

## 1 自由度減衰振動系の衝撃応答

合 田 良 実\*

### 1. まえがき

構造物の応力解析や動的設計において、衝撃荷重は取り扱いのむずかしい外力の一つである。作用時間が短いこと、ピーク値が大きいこと、変動が大きいこと、荷重変化が把握しにくいこと、などが衝撃荷重の特徴であり、解析を困難にしている原因である。

衝撃荷重を受ける構造物の解析においては、構造物を各種の振動素子で構成された系で代表させ、適当なモデル衝撃を与えてその応答を計算する。このノートでは、最も基本的な系として1自由度減衰振動系を考え、長方形、三角形、および正弦波形の衝撃パルスに対する応答スペクトルを計算した。非減衰振動系の衝撃応答については Ayre<sup>1)</sup> がくわしい計算結果を示しているが、減衰振動系についてはあまり見られないようなので、ここに紹介する次第である。

### 2. 衝撃応答の計算

1 自由度減衰振動系の特性は、固有角振動数  $\omega_n = 2\pi/T_n$  (非減衰固有周期  $T_n$ ) と減衰定数  $\beta$  によって定まり、外力  $\xi(t)$  が作用したときの変位量  $x$  はつぎの運動方程式の解として求められる。

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \omega_n^2\xi(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 $\xi(t)$  は外力をばね定数で割って等価変位量に換算したものである。外力として長方形パルスを考え、作用時間を  $\tau$ 、その大きさを  $\xi_p$  とすると、

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_p & 0 \leq t < \tau \\ 0 & t \geq \tau \end{cases} \quad \dots\dots\dots(2)$$

と表される。初期条件は  $t=0$  で  $\dot{x}=x=0$  である。

式 (1)、(2) を解くため Laplace 変換を用いると、

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\xi(t)dt \quad \dots\dots\dots(3)$$

として、初期条件を考えながら式 (1) を書き改めると、

$$s^2X(s) + 2\beta\omega_n sX(s) + \omega_n^2X(s) = \omega_n^2G(s) \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。ただし  $G(s)$  は  $\xi(t)$  の Laplace 変換であり、 $0 \leq t < \tau$  については

$$G(s) = \xi_p \frac{1}{s} \quad \dots\dots\dots(5)$$

である。式 (4) は  $X(s)$  の1次式であるからただちに解くことができ、

$$X(s) = \frac{\omega_n^2 \xi_p}{s(s^2 + 2\beta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad \dots\dots\dots(6)$$

となるから、振動系の変位  $x(t)$  がこの逆変換として、

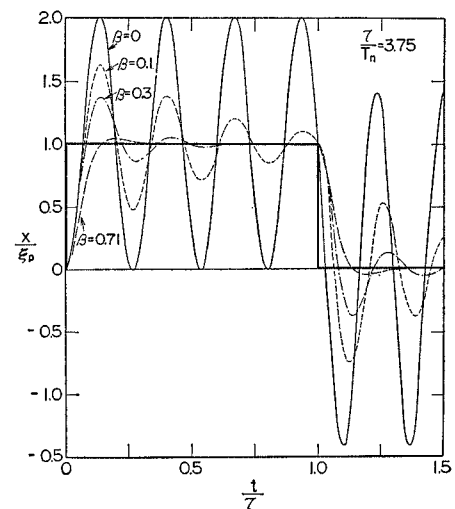
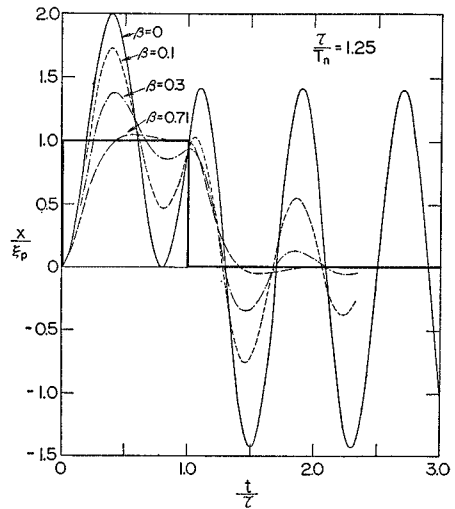
$$x(t) = \xi_p \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta\omega_n t} \cos(\omega t - \varepsilon) \right] \quad 0 \leq t < \tau \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 $\omega = \omega_n \sqrt{1-\beta^2}$   $\dots\dots\dots(8)$

$$\varepsilon = \tan^{-1}(\beta/\sqrt{1-\beta^2}) \quad \dots\dots\dots(9)$$

と求められる。 $t \geq \tau$  については、外力が  $t=0$  から始まる  $\xi(t) = +\xi_p$  の正ステップと、 $t=\tau$  から始まる  $\xi(t) =$

図-1 長方形パルスに対する応答波形



\* 正会員 運輸省港湾技術研究所水工部

$-\dot{\xi}_p$  の負ステップの和として与えられることを利用して、それぞれの外力に対する応答を重ね合せて

$$x(t) = \frac{\dot{\xi}_p}{\sqrt{1-\beta^2}} \{ e^{-\beta\omega_n(t-\tau)} \times \cos[\omega(t-\tau) - \epsilon] - e^{-\beta\omega_n t} \cos(\omega t - \epsilon) \} \quad t \geq \tau \dots\dots\dots (10)$$

と求められる。

式(7)~(10)の応答は、これを  $x/\dot{\xi}_p$  と無次元化して考えると、 $\omega_n\tau$  および  $\beta$  の二つのパラメーターによって規定される。図-1は  $\omega_n\tau$  の代りに  $\tau/T_n$  を考えて、この比が 1.25 および 3.75 のときの応答波形を計算したもので、 $\beta=0, 0.1, 0.3$  および 0.71 の場合を示している。 $\beta=0$  の非減衰の場合は強い固有振動が誘発され、最大変位は外力の2倍にまで達する。しかし系の減衰を効かせるにつれて、応答波形は外力の波形に近づく。

このように、衝撃に対する応答波形はある程度ひずんでいるので、最大変位  $x_{max}$  および逆向きの最大変位  $x_{min}$  を読みとり、 $\tau/T_n$  に対してプロットすると図-2のような衝撃応答スペクトルが得られる。同様にして、三角形パルスおよび正弦波パルスに対して応答スペクトルを計算した結果が図-3, 4である。この  $x_{max}/\dot{\xi}_p$  の値は衝撃に対する応答係数であり、 $x_{min}/\dot{\xi}_p$  の値は残留振動の大きさを表わしている。

3. 力積比例領域における解

図-2~4を見ると、 $\tau/T_n$  が小さい部分では  $x_{max}/\dot{\xi}_p$  が  $\tau/T_n$  に比例している。いま、式(1)を積分すると、

$$\dot{x}(\tau) + 2\beta\omega_n x(\tau) + \omega_n^2 \int_0^\tau x dt = \omega_n^2 I_\xi \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $I_\xi$  は  $\xi(t)$  の  $t=0 \sim \tau$  の積分値、すなわち力積である。ここで  $\tau \rightarrow 0$  極限を考えると、 $t=0_+$  における値として、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(0_+) &= \omega_n^2 I_\xi \\ x(0_+) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。したがって、作用時間のきわめて短い衝撃に対する応答は、式(12)の初期条件を満足する自由振動としてつぎのように表わすことができる。

図-2 長方形パルスに対する応答スペクトル

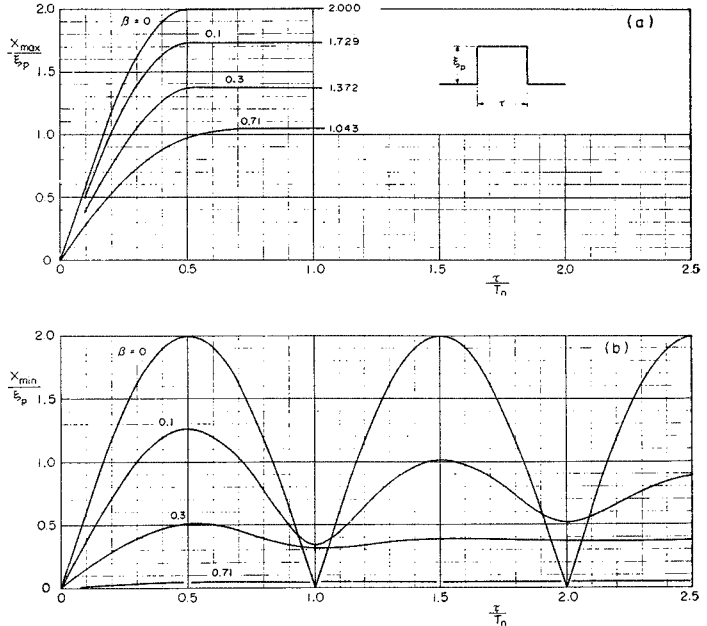
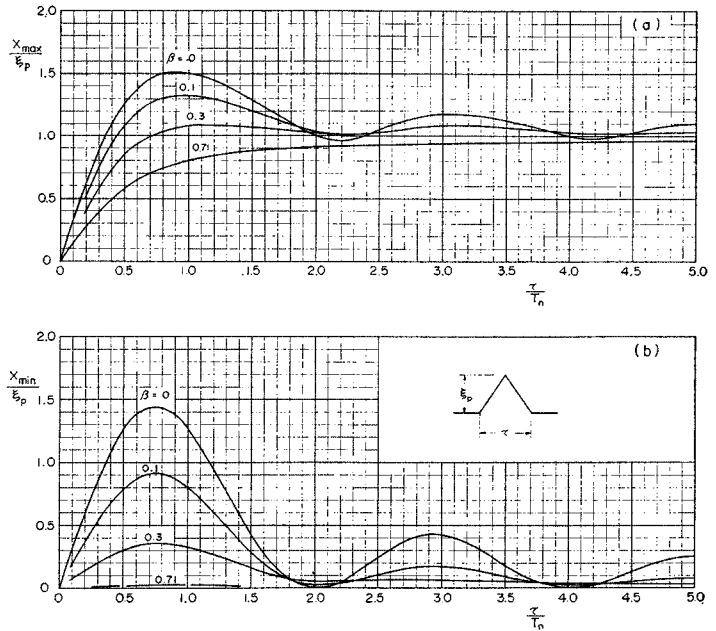


図-3 対称三角パルスに対する応答スペクトル



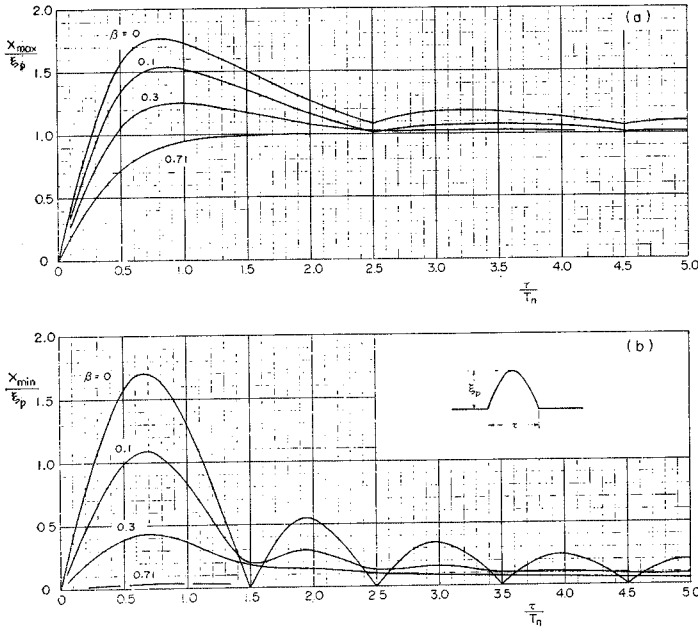
$$x = \frac{\omega_n^2}{\omega} I_\xi e^{-\beta\omega_n t} \sin \omega t \dots\dots\dots (13)$$

この最大値は  $\omega t = \tan^{-1}(\sqrt{1-\beta^2}/\beta)$  のときに生じて

$$x_{max} = 2\pi \frac{I_\xi}{T_n} \exp\left[-\beta \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)\right] \dots (14)$$

となり、衝撃荷重の力積に比例し、系の固有周期に反比例するが、衝撃荷重の波形には無関係である。この意味で、力積比例または力積応答現象と呼ばれる。誤差10%程度を許せば、 $\tau/T_n = 0.25$  付近まではこの領域と見なせる。

図-4 正弦パルスに対する応答スペクトル



#### 4. 衝撃応答の特性

以上の衝撃応答およびその他の衝撃波形に対する応答を調べると、ほぼつぎのような特性が認められる。

まず  $x_{\max}/\varepsilon_p$  の値は2以下であって正弦起振力によるような共振を生じない特徴がある。この  $x_{\max}/\varepsilon_p$  の極大値は、衝撃荷重の立ち上り時間を  $\tau_1$  として  $\tau_1/T_n = 0.4 \sim 0.7$  の範囲のときに生ずる。

また、長方形パルスなどのように  $\tau_1 = 0$  のときは、強い固有振動をともなうため  $\tau/T_n$  が大きくなって  $x_{\max}/\varepsilon_p$  の値が1に収れんしない。これを解決するには、系の減衰定数  $\beta$  を大きくすることが必要で、 $\beta = 0.7$  が最適である。

さらに、応答波形に見られる固有振動が目立たなくなるためには、 $\tau_1$  が  $T_n$  の約3倍以上であることが必要である。この際、 $\beta$  が大きいほど波形の追従性も良好である。

なお、衝撃荷重測定用のピックアップでは減衰定数  $\beta$  を大きくできないことが多いが、このような場合はピックアップの固有振動をカットするようなフィルターあるいはこれを減衰させるような2次振動系(低周波数ガルバノメーターなど)の併用を検討した方がよいと思われる。

最後に、ここに示した計算結果は運輸省港湾技術研究所の TOSBAC 3400 を用いて求めたもの<sup>2)</sup>の一部であることをお断りする。

#### 文 献

- 1) Ayre, R.S.: Transient Responce to Step and Pulse Functions, Shock and Vibration Handbook, Vol. 1, McGraw-Hill, 1961, pp. 8-1~54.
- 2) 合田良実: 衝撃荷重の測定について一減衰振動系の衝撃応答特性一, 港湾技研資料, No. 33, 1967年11月, pp. 1~41.

(1968. 1. 18・受付)