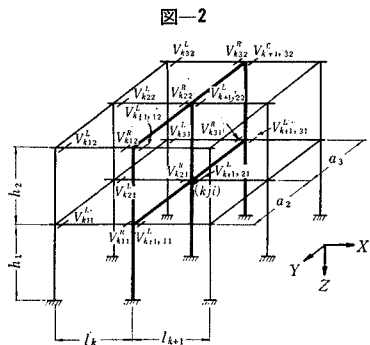


図-2

て主部材から分岐している Y 軸および Z 軸方向の部材を枝部材 (Branch member) とする。各部材に対して 12 個の力学量をすべて考慮する時は径間 l_k 群の各主部材の state vector $V_{k1}, V_{k2}, \dots, V_{km}$ と径間マトリクス $F_{k1}, F_{k2}, \dots, F_{km}$ は、つぎのように表わされる。

$$V_{ki} = \begin{bmatrix} q \\ Q \\ 1 \end{bmatrix}_{ki}, \quad F_{ki} = \begin{bmatrix} f & f' & q_0^R \\ 0 & f & Q_0^R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{ki}, \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -f_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_z & 0 & h_z & 0 \\ 0 & g_y & 0 & 0 & 0 & h_y \\ -f_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_y & 0 & 0 & 0 & g_y \\ 0 & 0 & -f_z & 0 & g_z & 0 \end{bmatrix} \dots(17)$$

したがって、主部材 l_k 群の両端の state vector V_k^L と V_k^R の間にはつぎの線形関係式が成立する。

$$V_k^R = F_k V_k^L \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$V_k = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}_k, \\ F_k = \text{diag}[F_1, F_2, \dots, F_m]_k \dots\dots\dots(19)$$

つぎに、径間 l_{k+1} 群の主部材の左端における state vector V_{k+1}^L は式 (15) の節点遷移式より得られる。すなわち

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R \dots\dots\dots(20)$$

式 (20) における節点マトリクス P_k は枝部材の剛性マトリクスをサブマトリクスとする3軸対角マトリクスである。すなわち

$$P_k = [C_{i-1}^t \ P_i \ C_i]_{i=1}^m \dots\dots\dots(21)$$

節点マトリクス P_k は節点群 k に集合するすべての部材の連続条件から得られ、つぎの三つの条件を同時に満足するようにして作られる。

1. 変位の適合条件式 (節点に集合する各部材端の変位が外力の作用下で各節点に適合する)
2. 力のつりあい条件式 (節点に集合する各部材端の内力と外力がつりあう)
3. 内力-変位の関係式 (各部材要素の内力と変位は式 (9) の関係を満足する)

つぎに図-2 に示す立体ラーメンの任意節点 kji におけるこれらの三つの条件を求める。

a) 変位の適合条件式

節点 kji における変位ベクトルを

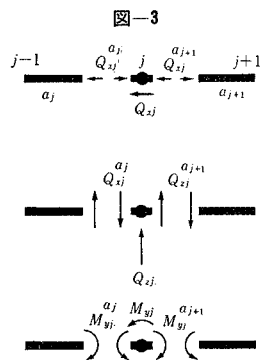
$$q_{kji} = \{u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z\}_{kji} \dots\dots\dots(22)$$

とする。これらの変位量は絶対座標系で定義されている。つぎに X, Y, Z 軸方向部材 l, a, h の部材端 kji における変位ベクトルをそれぞれ $q_{kji}^l, q_{kji}^a, q_{kji}^h$ とする。これらの変位量は部材座標系で定義されている。節点 kji における変位の適合条件式はつぎのように表わされる。

$$q_{kji} = q_{kji}^l = A_d^a \cdot q_{kji}^a = A_d^h \cdot q_{kji}^h \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 A_d^a および A_d^h は変位の適合条件を表わすマトリクスでそれぞれつぎのように表わされる。

$$A_d^a = \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad A_d^h = \begin{bmatrix} \bar{h} & 0 \\ 0 & \bar{h} \end{bmatrix}, \\ \bar{a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots(24)$$



b) 力のつりあい条件式 (図-3)

節点 kji における節点力のベクトルを

$$Q_{kji} = \{M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, Q_z\}_{kji} \dots\dots(25)$$

とする。また、節点 kji に集合する部材 l, a, h の端部における断面力のベクトルをそれぞれ

$$Q_{kji}^l, Q_{kji}^{l+1}; Q_{kji}^a, Q_{kji}^{a+1}; Q_{kji}^h, Q_{kji}^{h+1}$$

とすると、力のつりあい条件式はつぎのように表わされる。

$$Q_{kji} = Q_{kji}^l - Q_{kji}^{l+1} + A_f^a (Q_{kji}^a - Q_{kji}^{a+1}) \\ + A_f^h (Q_{kji}^h - Q_{kji}^{h+1}) \dots\dots\dots(26)$$

ここに、 A_f^a, A_f^h は力のつりあい条件を表わすマトリクスで、

$$A_f^a = \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad A_f^h = \begin{bmatrix} \bar{h} & 0 \\ 0 & \bar{h} \end{bmatrix}$$

となる。

c) 内力-変位の関係式

節点 kji に集まる枝部材のみの内力-変位の関係式は次式により示される (主部材に対するこの条件は径間遷移式において満足されている)。

Y軸方向部材:

$$Q_{kji}^a = [K_{21}, K_{22}]_{a_j} \begin{bmatrix} q_{k, j-1, i} \\ q_{kji} \end{bmatrix}^{a_j}, \\ Q_{kji}^{a_{j+1}} = [K_{11}, K_{12}]_{a_{j+1}} \begin{bmatrix} q_{kji} \\ q_{k, j+1, i} \end{bmatrix}^{a_{j+1}} \dots\dots\dots(27)$$

Z軸方向部材:

$$Q_{kji}^h = [K_{21}, K_{22}]_{h_i} \begin{bmatrix} q_{k, j, i-1} \\ q_{kji} \end{bmatrix}^{h_i}, \\ Q_{kji}^{h_{i+1}} = [K_{11}, K_{12}]_{h_{i+1}} \begin{bmatrix} q_{kji} \\ q_{k, j, i+1} \end{bmatrix}^{h_{i+1}} \dots\dots\dots(28)$$

以上の三つの条件を満足するように節点マトリクスを作成すれば、弾性解は一意的に定まってくる。式 (23), (26), (27), (28) より節点 $kji (i=1, 2, \dots, m)$ における節点力と節点変位の関係式がつぎのように得られる。

$$[Q]_{kj} = [K_{21}]_k^a [q]_{k, j-1} + [K]_k [q]_{kj} \\ + [K_{12}]_k^{a_{j+1}} [q]_{k, j+1} \dots\dots\dots(29)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}, \mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_m\} \dots (30) \\
 \mathbf{K}_{21} &= \text{diag}[\bar{K}_{21}^1, \bar{K}_{21}^2, \dots, \bar{K}_{21}^m], \\
 \mathbf{K}_{12} &= \text{diag}[-\bar{K}_{12}^1, -\bar{K}_{12}^2, \dots, -\bar{K}_{12}^m], \dots (31) \\
 \mathbf{K} &= [\bar{K}_{21}^{hji}, \bar{K}_i', -\bar{K}_{12}^{hji+1}]_{i=1}^m
 \end{aligned}$$

式 (31) において,

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_i' &= \bar{K}_{22}^{a_i} - \bar{K}_{11}^{a_i+1} + \bar{K}_{22}^{h_i} - \bar{K}_{11}^{h_i+1}, \\
 \bar{K} &= A_f K \bar{A}_d.
 \end{aligned}$$

節点 k 群において, 主部材の断面力と式 (29) の節点力のつりあい条件, 主部材の変位と節点変位の適合条件より, 節点遷移式 (20) が得られる。これを $i=3, j=4$ の場合に対して具体的にかくと

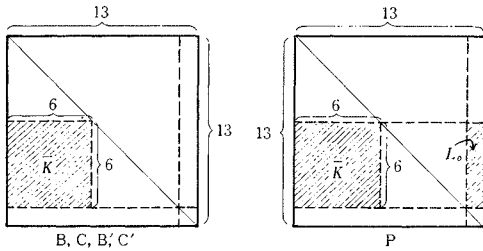
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}_{k+1}^L = \begin{bmatrix} P_1 & C_1 \\ C_1' & P_2 & C_2 \\ & C_2' & P_3 & C_3 \\ & & C_3' & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}_k^R \dots (32)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_j &= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}_j, \mathbf{C}_{j-1}' = \begin{bmatrix} C_1' & 0 & 0 \\ 0 & C_2' & 0 \\ 0 & 0 & C_3' \end{bmatrix}_{j-1}, \\
 \mathbf{P}_j &= \begin{bmatrix} P_1 & B_1 & 0 \\ B_1' & P_2 & B_2 \\ 0 & B_2' & P_3 \end{bmatrix}_j, \mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_j \dots (33)
 \end{aligned}$$

式 (33) においてサブマトリクス P_i は nonsingular であり, それぞれのサブマトリクスはつぎのように組立てられる (図-4)。

図-4



$$\begin{aligned}
 &P(I, \bar{K}_i', L_0), B(\bar{K}_{12}^{hji}), C(\bar{K}_{12}^{a_i}) \\
 &B'(\bar{K}_{21}^{hji}), C'(\bar{K}_{21}^{a_i-1,i}) \dots (34)
 \end{aligned}$$

ここに,

- I : (13×13)の単位マトリクス,
- L_0 : 枝部材に作用する外力による荷重ベクトル (6×1),
- \bar{K}, \bar{K}' : 枝部材の剛性マトリクス。

このようにして, 式 (18), (20) における径間マトリクスおよび節点マトリクスが各径間群 $l_k = l_1, l_2, \dots, l_n$ と各節点群 $k=1, 2, \dots, n$ に対して求められる。したがって, 各径間遷移式, 節点遷移式によって立体ラーメンの左端の state vector V_1^L が順次右方へ移行されて, 右端の state vector V_{n+1}^L との線形関係式が得られる。すなわち,

$$V_{n+1}^L = P_n F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots P_2 F_2 P_1 F_1 V_1^L \dots (35)$$

つぎに, 立体ラーメンの左端および右端における境界条件式は一般につぎの式により表わすことができる。

$$\begin{cases} V_1^L = R A_1^L \\ R' V_{n+1}^L = 0 \end{cases} \dots (36)$$

ここに, R, R' は左端および右端の境界条件を表わすマトリクスであり, 式 (36) の表示によって演算が連続して行なわれることになる。また, A_1^L は左端における自由度から成るベクトルである。マトリクス R は節点マトリクスと同様に枝部材の剛性マトリクスから構成される3軸対角マトリクスで, つぎのように表わされる ($i=3, j=4$ の場合)。

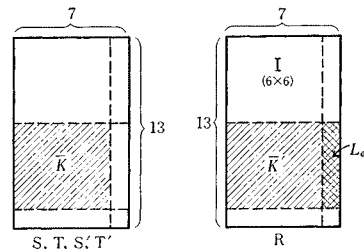
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 & 0 & 0 \\ T_1' & R_2 & T_2 & 0 \\ 0 & T_2' & R_3 & T_3 \\ 0 & 0 & T_3' & R_4 \end{bmatrix}_0 \dots (37)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{j-1}' &= \begin{bmatrix} T_1' & 0 & 0 \\ 0 & T_2' & 0 \\ 0 & 0 & T_3' \end{bmatrix}_{j-1}, \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} R_1 & S_1 & 0 \\ S_1' & R_2 & S_2 \\ 0 & S_2' & R_3 \end{bmatrix}_j, \\
 \mathbf{T}_j &= \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}_j \dots (38)
 \end{aligned}$$

式 (38) における各サブマトリクスの組立ては図-5 のように行なわれる。

図-5



また, マトリクス R' はつぎのような対角マトリクスである。

$$R' = \text{diag}[R_1', R_2', R_3', R_4'] \dots (39)$$

ここに,

$$R_j' = \text{diag}[R_1', R_2', R_3']_j \dots (40)$$

式 (36) を式 (35) に代入して, 最終的につぎの A_1^L に関する線形方程式が得られる。

$$Z \cdot A_1^L = 0 \dots (41)$$

ここに,

$$Z = R' P_n F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots P_2 F_2 P_1 F_1 R \dots (42)$$

式 (41) は左端の自由度に関する連立方程式である。この連立式を解いて A_1^L を求め, 式 (36), (18), (20) から順次主部材の state vector が得られ, ついで式 (9) の関係より枝部材の断面力が計算される。式 (42) のマトリクスの掛算によって得られる Z は, 左端の自由度

表-1 (a)

$i-1$ ($j-1$)	i (j)	サブマトリクス C_{i-1}', P_i			
		β_1	β_2	β_3	β_4
固 定	固 定	6	4	12	6
ピ ン	固 定	3	3	3	3
固 定	ピ ン	0	0	3	$\begin{matrix} 3(C_{i-1}') \\ 0(P_i) \end{matrix}$
ピ ン	ピ ン	0	0	0	0

表-1 (b)

i (j)	$i+1$ ($j+1$)	サブマトリクス P_i, C_i			
		β_1	β_2	β_3	β_4
固 定	固 定	6	4	12	6
固 定	ピ ン	3	3	3	3
ピ ン	固 定	0	0	3	$\begin{matrix} 0(P_i) \\ 3(C_i) \end{matrix}$
ピ ン	ピ ン	0	0	0	0

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R + J_{k+1} q_{k+1} \dots (50)$$

ここに、 P_k は部材 h, s の剛性マトリクスから作成され J_{k+1} は部材 s のみのばね定数を要素とするつぎのようなマトリクスである。

$$J_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & J_1 & 0 \\ J_2 & 0 & J_2' \\ 0 & J_3 & 0 \end{bmatrix}_{k+1} \dots (51)$$

式 (51) のサブマトリクス J_1, J_2, J_2', J_3 はいずれも斜材 s のばね定数を要素とする 7 行 3 列のマトリクスである。また、ベクトル q_{k+1} は

$$q_{k+1} = \{u_1, w_1, \phi_{y1}, u_2, w_2, \phi_{y2}, u_3, w_3, \phi_{y3}\}_{k+1} \dots (52)$$

さて、径間 l_{k+1} の径間マトリクスによって、

$$V_{k+1}^R = F_{k+1} V_{k+1}^L = F_{k+1} P_k V_k^R + F_{k+1} J_{k+1} q_{k+1} \dots (53)$$

式 (53) より変位ベクトル q_{k+1} に関する連立式から q_{k+1} が V_k^R の関数として得られる。

$$q_{k+1} = (I - \Omega F_{k+1} J_{k+1})^{-1} \Omega F_{k+1} P_k V_k^R \dots (54)$$

ここに、

$$\Omega = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (55)$$

I は (9×9) の単位マトリクスであり、 $I - \Omega F_{k+1} J_{k+1}$ は対角線要素がすべて 1 の nonsingular マトリクスである。式 (54) を再び式 (53) に代入して次式が得られる。

$$V_{k+1}^R = \tilde{P}_k V_k^R \dots (56)$$

ここに、

$$\tilde{P}_k = F_{k+1} P_k + F_{k+1} J_{k+1} \times (I - \Omega F_{k+1} J_{k+1})^{-1} \Omega F_{k+1} P_k \dots (57)$$

また、

$$V_{k+2}^L = P_{k+1} V_{k+1}^R + J_{k+1}' q_k = \tilde{P}_{k+1} V_k^R \dots (58)$$

ここに、

$$\tilde{P}_{k+1} = P_{k+1} \tilde{P}_k + J_{k+1}' \Omega \dots (59)$$

また、 J_{k+1}' は斜材 S の剛性マトリクスから作成されるマトリクスである。

このように径間の途中に不規則な部材 S が入った場合にも式 (57), (59) の類いの補助計算によって、state vector は順次右方へ移行されていく。

つぎに、ラーメンの左端における自由度から成るベクトル A_1^L および境界条件を表わすマトリクス R は

$$A_1^L = \{a_{11}^L, a_{12}^L, a_{13}^L\}, \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & S_{11} & 0 \\ S_{11}' & R_{12} & S_{12} \\ 0 & S_{12}' & R_{13} \end{bmatrix} \dots (60)$$

ここに、

$$a_{i1}^L = \{u, w, \phi_y, 1\}_{1i}^L, \quad (i=1, 2, 3) \dots (61)$$

また、 R のサブマトリクス $S_{1, i-1}', R_{ii}, S_{ii}$ は

$$S_{1, i-1}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_i & 0 & -k_i'/2 & 0 \\ k_i'' & 0 & -k_i''' & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{i+1} & 0 & -k_{i+1}'/2 & 0 \\ k_{i+1}'' & 0 & k_{i+1}''' & 0 \\ 0 & \lambda_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_i + k_{i+1} & 0 & -k_i' - k_{i+1}' & M_{y0} \\ -k_i'' - k_{i+1}'' & 0 & -k_i''' + k_{i+1}''' & Q_{x0} \\ 0 & -\lambda_i - \lambda_{i+1} & 0 & Q_{z0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (i=1, 2, 3) \dots (62)$$

右端における境界条件を表わすマトリクス R' は

$$R' = \text{diag}[R_{n1}', R_{n2}', R_{n3}'] \dots (63)$$

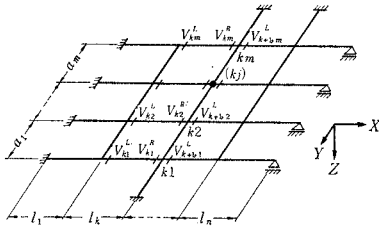
ここに、

$$R_{ni}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (i=1, 2, 3) \dots (64)$$

(3) 任意形格子構造

図-7 の格子構造の場合は、一要素であるはりに $w, \phi_x, \phi_y, M_x, M_y, Q_z$ の 6 つの力学的量が存在する。したがって、state vector V および径間のマトリクス F はつ

図-7



ぎのように表わし得る。

$$V = \begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \\ M_x \\ M_y \\ Q_z \\ 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l & 0 & g_y & h_y & w_0^R \\ 0 & 1 & 0 & -f_t & 0 & 0 & \phi_{x0}^R \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -f_y - g_y & 0 & \phi_{y0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & M_{x0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & M_{y0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

節点 kj における変位の適合条件式は

$$\begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}_{kj} = A_d^a \begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}_a, A_d^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

節点 kj における力のつりあい式は

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix}_{kj} = A_f^a \begin{bmatrix} M_x^{aj-1} - M_x^{aj} \\ M_y^{aj-1} - M_y^{aj} \\ Q_z^{aj-1} - Q_z^{aj} \end{bmatrix}, A_f^a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

したがって、節点力と節点変位の関係式は

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix}_{kj} = \begin{bmatrix} -k_j - k_j/2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_j \\ k_j'' & k_j''' & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}_{k,j-1} + \begin{bmatrix} k_j - k_{j+1} & -k_j' - k_{j+1}' & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_j - \tau_{j+1} \\ -k_j'' - k_{j+1}'' & k_j''' - k_{j+1}''' & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}_{k,j+1} + \begin{bmatrix} k_{j+1} & -k_{j+1}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{j+1} \\ k_{j+1}'' & -k_{j+1}''' & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix}_{k,j+1} \quad (68)$$

ここに、

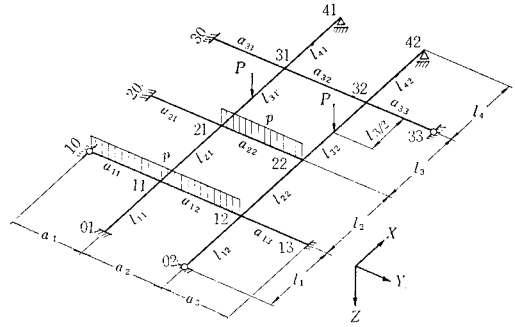
$$k_j = \beta_1 EI_{yj}/a_j^2, k_j' = \beta_2 EI_{yj}/a_j, k_j'' = \beta_3 EI_{yj}/a_j^3, k_j''' = \beta_4 EI_{yj}/a_j^2, \tau_j = GJ_j/a_j.$$

6. 数値計算例

(1) 格子構造 (図-8)

a) 幾何的条件および外荷重

図-8



部材長 $l_k = a_j = 5 \text{ m}$ ($k=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3$),
 曲げ剛性 $EI_l = 8.4 \times 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2, EI_a = 4.2 \times 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2$,
 ねじれ剛性 $GJ_l = 4.2 \times 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2, GJ_a = 2.1 \times 10^4 \text{ t}\cdot\text{m}^2$,
 集中荷重 $P = 20 \text{ t}$, 等分布荷重 $p = 2 \text{ t/m}$.

b) 解析

X軸方向部材を主部材, Y軸方向部材を枝部材とする。
 任意径間 l_{k1}, l_{k2} の主部材に対する state vector V_k ,
 径間マトリクス F_k および節点 $k1, k2$ の節点マトリクス P_k はつぎのようになる。

$$V_k = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_k, F_k = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}_k, P_k = \begin{bmatrix} P_1 & C_1 \\ C_1' & P_2 \end{bmatrix}_k \quad (69)$$

数値計算の時は力学量をすべて無次元量にして演算マトリクスの各要素を1に近い値にしておくことにより、マトリクスの掛算による誤差を少なくすることができる。任意定数 EI_0, l_0, P_0 を選び

$$w = w' P_0 l_0^3 / EI_0, \phi_x = \phi_x' P_0 l_0^2 / EI_0, \phi_y = \phi_y' P_0 l_0^2 / EI_0, M_x = M_x' P_0 l_0, M_y = M_y' P_0 l_0, Q_z = Q_z' P_0 \quad (70)$$

とおいて、各数式を無次元化する。プライム'を付した力学量は無次元力学量を表わす。無次元化した径間マトリクス F' はつぎのように表わされる。

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha^2/2\beta & \alpha^3/6\beta & w_0^R \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha/\beta_t & 0 & 0 & \phi_{x0}^R \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha/\beta & -\alpha^2/2\beta & \phi_{y0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & M_{x0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & M_{y0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q_{z0}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここに、 $\alpha = l/l_0, \beta = EI_y/EI_0, \beta_t = GJ/EI_0$.

また、無次元化した枝部材のばね定数は

$$k_j = \beta_1 \beta_a / \alpha_a^2, k_j' = \beta_2 \beta_a / \alpha_a, k_j'' = \beta_3 \beta_a / \alpha_a^3, k_j''' = \beta_4 \beta_a / \alpha_a^2, \tau_j = \beta_{ta} / \alpha_a.$$

ここに、 $\alpha_a = a_j/l_0, \beta_a = EI_y^{aj}/EI_0, \beta_{ta} = GJ^{aj}/EI_0$.

無次元化した節点マトリクス P_k' のサブマトリクス P_j は

$$P_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_j - k_{j+1}, & -k_j' - k_{j+1}' & 0 & 1 & 0 & 0 & M_{x_0}' \\ 0 & 0 & -r_j - r_{j+1} & 0 & 1 & 0 & M_{y_0}' \\ -k_j'' - k_{j+1}'', & k_j''' - k_{j+1}''' & 0 & 0 & 0 & 1 & Q_{z_0}' \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

C_{j-1}' , C_j も同様にして得られる。

任意定数 $EI_0 = 6 \times EI$, $l_0 = l$, $P_0 = 20t$ とすると,

$$F_{11}' = F_{12}' = F_{21}' = F_{22}' = F_{41}' = F_{42}'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

主部材 l_{31} , l_{32} の集中荷重 $P = 20t$ による力学量は

$$w_0'^R = \frac{1}{6} \frac{P}{P_0} \left(\frac{l}{2} \right)^3 \frac{EI_0}{EI} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{8}$$

同様にして, $\phi_{x_0}'^R = M_{x_0}'^R = 0$, $\phi_{y_0}'^R = -3/4$, $M_{y_0}'^R = 1/2$, $Q_{z_0}'^R = 1$. 枝部材 a_{11} , a_{12} の等分布荷重 $p = 2t/m$ による節点力は

$$M_{y_{110}}^{a_{11}} = \frac{1}{8} \frac{p a_{11}^2}{P_0 l_0} = \frac{1}{16}, \quad Q_{z_{110}}^{a_{11}} = \frac{5}{8} \frac{p a_{11}}{P_0} = \frac{5}{16},$$

$$M_{y_{110}}^{a_{12}} = \frac{1}{12} \frac{p a_{12}^2}{P_0 l_0} = \frac{1}{24}, \quad Q_{z_{110}}^{a_{12}} = -\frac{1}{2} \frac{p a_{12}}{P_0} = -\frac{1}{4},$$

$$M_{y_{120}}^{a_{12}} = \frac{1}{24}, \quad Q_{z_{120}}^{a_{12}} = \frac{1}{4}.$$

$$M_{x_{110}}' = -M_{y_{110}}^{a_{11}} + M_{y_{110}}^{a_{12}} = -1/48,$$

$$Q_{z_{110}}' = Q_{z_{110}}^{a_{11}} - Q_{z_{110}}^{a_{12}} = 9/16,$$

$$M_{x_{120}}' = -M_{y_{120}}^{a_{12}} = -1/24, \quad Q_{z_{120}}' = Q_{z_{120}}^{a_{12}} = 1/4.$$

節点マトリクス P_1' のサブマトリクスは

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & -7/12 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/48 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9/16 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_s' = 10^3 \times \begin{bmatrix} -10.65375 & 1.2031875 & 0.444375 & 0.5338125 & -5.8065 & -1.1296875 \\ 0.1290938 & -0.2833359 & -0.1411719 & 0.0005391 & 0.7363125 & 0.0818516 \\ 0.0122813 & -0.0711328 & -0.0722969 & 0.0232005 & 0.2334375 & 0.0234297 \\ -1.1520938 & 0.3034922 & 0.1492109 & 0.0857578 & -0.8499375 & -0.1196484 \\ -4.393875 & 1.4790938 & 0.797625 & 0.1079063 & -6.51225 & -0.5865938 \\ -0.6083438 & 0.0858047 & 0.0537891 & 0.0204036 & -0.3931875 & -0.0802734 \end{bmatrix}$$

$$L_1' = \{-8.8281250, -5.3183594, 6.4042969, -20.6621094, -71.0078125, -6.9980469\}$$

この連立式を解いて, つぎのように左端の自由度が求まる。

$$\{M_{x_1}', M_{y_1}', Q_{z_1}', \phi_{y_2}', M_{x_2}', Q_{z_2}'\}_1^L$$

$$= \{-0.0631833, 0.5288805, -0.6970689, -0.9779525, 0.0619765, 0.1121013\}.$$

これよりベクトル A_1^L が求まり, 各主部材の state vector が順次計算される。

他の演算マトリクスも同様にして求められる。

主部材の左端が固定支持, ヒンジ支持の場合のベクトル A_1^L および境界条件マトリクス R は

$$A_1^L = \{M_{x_1}', M_{y_1}', Q_{z_1}', 1, \phi_{y_2}', M_{x_2}', Q_{z_2}', 1\}_1^L,$$

$$R = \text{diag}[R_1, R_2]$$

ここに,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

主部材の右端が単純支持である境界条件マトリクス R' は

$$R' = \text{diag}[R_1', R_2'],$$

$$R_1' = R_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

演算に必要なマトリクスがそろったので, マトリクスの掛算 $R'F_4'P_3F_3'P_2'F_2'P_1'F_1'R$ を求めて, 左端の自由度を未知量とする6元の連立式を得る。

$$Z_s' \cdot \{M_{x_1}', M_{y_1}', Q_{z_1}', \phi_{y_2}', M_{x_2}', Q_{z_2}'\}_1^L = L_1'$$

ここに,

表-2 (a)

	V_1^L	V_1^R	V_2^L	V_2^R	V_3^L	V_3^R	V_4^L	V_4^R
w_1	0	0.00441	0.00441	0.00793	0.00793	0.00630	0.00630	0
ϕ_{x1}	0	0.00075	0.00075	0.00170	0.00170	0.00140	0.00140	0
ϕ_{y1}	0	-0.00108	-0.00108	-0.00036	-0.00036	0.00101	0.00101	0.00139
M_{x1}	-6.318	-6.318	-7.971	-7.971	2.497	2.497	11.790	11.790
M_{y1}	52.888	-16.819	-13.278	-10.695	-10.693	-10.315	-12.635	0
Q_{z1}	-13.941	-13.941	0.517	0.517	-9.924	10.076	2.527	2.527
w_2	0	0.00541	0.00541	0.00118	0.00118	0.00939	0.00939	0
ϕ_{x2}	0	-0.00074	-0.00074	-0.00008	-0.00008	-0.00054	-0.00054	0
ϕ_{y2}	-0.00097	-0.00130	-0.00130	-0.00072	-0.00072	0.00147	0.00147	0.00208
M_{x2}	6.198	6.198	-5.503	-5.503	3.801	3.801	-4.496	-4.496
M_{y2}	0	11.210	17.654	-37.280	-35.769	-12.675	-20.752	0
Q_{z2}	2.242	2.242	-10.987	-10.987	-5.381	14.619	4.151	4.151

表-2 (b)

断面力	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
左端 M_x	4.509	0.967	-5.476	1.512	1.511	-4.239	-1.919	6.158
M_y	0	1.313	-29.712	51.378	-12.331	39.916	-7.037	-33.837
Q_z	-4.407	-8.865	14.364	-14.835	-4.395	-11.249	-3.701	6.768
右端 M_x	4.509	0.967	-5.476	1.512	1.511	-4.239	-1.919	6.158
M_y	2.966	18.011	42.107	-22.799	-9.304	-16.330	-25.540	0
Q_z	5.593	1.135	14.364	-14.835	5.605	-11.249	-3.701	6.768

主部材の state vector が求めれば、枝部材の断面力は節点の変位、変形量より容易に得られる。計算結果を表-2 (a), (b) に示す。

(2) 簡単な立体ラーメン (図-9)

a) 幾何的条件および外荷重

部材長 $l=a=8m$,

X, Y 軸方向部材の曲げ剛性 $EI_y=3.0 \times 10^5 t \cdot m^2$,

ねじれ剛性 $GJ=1.0 \times 10^5 t \cdot m^2$,

Z 軸方向部材の曲げ剛性 $EI_y=EI_z=1.5 \times 10^5 t \cdot m^2$,

各部材の伸び剛性 $EF=\infty$ とする。

集中荷重 $P=20t$, トルク荷重 $T=20t \cdot m$.

b) 解析

X 軸方向部材を主部材とし, Y, Z 軸方向部材を枝部材とする。各部材の軸方向変位を無視するため, 主部材の state vector および径間マトリクスは, つぎのように縮小される。

$$V' = \{\phi_x', \phi_y', M_{x'}, M_{y'}, 1\},$$

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha/\beta_t & 0 & \phi_{x_0}'/R \\ 0 & -2 & 0 & \alpha/2\beta & \bar{\phi}_{y_0}'/R \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M_{x_0}'/R \\ 0 & 6\beta/\alpha & 0 & -2 & \bar{M}_{y_0}'/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

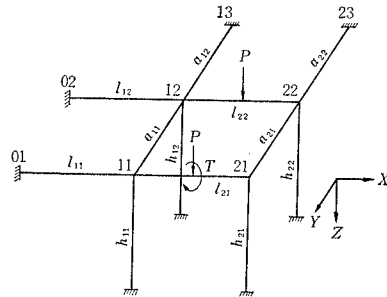
ここに, $\bar{\phi}_{y_0}'/R = 3/\alpha \cdot w_0'/R + \phi_{y_0}'/R$,

$$\bar{M}_{y_0}'/R = -6\beta/\alpha^2 \cdot w_0'/R + M_{y_0}'/R.$$

また, 節点マトリクスのサブマトリクス P_1 は

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4(\beta a_1/\alpha a_1 + \beta h_1'/\alpha h_1) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta t a_1/\alpha a_1 - 4\beta h_1'/\alpha h_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

図-9



ここに, $\beta = EI_y/EI_0$, $\beta' = EI_z/EI_0$.

他のサブマトリクスも同様にして得られる。

任意定数を $EI_0 = 6 \times 3 \times 10^5 t \cdot m^2$, $l_0 = 8m$, $P_0 = 20t$ として各マトリクスを求め, $R'P_2'F_2'P_1'F_1'R$ の計算より, つぎの連立式を得る。

$$\begin{bmatrix} 415 & 0 & 306 & 0 \\ 0 & 277/18 & 0 & -17/12 \\ 306 & 0 & 1027 & 0 \\ 0 & -17/12 & 0 & 605/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x_1}' \\ M_{y_1}' \\ M_{x_2}' \\ M_{y_2}' \end{bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} -5/4 \\ -1/2 \\ -3/8 \\ -25/48 \end{bmatrix}$$

上式を解いて,

$$\{M_{x_1}', M_{y_1}', M_{x_2}', M_{y_2}'\}_1^L = \{-0.0035151, -0.0356204, 0.0006822, -0.0339944\}$$

を得る。計算結果を図-10(a), (b) に示す。

これら2つの例の計算結果は IBM の FRAN によるそれと非常によく一致していることを付記する。

7. 結論

本論文の結論を以下に要約する。

図-10 (a)

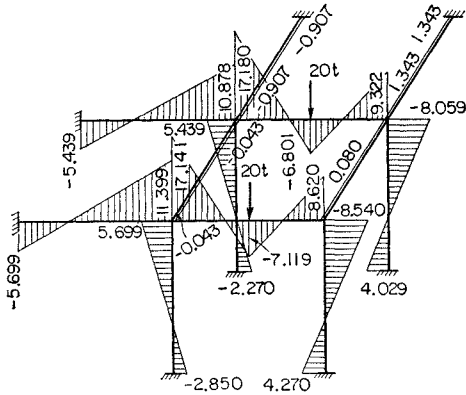
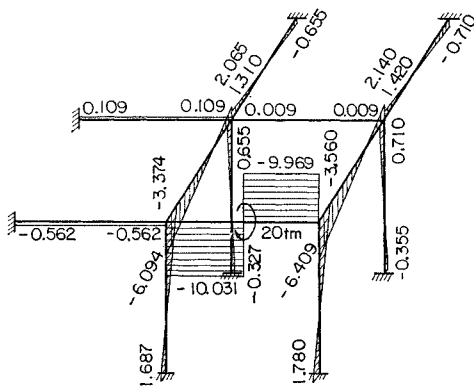


図-10 (b)



(1) 平面および立体構造物の静力学的解析は、微分方程式 (1), (2), (3), (4) の一般解の数学的処理に帰すが、本論文ではそれを遷移行列法によって機械的に行なっている。

(2) 演算を支配するマトリクスはすべてサブマトリクスの対角マトリクスおよび3軸対角マトリクスに整理され、これらは構造図から簡単な手続きによって作成される。計算はこれらのマトリクスの掛算のみとなり、構造解析に高度の力学的原理を必要としない。

(3) 数値計算を行なう場合は、力学量を無次元量に直してマトリクスの各要素を1に近づけておくことにより、マトリクスの掛算による誤差を少なくすることができる。

(4) 本解法によれば、各演算マトリクスの計算を支配する要素が対角線上に集約され、また、変位法のように多元の逆行列の計算を要しないので、計算機の記憶容量の節約になる。

(5) 本解法は複雑な平面および立体構造の解析に応用され得るので、非常に汎用性のある計算プログラムを作成し得る (筆者もこの種の解析法にさらに検討を加えて立体構造解析プログラムを作成し、FRANと比較検討する予定である)。

(6) 本論文は信州大学工学部教授谷本勉之助博士の“固有マトリクス法”を通して得た基礎的知識の上に展開されたものである。ここに厚く感謝申し上げる。

参考文献

- 1) R. Kersten : Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Springer (1962).
- 2) E.C. Pestel & F.A. Leckie : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill (1963).
- 3) 柴田 碧 : マトリクス構造解析法講座 (9), JSSC, Vol. 3, No. 24, (1967, 12), pp. 71-77.
- 4) B. Tanimoto : Eigen-Matrix Method for Beams and Plates, Journal of the Structural Division ASCE Vol. 89, No. ST 5, 3681, (1963, 10), pp. 173-215.
- 5) B. Tanimoto : Operational Method for Continuous Beams, Journal of the Structural Division ASCE Vol. 90, No. ST 6, 4179, (1964, 12), pp. 213-242.
- 6) B. Tanimoto : Some Improvements on Proposed Eigen-Matrix Method, Journal of the Structural Division ASCE Vol. 92, No. ST1, 4667, (1966, 2), pp. 101-119.
- 7) B. Tanimoto : Operational Method for Pin-Jointed Trusses, Journal of the Structural Division ASCE Vol. 92, No. ST 3, 4851, (1966, 6), pp. 179-198.
- 8) 熊野・成岡 : Reduction 法とそれによる振り剛性のない格子桁の解法, 土木学会誌, 50.7(40.7), pp. 93-99.
- 9) 熊野・成岡 : 平行弦連続ワレントラスの一計算法, 土木学会論文集, 132号 (41.8), pp. 27-33.
- 10) 桑山・成岡 : Reduction 法によるリブアーチの解析, 土木学会誌, 52.9 (42.9), pp. 57-63.
- 11) 中川・成岡 : 変形法と Reduction 法との相互関係について, 土木学会論文集, 141号 (42.5), pp. 23-30.
- 12) B. Fraeijs de Veubeke : Matrix Methods of Structural Analysis, AGARDograph 72 Pergamon Press (1964).
- 13) B.E. Gatewood and N. Ohanian : Tri-Diagonal Matrix Method for Complex Structures, Journal of the Structural Division ASCE Vol. 91, No. ST 2, 4291, (1965, 4), pp. 27-41.

(1968. 4.10・受付)