

地震時における最大地動の確率論的研究*

A STATISTICAL STUDY OF THE MAXIMUM GROUND MOTION IN STRONG EARTHQUAKES

後藤 尚 男**・亀田 弘 行***
By Hisao Goto and Hiroyuki Kameda

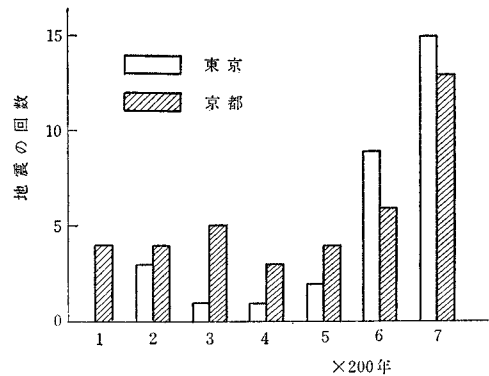
要 旨 本文は地震時の最大地動を確率論の立場から解析したもので、過去における地震発生資料と強震地震計の記録に基づいて地震の確率モデルを設定し、これより1回の地震による最大地動、さらに将来のある期間における最大地動の確率統計的性質などについて論じ、耐震設計のための有力な資料たらしめようとしたものである。

1. 緒 論

耐震設計の対象となる地震動を考えると、これを二つの面から確率事象としてとらえることが妥当であろうと考えられる。その一つは不連続過程とみなせる地震発生の不規則性、他の一つは連続過程である地震動の不規則性である。地震の発生は本質的には確定現象であるかも知れないが、地震予知への道の未だ遠い現段階においては、これを確率論的に取り扱うことの耐震工学的意義は大きいものと考えられる。一方地震時における地盤の運動は、震源から観測点至る媒体の複雑な構成要素によってきわめて不規則な波形を呈するのであるから、これを確率統計的に処理することは将来ますます重要となるであろう。本研究は、地震をこれらの2点より確率論的に解析し、地震動の確率統計的性質について論じたものである。

地震の発生を統計的に処理する上での最大の問題点は、過去の地震記録の不備にある。世界有数の地震国であるわが国でも、一つの地方について見れば、大地震は平均数十～数百年の間隔でしか起こらないために、近代科学以前の時代にまで遡った地震の記録が必要となる。この方面では、過去千数百年間の地震の記録に再現期間 (return period) の概念を適用して、全国各地での75, 100, 200年間の最大地震加速度の期待値を与える地図を作製した河角博士の研究¹⁾が著名である。その中で、古い時代の地震については独自の方法でその震央位置、

図-1 200年ごとの地震の回数
($I \geq V$; A.D. 565~1964)



マグニチュードを推定して過去の大地震の発生時期、位置、規模の一覧表を与えており、これによって過去の大地震の地理的な分布についても統計的处理を可能にしたという意味で、同論文の果たした役割は大きいと考えられるが、一方そこでは重要な問題点が未解決のまま残されている。それは、上述の地震についての記録が各時代における大地震をすべて網羅しているとは考え難く、その正確さは各時代における社会的・政治的条件の影響を受けている可能性が大きいということである。たとえば図-1は、過去の被害地震のうち発生時期、震央、マグニチュードがわかっている地震 (理科年表, 1966) による東京・京都での震度階を河角博士の方法¹⁾によって算出し、震度階V以上*1)の地震の回数を200年ごとに区切って示したものであるが、これによると、古くから都のあった京都では古い時代でも比較的多くの地震が記録されているのに対し、東京については、江戸幕府の成立とともに地震の数が急激に増加している。

このように、現在得られる過去の地震記録には、一般に時代を遡るほど記録もれの多い可能性が大きい。これに対し、記録された地震の総数を全期間の長さで割って単位期間における地震の平均回数とする河角博士の方法によると、将来の地震の頻度を過小に評価する恐れがある。村松郁栄教授²⁾はこの点を指摘し、地震観測が組織的に行なわれるようになった明治以後100年間近くの

* 本論文は Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. 29, Part 4 (Oct. 1967) (以下前論文と記す) に発表したものに若干の考察を加えてまとめたものである。

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室
*** 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科 博士課程 土木工学専攻

*1 以後特に断わらないかぎり、“震度階 V, VI”などは気象庁の震度階 (JMA scale) を意味する。

地震記録に基づき、河角博士と同様に再現期間の概念を用いて50年間の最大地震速度の期待値を算出した。しかしこれによって、統計処理に利用された地震は河角博士の論文と比較して半数以下になっており、貴重な地震記録を十分に活用し得ていないうらみが残るであろう。

著者らもまた、将来の地震発生を推定するために過去の地震記録を統計的に処理する場合、記録もれの少ない比較的最近の時代に最もウェイトを置いた評価を行なうべきであると考え、本研究では、この立場に矛盾することなくそれ以前の時代の地震記録をも解析に取り入れるような確率モデルを考案した。

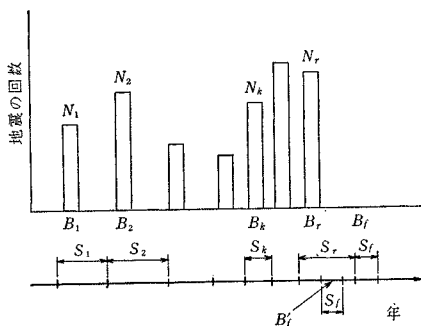
また上述の諸研究では最大地震動の平均値を示しているのみであるが、本研究では地震動を連続な確率過程として取り扱い、1回の地震における最大地動をも確率変数として解析することによって、より基本的な確率量である確率分布関数を求め、これにより将来の地震動を非超過確率の面からも評価できるようにした。

2. 地震の確率モデル

(1) 地震の発生過程

過去の時代を r 個の期間 B_1, B_2, \dots, B_r に分け、それぞれの長さを S_1, S_2, \dots, S_r 年とする。図-2に見るよ

図-2 地震発生の確率モデル



うに、ある地域が B_k 期間 ($k=1, 2, \dots, r$) で N_k 個の地震に見舞われたとすると、その地域での過去の地震の総数 N は、

$$N = \sum_{k=1}^r N_k$$

で表わされる。これら N 個のうち、 $n_{I_1}, n_{I_2}, \dots, n_{I_m}$ 個の地震における震度階がそれぞれ I_1, I_2, \dots, I_m であったとすると、 N は当然次式のようにも表わされる。

$$N = \sum_{I=1}^m n_{I_i}$$

また、

$$P_k = N_k / N, \quad (k=1, 2, \dots, r) \dots\dots\dots(1)$$

とおくと、明らかに、

$$\sum_{k=1}^r P_k = \sum_{k=1}^r N_k / N = 1$$

以上の性質を持つ地震記録に対し、地震の発生は独立事象であるとして、その確率モデルをつぎのように設定する。すなわち、 B_k 期間についてみると、この記録は N 回の Bernoulli 試行列の実現値であり、 N 回のうち、 $n_{I_1}, n_{I_2}, \dots, n_{I_m}$ 回の試行がそれぞれ震度階 I_1, I_2, \dots, I_m の地震について行なわれたものとする。しかし各試行における生起確率を P_k とすると、この確率 P_k は、全体の記録における B_k 期間の重要度を示すものであり、かかる P_k を用いて各期間の地震危険度を加重評価することにより、時代によって異なると思われる過去の地震記録の精度を補正しようとするのがこの確率モデルのねらいである。

もちろんこのモデルにも問題点は残されている。たとえば、地震の標本数が地震相互間の震度階の相関を調べるのに十分なほどではないために、 B_k 期間で発生するすべての地震の震度階は独立として取り扱っているが、そのために、最高震度 I_m の地震が2回以上 B_k 期間に起こる確率などは、このモデルでは実際より若干大きく出ているかも知れない。また標本の数は、当然 P_k の精度にも影響をおよぼすであろう。しかし実際の記録について震度階別に検討を行なった結果、現在得られる資料の範囲内では、この確率モデルは一応妥当であろうとの結論を得ている。

つぎに、最近の S_r 年間 (B_r 期間) と将来の S_f 年間 (B_f 期間と呼ぶ; ただし $S_f < S_r$) では地震危険度に変化がないとすると、 B_f における地震発生の予測のためには、 B_r 中の S_f 年間 (B_f' 期間と呼ぶ) について解析すればよい。1回の Bernoulli 試行で地震が B_f' に発生する確率 P_f は、

$$P_f = P_r S_f / S_r = N_r S_f / N S_r \dots\dots\dots(2)$$

以上の議論より、 B_f' 期間 (B_f 期間) で震度階 I_1, I_2, \dots, I_m の地震がそれぞれ $k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m}$ 回発生する確率 $P_c(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})$ は次式のように表わされる。

$$P_c(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m}) = \prod_{j=1}^m \left\{ \binom{n_{I_j}}{k_{I_j}} P_f^{k_{I_j}} (1 - P_f)^{n_{I_j} - k_{I_j}} \right\} = \prod_{j=1}^m b(k_{I_j}; n_{I_j}, P_f) \dots\dots\dots(3)$$

ただし、

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

は二項分布関数である。また、

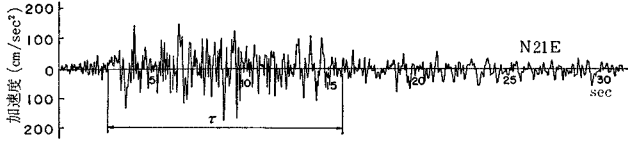
$$N_{I_j}^* = \sum_{I=j}^m n_{I_i}$$

とおくと、 B_f' 期間 (B_f 期間) で生ずる震度階 I_j 以上の地震の数 l_{I_j} の確率分布は $b(l_{I_j}; N_{I_j}^*, P_f)$ で与えられるから、その期待値 $E[l_{I_j}]$ は、

$$E[l_{I_j}] = N_{I_j}^* P_f = N_{I_j}^* N_r S_f / N S_r \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる。したがって、震度階 I_j 以上の地震の B_f' 期間 (B_f 期間) における再現期間 T_{rI_j} は次式より算

図-3 Taft, Calif., U.S.A., 1952.7 の加速度記録



出される。

$$T_{r1j} = S_f / E[l_{1j}] = NS_r / N_{1j} * N_r \dots\dots\dots (5)$$

(2) 地震動の表現

強震時の地震動が不規則なものであることはよく知られているが、これを確率過程として取り扱う場合、その定常性ないしは非定常性、振幅の確率分布、周期特性などを明らかにしなければならない。

地震動が全体として統計的に非定常な性質を持つことは明らかであるが、強震加速度記録から、強震時には最大加速度を生ずる前後の数秒ないしは十数秒に比較的定常的な部分がある場合が多いことが知られている。図-3は、このような定常部分が比較的長い加速度記録の一例である。地震時の最大地動や地震動の最強部の強度などを論ずる場合、地震の始めと終りの過渡的な部分はあまり重要ではないと考えられるから、本研究では上述の定常部分のみを取り扱うことにする。そこで地震加速度 $x(t)$ を次式で表わす。

$$x(t) = \beta f(t; \tau) g(t) \dots\dots\dots (6)$$

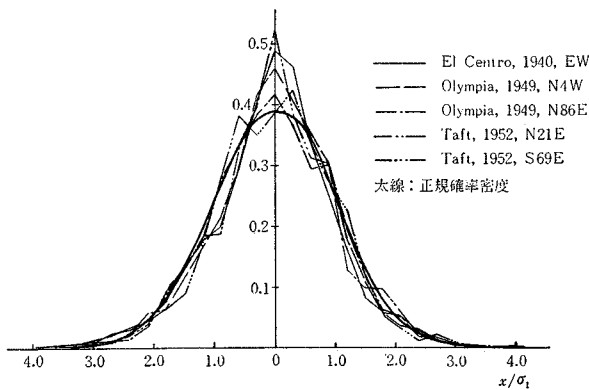
ここに $g(t)$ は平均値 0、分散 1 なる無次元定常確率過程、 β は加速度の次元を持つ定数、 $f(t; \tau)$ は継続時間に関するパラメーター τ を含む確定時間関数であり、つぎの形のものを採用する。

$$f(t; \tau) = u_-(t) - u_+(t - \tau) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq \tau \\ 0; & t < 0, t > \tau \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $u_{\pm}(t)$ は非対称単位階段関数である。かくして、 $x(t)$ は $0 \leq t \leq \tau$ で平均値 0、分散 β^2 なる定常確率過程となる。また $f(t; \tau)$ を t で微分すると、

$$\dot{f}(t; \tau) = \delta_-(t) - \delta_+(t - \tau) \dots\dots\dots (8)$$

図-4 地震加速度定常部分の振幅確率密度



ただし、 $\delta_{\pm}(t)$ は非対称単位衝撃関数である。

つぎに、アメリカで得られた最大加速度 200~300 cm/sec² 程度の強震加速度記録の定常部分の振幅確率密度を計算して図-4に示した。地震動が互いに独立な振幅・位相を持つ調和成分を重ね合せたものであると考えると、

中心極限定理によりその振幅は正規分布にしたがうはずである。図-4の各成分について χ^2 検定を行なった結果、Olympia N 86 E と Taft S 69 E は有意水準 5% 以上で正規分布とみなせることがわかった。他の成分については有意水準は 0.1% のオーダーとなり、厳密に正規分布とみなすことは無理であるが、その場合でも同図からわかるように、全体として正規分布と大きな差はない。これらのことから、以下においては、 $x(t)$ は正規分布にしたがうものと仮定する。かくして $x(t)$ の確率密度 $\phi(x; t)$ および $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の同時確率密度 $\phi_j(x, \dot{x}; t)$ はそれぞれ次式のように与えられる。

$$\phi(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2\right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\phi_j(x, \dot{x}; t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \cdot \left\{\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)\left(\frac{\dot{x}}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{\dot{x}}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right] \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 σ_1 と σ_2 はそれぞれ $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の標準偏差、 ρ_{12} は $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の相関係数で、次式より算出される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1(t) = \{E[x^2(t)]\}^{1/2} = \beta\sigma_{g1} f(t; \tau) \\ \sigma_2 &= \sigma_2(t) = \{E[\dot{x}^2(t)]\}^{1/2} = \beta\{\sigma_{g1}^2 \dot{f}^2(t; \tau) + \sigma_{g2}^2 f^2(t; \tau)\}^{1/2} \\ \rho_{12} &= \rho_{12}(t) = \frac{E[x(t)\dot{x}(t)]}{\sigma_1\sigma_2} \\ &= \beta^2 \frac{\sigma_{g1}^2}{\sigma_1\sigma_2} f(t; \tau) \dot{f}(t; \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

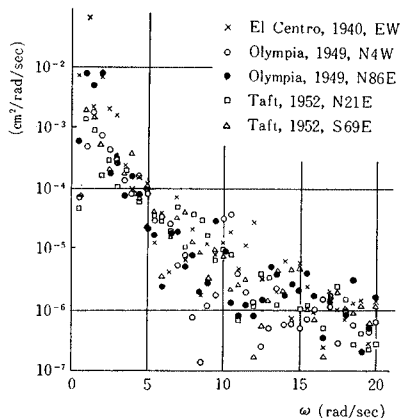
ここに $E[z]$ は確率変数 z の期待値を表わす。また σ_{g1} 、 σ_{g2} はそれぞれ $g(t)$ 、 $\dot{g}(t)$ の標準偏差であり、 $g(t)$ のパワー スペクトル $S_g(\omega)$ を用いて次式のように表わされる。

$$\sigma_{g1}^2 = E[g^2(t)] = \int_0^{\infty} S_g(\omega) d\omega \dots\dots\dots (12)$$

$$\sigma_{g2}^2 = E[\dot{g}^2(t)] = \int_0^{\infty} \omega^2 S_g(\omega) d\omega \dots\dots\dots (13)$$

線型 1 自由度振動系の共振曲線で地震加速度のパワー スペクトルを表わすことがしばしば行なわれるが、この方法によると、式 (13) の積分が発散する。したがって、ここでは図-4で取り扱った強震記録に基づいて $S_g(\omega)$ の表示式を求める。これらの加速度記録を 2 回積分して変位記録とし、そのパワー スペクトルを計算して図-5を得た。同図から、地震動変位のパワー スペクトルは片対数目盛で大略直線的、普通目盛では指数関数的に減少する

図-5 地震動変位のパワースペクトル



ことがわかる。しかして地震加速度のパワースペクトルは変位のパワースペクトルに ω^4 を乗じて得られることを考慮し、さらに $g(t)$ の分散が1となるように係数を定めて、 $S_g(\omega)$ をつぎの形で表わす。

$$S_g(\omega) = \frac{128}{3} \omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \exp\left(-4\frac{\omega}{\omega_0}\right) \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 ω_0 は卓越円振動数で、 $S_g(\omega)$ は $\omega=\omega_0$ に単一のピークを持つ。式(14)を式(12),(13)に代入することにより次式をうる。

$$\sigma_{g1}=1, \sigma_{g2}=\sqrt{30}\omega_0/4 \dots\dots\dots(15)$$

また式(14)に対する $g(t)$ の自己相関関数 $R(\tau')$ は次式より算出される。

$$R(\tau') = \frac{1}{\sigma_{g1}^2} \int_0^\infty S_g(\omega) \cos \omega \tau' d\omega$$

$$= \left\{ 1 - 10 \left(\frac{\omega_0 \tau'}{4}\right)^2 + 5 \left(\frac{\omega_0 \tau'}{4}\right)^4 \right\} / \left\{ 1 + \left(\frac{\omega_0 \tau'}{4}\right)^2 \right\}^5 \dots\dots\dots(16)$$

つぎに、時刻 t と $t+dt$ の間で $|x(t)|$ が α を越える確率を $N_{c\alpha}(t)dt$ で表わすと、 $N_{c\alpha}(t)$ は次式より算出される³⁾。

$$N_{c\alpha}(t) = \int_{-\infty}^0 |\dot{x}| \phi_j(-\alpha, \dot{x}; t) d\dot{x} + \int_0^\infty \dot{x} \phi_j(\alpha, \dot{x}; t) d\dot{x} \dots\dots\dots(17)$$

$x(t)$ が正規分布をなす場合には、式(10)を式(17)に代入して次式をうる。

$$N_{c\alpha}(t) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma_1}\right)^2\right\} \left[\frac{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}{\pi} \exp(-\kappa^2) + \frac{\rho_{12}}{\sqrt{2}\pi} \frac{\alpha}{\sigma_1} \{1 + \operatorname{erf}(\kappa)\} \right] \dots\dots\dots(18)$$

ただし、

$$\kappa = \frac{\rho_{12}}{\sqrt{2(1-\rho_{12}^2)}} \frac{\alpha}{\sigma_1}$$

地震速度 $v(t)$ についても同様の議論により確率モデルを導入する。すなわち式(6)の代りに

$$v(t) = \beta f(t; \tau) \int_{-\infty}^t g(t) dt \dots\dots\dots(19)$$

とおくと、式(9),(10)に対応する確率密度関数は次

式のように表わされる。

$$\phi(v; \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sigma_0}\right)^2\right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\phi_j(v, \dot{v}; t) = \frac{1}{2\pi\sigma_0\bar{\sigma}_1\sqrt{1-\rho_{01}^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{01}^2)}\left\{\left(\frac{v}{\sigma_0}\right)^2 - 2\rho_{01}\left(\frac{v}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\dot{v}}{\bar{\sigma}_1}\right) + \left(\frac{\dot{v}}{\bar{\sigma}_1}\right)^2\right\}\right] \dots\dots\dots(21)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_0(t) = \{E[v^2(t)]\}^{1/2} = \beta \sigma_{g0} f(t; \tau) \\ \bar{\sigma}_1 &= \bar{\sigma}_1(t) = \{E[\dot{v}^2(t)]\}^{1/2} = \beta \{\sigma_{g0}^2 f^2(t; \tau) + \sigma_{g1}^2 f^2(t; \tau)\}^{1/2} \\ \rho_{01} &= \rho_{01}(t) = \frac{E[v(t)\dot{v}(t)]}{\sigma_0\bar{\sigma}_1} \\ &= \beta^2 \frac{\sigma_{g0}^2}{\sigma_0\bar{\sigma}_1} f(t; \tau) f'(t; \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ここに σ_{g1} は式(12)より、 σ_{g0} は次式より算出される。

$$\sigma_{g0}^2 = E\left[\left\{\int_{-\infty}^t g(t) dt\right\}^2\right] = \int_0^\infty \frac{S_g(\omega)}{\omega^2} d\omega \dots\dots\dots(23)$$

したがって式(14),(23)より

$$\sigma_{g0} = 2/\sqrt{3}\omega_0 \dots\dots\dots(24)$$

をうる。

式(17)中の \dot{x} 、 $\phi_j(-\alpha, \dot{x}; t)$ 、 $\phi_j(\alpha, \dot{x}; t)$ をそれぞれ \dot{v} 、 $\phi_j(-v_m, \dot{v}; t)$ 、 $\phi_j(v_m, \dot{v}; t)$ で置きかえることにより、同式の $N_{c\alpha}(t)$ に対応して速度の場合の $N_{cvm}(t)$ が得られる。同様に σ_1 、 σ_2 、 ρ_{12} の代りに、 σ_0 、 $\bar{\sigma}_1$ 、 ρ_{01} を用いることにより、式(18)は速度の場合に適用できる。

$x(t)$ が定常となる $0 \leq t \leq \tau$ では、式(11),(18)は次式のように簡単な形となる。

$$\sigma_1 = \beta\sigma_{g1} = \beta, \sigma_2 = \beta\sigma_{g2} = \frac{\sqrt{30}}{4}\beta\omega_0 = 2.7386 \frac{\pi\beta}{T_0},$$

$$\rho_{12} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

$$N_{c\alpha}(t) = N_{c\alpha} = \frac{2.7386}{T_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma_1}\right)^2\right\} \dots\dots\dots(26)$$

ただし、 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ は $x(t)$ の卓越周期である。同様に速度に関する項も簡略化されてつぎのような形になる。

$$\sigma_0 = \frac{2\beta}{\sqrt{3}\omega_0} = \frac{\beta T_0}{\sqrt{3}\pi}, \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 = \beta, \rho_{01} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

$$N_{cvm}(t) = N_{cvm} = \frac{\sqrt{3}}{T_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{v_m}{\sigma_0}\right)^2\right\} \dots\dots\dots(28)$$

3. 1回の地震による最大地動の確率分布

(1) 基本式

前節で設定した地震動の確率モデルから、1回の地震における最大地動の確率分布を求める。まず最大加速度 α について考えると、その確率分布 $\Phi_s(\alpha)$ は次式により与えられる。

$$\Phi_s(\alpha) = P[\max|x(t)| \leq \alpha; 0 \leq t \leq \tau]$$

$$= P[x(0) \leq \alpha] P_0(\alpha; \tau) \dots\dots\dots(29)$$

ただし、

$P_0(\alpha; \tau) = P[\{\max|x(t)| \leq \alpha; 0 < t \leq \tau\} | |x(0)| \leq \alpha]$
 ここに $P[R_2|R_1]$ は、事象 R_1 が実現した場合に R_2 が実現する条件付確率である。 $x(t)$ が連続過程であることを考慮すると、出生過程に対する基礎微分方程式⁴⁾から、 $P_0(\alpha; t)$ は次式のように表わされる。

$$\frac{d}{dt}P_0(\alpha; t) = -c_0(\alpha; t)P_0(\alpha; t) \dots\dots\dots(30)$$

ただし、

$$c_0(\alpha; t)dt = P[|x(t+dt)| > \alpha | \max|x(t')| \leq \alpha; 0 \leq t' \leq t] \\ = \frac{P[|x(t+dt)| > \alpha \cap \{\max|x(t')| \leq \alpha; 0 \leq t' \leq t\}]}{P[\max|x(t')| \leq \alpha; 0 \leq t' \leq t]} \dots\dots\dots(31)$$

式 (30) を初期条件 $P_0(\alpha; 0) = 1$ のもとで解くと、

$$P_0(\alpha; \tau) = \exp\left\{-\int_0^\tau c_0(\alpha; t)dt\right\} \dots\dots\dots(32)$$

ところが、 $c_0(\alpha; t)$ の厳密な表示式を与えることは、きわめて困難であるので、ここでは近似的に、 $0 \leq t' < t$ で $\max|x(t')| \leq \alpha$ であるか否かは $c_0(\alpha; t)$ に影響をおよぼさないものとする、式 (31) の近似式として次式をうる²⁾。

$$c_0^*(\alpha; t)dt = P[|x(t+dt)| > \alpha \cap |x(t)| \leq \alpha] / P[|x(t)| \leq \alpha] \\ = N_{c_\alpha}(t) / P[|x(t)| \leq \alpha] \dots\dots(33)$$

かくして式 (29), (32), (33) より $\phi_s(\alpha)$ の近似値 $\psi_s(\alpha)$ が次式によって算出される。

$$\psi_s(\alpha) = P[|x(0)| \leq \alpha] \exp\left\{-\int_0^\tau c_0^*(\alpha; t)dt\right\}$$

これを前節の確率モデルに当てはめると、 $0 \leq t \leq \tau$ では式 (25), (26) が適用でき、 $|x(t)|$ が α を超える過程は Poisson 過程となって、

$$\psi_s(\alpha) = \text{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right) \exp\left[-2.7386 \frac{\tau}{T_0}\right] \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\} / \text{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right) \dots\dots(34)$$

ここで、 $\zeta = \alpha/\beta$, $\psi_{sn}(\zeta) = \psi_s(\alpha)$ とおくと、

$$\psi_{sn}(\zeta) = \text{erf}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \exp\left\{-2.7386 \frac{\tau}{T_0}\right\} \\ \cdot \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) / \text{erf}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \dots\dots\dots(35)$$

同様に、最大地震速度 v_m に対して、その確率分布の近似値 $\tilde{\psi}_s(v_m)$ はつぎのように求められる。

$$\tilde{\psi}_s(v_m) = \text{erf}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2}\beta T_0} v_m\right) \exp\left[-\sqrt{3} \frac{\tau}{T_0}\right] \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\beta T_0} v_m\right)^2\right\} / \text{erf}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{2}\beta T_0} v_m\right) \dots\dots\dots(36)$$

または

²⁾ 前論文では右辺の分母を省略した形を用いたが、通常の数値計算の範囲では式 (33) との差はごくわずかである。

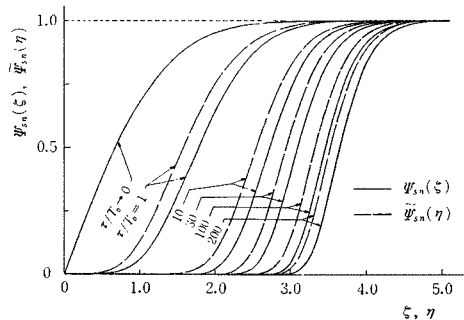
$$\tilde{\psi}_{sn}(\eta) = \text{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \exp\left\{-\sqrt{3} \frac{\tau}{T_0}\right\} \\ \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) / \text{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \dots\dots\dots(37)$$

ただし、 $\eta = v_m/\sigma_0 = (\sqrt{3}\pi/\beta T_0)v_m$

式 (34)~(37) で行なった Poisson 過程による近似は、 $x(t)$ または $g(t)$ が理想的な白色雑音である場合には厳密解となるが、式 (14) のパワー スペクトルを持つ確率過程が白色雑音とは異なった様相を示すのは当然予想されることである。そこで以下において、式 (34)~(37) の精度の検討を行なう。

上述の議論から、Poisson 過程による近似は、 $x(t)$, $v(t)$ のパワー スペクトルが広帯域の特性を有して白色雑音に近い場合、また α , v_m (または ζ , η) が大きく、 $t=t$ 以前に同じレベルを超えた時刻の影響を無視できる場合に精度が良いと考えられる。また $\tau/T_0 \rightarrow 0$ に対しては式 (34)~(37) はいかなる場合にも厳密解を与える。一方種々の τ/T_0 に対する $\psi_{sn}(\zeta)$, $\tilde{\psi}_{sn}(\eta)$ の値を計算して図-6 に示したが、同図から τ/T_0 がある程度大きくなると、 ζ , η の小さな値に対する $\psi_{sn}(\zeta)$, $\tilde{\psi}_{sn}(\eta)$ はほとんどゼロに近い値をとり、 ζ , η がかなり大きくなってはじめてその値が増大する。このような場合には、 τ/T_0 が大なるほどかえって式 (34)~(37) の精度が良くなるものと考えられる。本研究は、実際の大地震における τ/T_0 は 10~100 の範囲にあるものと考えて、その下限である $\tau/T_0=10$ と後の数値計算に用いた $\tau/T_0=30$ の 2 通りについて考察する。

図-6 1回の地震における最大地動の確率分布 (Poisson 過程による近似値)



はじめに $\phi_s(\alpha)$ の上・下界を算出し、それらを $\psi_s(\alpha)$ と比較検討する。連続過程における超過確率の上・下界を求める方法が A.M. Freudenthal 教授・篠塚正宣助教授³⁾によって発表されているが、ここでは両氏の方法を改良して、さらに精度を向上させることを試みた。まず $\phi_s(\alpha)$ の下界について論ずる。

$$-\infty < t' \leq t$$

とおくと、 $\max|x(t')|$ が α を超える確率の微分形は次式により与えられる³⁾。

$$dP[\max|x(t')| > \alpha] = P[\{\max|x(t')| \leq \alpha\}$$

$$\cap \{ |x(t+dt)| > \alpha \}$$

つぎに、 $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+1} = t$ なる $\tau_k (k=1, 2, \dots, n+1; n=n(t))$ に対して、

$$P[\{\max |x(t')| \leq \alpha\} \cap \{ |x(t+dt)| > \alpha \}] < P[\{\prod_{k=1}^{n(t)+1} |x(\tau_k)| \leq \alpha\} \cap \{ |x(t+dt)| > \alpha \}]$$

ところで、 $x(t) = x(\tau_{n+1})$ が $x(\tau_1), x(\tau_2), \dots, x(\tau_n)$ と独立であるように $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ を選ぶと、明らかに、

$$P[\{\prod_{k=1}^{n(t)+1} |x(\tau_k)| \leq \alpha\} \cap \{ |x(t+dt)| > \alpha \}] = P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] \cdot P[|x(t+dt)| > \alpha] \cap |x(t)| \leq \alpha]$$

$$= P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] \cdot N_{c_a}(t) dt$$

したがって、

$$dP[\max |x(t')| > \alpha] < P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] \cdot N_{c_a}(t) dt$$

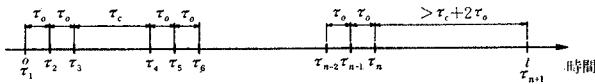
これよりただちに、

$$P[\max |x(t)| > \alpha] < \int_{-\infty}^{\infty} P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] \cdot N_{c_a}(t) dt$$

をうる。しかして $\Phi_s(\alpha)$ は $\max |x(t)|$ が α を超えない確率であるから、 $\Phi_s(\alpha)$ の下界 $\Phi_{sl}(\alpha)$ が次式のように求められる。

$$\Phi_{sl}(\alpha) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] \cdot N_{c_a}(t) dt < \Phi_s(\alpha) \dots \dots \dots (38)$$

図-7 $\tau_k (k=1, 2, \dots, n+1)$ の選び方



本研究では 図-7 に示したように τ_k を選ぶ。同図中の τ_0 は、 $R(\tau')$ をゼロにする最小の τ' であり、また τ_c は、 $\tau_a \geq \tau_c$ なる任意の τ_a に対して $R(\tau_a)$ が十分小さくなるように選ぶ。さらに、 $n(t)$ は 3 の整数倍にとる。これより、 $x(t)$ と $x(\tau_1), x(\tau_2), \dots, x(\tau_n)$ とは独立であり、また $x(\tau_{3p-2}), x(\tau_{3p-1}), x(\tau_{3p})$ と $x(\tau_{3s-1}), x(\tau_{3s-1}), x(\tau_{3s})$ 、($p, s=1, 2, \dots, n(t)/3; p \neq s$) とは独立である。さらに $x(\tau_{3p-2}), x(\tau_{3p})$ と $x(\tau_{3p-1})$ とは独立であるが、 $x(\tau_{3p-2})$ と $x(\tau_{3p})$ とは独立ではない。以上の議論より次式をうる。

$$P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] = \prod_{p=1}^{n(t)/3} P[\prod_{j=-2}^0 |x(\tau_{3p+j})| \leq \alpha] = \prod_{p=1}^{n(t)/3} \{ P[|x(\tau_{3p-1})| \leq \alpha] \cdot P[|x(\tau_{3p-2})| \leq \alpha] \cap |x(\tau_{3p})| \leq \alpha \}$$

ここでは $\tau_1=0$ としているから、前節の地震動の確率モデルに対しては、上式はつぎのように書ける。

$$P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] = \{ P[|x(\tau_{3p-1})| \leq \alpha] \cdot P[|x(\tau_{3p-2})| \leq \alpha] \cap |x(\tau_{3p})| \leq \alpha] \}^{n(t)/3} = \{ p_s(\alpha) \}^{n(t)/3} \dots \dots \dots (39)$$

ただし、

$$p_s(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right) \int_0^{\alpha/\beta} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \cdot \left[\operatorname{erf}\left\{ \frac{1}{\nu} \left(\frac{\alpha}{\beta} + R(2\tau_0) \cdot \xi \right) \right\} + \operatorname{erf}\left\{ \frac{1}{\nu} \left(\frac{\alpha}{\beta} - R(2\tau_0) \cdot \xi \right) \right\} \right] d\xi$$

$$\nu = \sqrt{2(1 - \{R(2\tau_0)\}^2)}$$

式 (39) を式 (38) に代入して積分を行なえばよいが、 $t=-0$ と $t=\tau+0$ では $N_{c_a}(t)$ として式 (18) を用いなければならない。またその際、式 (7), (8), (11) からわかるように、単位階段関数と単位衝撃関数が関係する。そこで t 軸上の微小区間でこれらの関数を折線近似して積分を遂行し、その後この微小区間の長さをゼロにすることによって次式が得られた。

$$\Phi_{sl}(\alpha) = \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\beta}\right) - 2.7386 \frac{\tau}{KT_0} \frac{1 - \{p_s(\alpha)\}^K}{1 - p_s(\alpha)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\} \dots \dots \dots (40)$$

ただし、 $K=n(t)/3$

つぎに、 $\Phi_s(\alpha)$ の上界 $\Phi_{su}(\alpha)$ は容易に次式のように求められる。

$$\Phi_{su}(\alpha) = P[\prod_{k=1}^{n(t)} |x(\tau_k)| \leq \alpha] = \{ p_s(\alpha) \}^{K+1} > \Phi_s(\alpha) \dots \dots \dots (41)$$

ただし、 $\tau = \tau + \tau_c + 2\tau_0$

式 (40), (41) は式 (35) と同様に変数を無次元化して次式のように書ける。

$$\Phi_{sln}(\zeta) = \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) - 2.7386 \frac{\tau}{KT_0} \frac{1 - \{p_{sn}(\zeta)\}^K}{1 - p_{sn}(\zeta)} \cdot \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \dots \dots \dots (42)$$

$$\Phi_{sun}(\zeta) = \{ p_{sn}(\zeta) \}^{K+1} \dots \dots \dots (43)$$

ただし、 $\zeta = \alpha/\beta$, $p_{sn}(\zeta) = p_{sn}(\alpha/\beta) = p_s(\alpha)$

式 (16) から容易に次式をうる。

$$\tau_0/T_0 = 0.2068, \quad R(2\tau_0) = -0.4005$$

また、 $\tau_c/T_0 = 3.5$ にとれば十分である。これらのデータを用いて $\Phi_{sln}(\zeta)$, $\Phi_{sun}(\zeta)$ を $\tau/T_0 = 10, 30$ について計算し、Poisson 過程による $\Psi_{sn}(\zeta)$ とともに 図-8 に示した。同図より、 $\tau/T_0 = 10$ では $\zeta > 3.2$ で、 $\tau/T_0 = 30$ では $\zeta > 3.5$ で $\Phi_{sln}(\zeta)$ と $\Psi_{sn}(\zeta)$ とがほとんど一致しており、これは非超過確率 0.8 以上の範囲に相当することがわかる。このことは、この範囲では、 $x(t)/\beta$ が $(t, t+dt)$ で ζ を超えるか否かは、實際上それより前の経歴には無関係であり、Poisson 過程による近似

図-8 1回の地震における最大地動の確率分布の上・下界

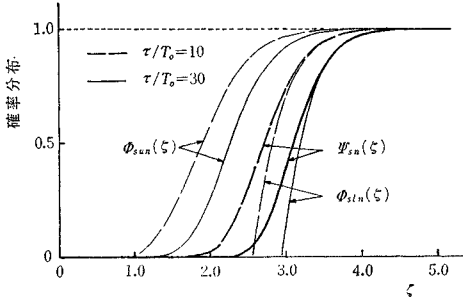


図-9 ランダム地震動の例

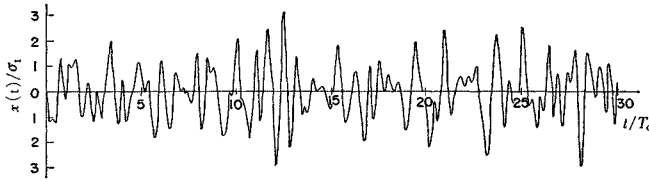
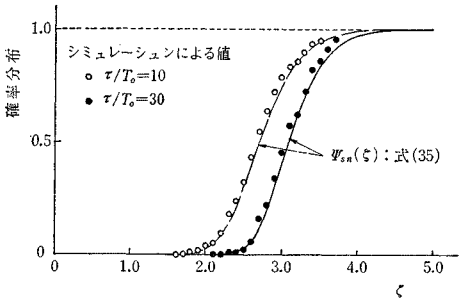


図-10 1回の地震における最大地動の確率分布 (シミュレーションによる実験値)



が十分に正確であることを示している。zetaの小さい範囲については $\psi_{sn}(zeta)$ がほとんどゼロに近いが、 $\phi_{sun}(zeta)$ もまたこの範囲ではゼロに近い値となっている。

つぎに、 $1.0 < zeta < 3.0$ 程度の範囲については、シミュレーションの結果と Poisson 過程による近似式とを比較検討した。 $\tau/T_0=10$ については 219 個、 $\tau/T_0=30$ については 73 個のランダム地震動を電子計算機上で発生させ、それらの最大値の累積頻度分布より実験的な確率分布を求めた。シミュレーションの手法としては、著者の 1 人と土岐憲三・秋吉 卓両氏⁶⁾による方法を用いた。図-9 に発生させたランダム地震動の一例、図-10 にシミュレーションによる最大地震動の確率分布を示した。同図より、Poisson 過程による近似式は、シミュレーションによる実験値とかなりよく一致していることがわかる。

以上は最大地震加速度について述べたが、最大地震速度の確率分布 $\hat{\phi}_s(v_m)$ についても同様の検討を行なった結果、Poisson 過程による近似は十分な精度を持つことが確かめられた。これらの議論より、式 (34)~(37) は、前節 2.(2) の確率モデルにおける最大地震動の確率分

布の近似値として十分な精度を持っていると結論できよう。

(2) パラメーター β

前節において地震動を式 (6), (19) で表わしたが、その強度は、加速度の次元を持つパラメーター β によって決まる。いま震度階 I の地震に対応する β を β_I で表わし、この場合の $\phi_s(\alpha)$, $\psi_s(\alpha)$ をそれぞれ $\phi_s(\alpha; I)$, $\psi_s(\alpha; I)$ と書く。一方震度階と最大地震加速度の関係を与える経験式より、震度階 I に対して加速度 α_I が得られたとする。本研究では、震度階 I の地震における最大加速度の期待値が α_I に等しくなるように β_I を決定する。すなわち

$$E[\alpha] = \alpha_I \dots\dots\dots (44)$$

任意の確率変数 z の期待値は、その確率分布 $\phi(z)$ を用いてつぎのように表わせる。

$$E[z] = \int_{-\infty}^{\infty} z d\phi(z) = \lim_{G \rightarrow \infty} \int_{-G}^G z d\phi(z) = \int_0^{\infty} \{1 - \phi(z)\} dz - \int_{-\infty}^0 \phi(z) dz \dots\dots (45)$$

ここでは α は負の値をとらないから上式の第 2 項はゼロとなり、式 (44) はつぎのように書き改められる。

$$E[\alpha] = \int_0^{\infty} \{1 - \phi_s(\alpha; I)\} d\alpha = \alpha_I$$

$\phi_s(\alpha; I)$ の代りに近似値 $\psi_s(\alpha; I)$, $\psi_{sn}(zeta)$ を用いると、

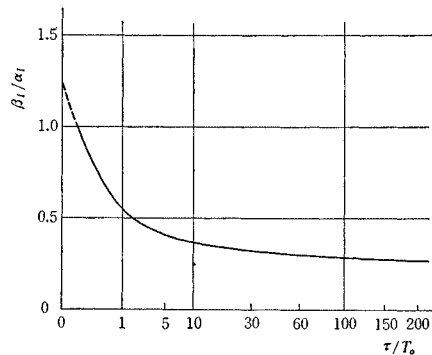
$$E[\alpha] \cong \int_0^{\infty} \{1 - \psi_s(\alpha; I)\} d\alpha = \beta_I \int_0^{\infty} \{1 - \psi_{sn}(zeta)\} d zeta = \alpha_I$$

したがって β_I は次式より算出される。

$$\beta_I = \alpha_I \int_0^{\infty} \{1 - \psi_{sn}(zeta)\} d zeta \dots\dots\dots (46)$$

前節で述べたように、 β_I^2 は地震加速度の定常部分の分散を表わす。したがって、 β_I は不規則振動論による地震応答解析において、地震動の強度を直接表わす指標となるであろう。図-11 に β_I/α_I と τ/T_0 の関係を示した。同図より、 $\tau/T_0=10 \sim 100$ の範囲では β_I/α_I は

図-11 地震動の r.m.s 強度 β_I (横軸は 3 乗根スケール)



まり変化しないことがわかる。このことは、最大地震動の期待値は地震動の継続時間にあまり影響されないことを意味しており、これにより以下の取り扱いはかなり簡単となる。

(3) 平均最大加速度 α_I の決定

式(46)のパラメーター β_I (または β) は α_I に比例するから、 α_I の決定にいかなる式を用いるかはきわめて重要である。河角博士の研究¹⁾では、同博士による次式が用いられている。

$$\alpha_I = 0.45 \times 10^{0.5I} \text{ (cm/sec}^2\text{)}, I: \text{気象庁震度階} \dots\dots\dots(47)$$

これより

$$\alpha_V = 142, \alpha_{VI} = 450, \alpha_{VII} = 1420 \text{ (cm/sec}^2\text{)}$$

ところが、この式を用いて将来の最大地震動の期待値を計算すると、後述のように、過去において震度階VII程度の地震に見舞われた地方に対する値が異常に大きくなる。一方、金井清教授²⁾は、アメリカにおける $I_{MM} = 6 \sim 8$, (I_{MM} : 修正 Mercalli 震度階) 程度の地震記録に基づき、卓越周期 T_0 をも考慮して次式を提案している。

$$\alpha_{I_{MM}} = 0.62 T_0^{-1.316} \times 10^{0.238 I_{MM}} \text{ (cm/sec}^2\text{)}, T_0: \text{(sec)} \dots\dots\dots(48)$$

$I_{MM} = 8$ は気象庁震度階では $I = V$ に対応するから、上式より

$$\alpha_V = 50 T_0^{-1.316} \text{ (cm/sec}^2\text{)} \dots\dots\dots(49)$$

つぎに $I \geq VI$ の範囲については、気象庁による地震加速度³⁾に式(49)を拡張適用する。すなわち、 $I = V$ に対する気象庁による加速度は $80 \sim 250 \text{ cm/sec}^2$ で、その中央値は 165 cm/sec^2 である。これを式(49)に用いると、 $T_0 = 0.402 \cong 0.4 \text{ sec}$ をうる。つぎに $I = VI$ に対する加速度は $250 \sim 400 \text{ cm/sec}^2$ で、その中央値は 320 cm/sec^2 である。 $I = V$ の場合と同様に $I = VI$ の場合にも $T_0 = 0.4 \text{ sec}$ に対して $\alpha_{VI} = 320 \text{ cm/sec}^2$ になるものとし、かつこの場合も α_{VI} は $T_0^{-1.316}$ に比例するものと仮定すると、

$$\alpha_{VI} = 320(T_0/0.4)^{-1.316} = 96 T_0^{-1.316} \text{ (cm/sec}^2\text{)} \dots\dots\dots(49')$$

$I = VII$ に対しては、気象庁の加速度では 400 cm/sec^2 という下限のみが与えられているが、これまでに経験された最大の地震加速度が 500 cm/sec^2 台であろうと推定されていること³⁾、震度階 V, VI の加速度の上・下限の差がいずれも約 150 cm/sec^2 とされていることから、ここでは一応 $I = VII$ では地震加速度は $400 \sim 550 \text{ cm/sec}^2$ とし、 $T_0 = 0.4 \text{ sec}$ に対して $\alpha_{VII} = 470 \text{ cm/sec}^2$ とおく。したがって $I = VI$ の場合と同様に次式をうる。

$$\alpha_{VII} = 470(T_0/0.4)^{-1.316} = 140 T_0^{-1.316} \text{ (cm/sec}^2\text{)} \dots\dots\dots(49'')$$

これらの式(49')~(49'')にもなお問題点は少な

いかも知れないが、激震時の最大地震動の平均値に関する精度の高い公式は、将来の研究に待たねばならないであろう。本研究における数値計算では一応式(47)および式(49)~(49'')を用いて、それぞれの結果を比較検討する。

4. 将来の最大地震動の確率分布

(1) 基本式

前節 3. で述べた、1回の地震における最大地震動の確率分布がわかると、これを 2. (1) で導入した地震発生の確率モデルに用いることにより、将来の一定期間におけるある地方での最大地震動の確率分布を求めることができる。

将来の B_f 期間(長さ S_f 年)における最大地震加速度 α_f の実現値を A_f とする。 B_f 期間で震度階 I_1, I_2, \dots, I_m の地震がそれぞれ $k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m}$ 回発生するという事象を $R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})$ と書けば、 $R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})$ が実現した場合の α_f の条件付確率分布 $\phi_c(\alpha_f | k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_c(\alpha_f | k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m}) &= P[A_f \leq \alpha_f | R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})] \\ &= \prod_{j=1}^m \{\phi_s(\alpha_f; I_j)\}^{k_{I_j}} \dots\dots\dots(50) \end{aligned}$$

一方事象 $R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})$ が発生する確率は式(3)で与えられるから、事象 $\{A_f \leq \alpha_f \cap R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})\}$ が生ずる確率は

$$\begin{aligned} P[A_f \leq \alpha_f \cap R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})] &= \phi_c(\alpha_f | k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m}) P_c(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m}) \\ &= \prod_{j=1}^m [\{\phi_s(\alpha_f; I_j)\}^{k_{I_j}} b(k_{I_j}; n_{I_j}, P_f)] \end{aligned}$$

さらに、もし $\bigcup_{j=1}^m (k_{I_j} \neq l_{I_j})$ であれば、 $R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})$ と $R_f(l_{I_1}, l_{I_2}, \dots, l_{I_m})$ は排反事象である。したがって、将来の B_f 期間における最大地震加速度の確率分布 $\phi_f(\alpha_f)$ は次式により表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_f(\alpha_f) &= P[\bigcup_{k_{I_1}=0}^{n_{I_1}} \bigcup_{k_{I_2}=0}^{n_{I_2}} \dots \bigcup_{k_{I_m}=0}^{n_{I_m}} \{A_f \leq \alpha_f \cap R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})\}] \\ &= \sum_{k_{I_1}=0}^{n_{I_1}} \sum_{k_{I_2}=0}^{n_{I_2}} \dots \sum_{k_{I_m}=0}^{n_{I_m}} P[A_f \leq \alpha_f \cap R_f(k_{I_1}, k_{I_2}, \dots, k_{I_m})] \\ &= \sum_{k_{I_1}=0}^{n_{I_1}} \sum_{k_{I_2}=0}^{n_{I_2}} \dots \sum_{k_{I_m}=0}^{n_{I_m}} \prod_{j=1}^m \{\phi_s(\alpha_f; I_j)\}^{k_{I_j}} \cdot b(k_{I_j}; n_{I_j}, P_f) \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

$\phi_s(\alpha_f; I_j)$ の代りに解析的表示の与えられている $\psi_s(\alpha_f; I_j)$ を用いると、 $\phi_f(\alpha_f)$ の近似値 $\psi_f(\alpha_f)$ がつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \psi_f(\alpha_f) &= \sum_{k_{I_1}=0}^{n_{I_1}} \sum_{k_{I_2}=0}^{n_{I_2}} \dots \sum_{k_{I_m}=0}^{n_{I_m}} \prod_{j=1}^m \{\psi_s(\alpha_f; I_j)\}^{k_{I_j}} \cdot b(k_{I_j}; n_{I_j}, P_f) \dots\dots\dots(52) \end{aligned}$$

同様に、 B_f 期間における最大地震速度 v_{mf} の確

率分布の近似解 $\tilde{\Psi}_f(v_{mf})$ がつぎの形で書ける。

$$\tilde{\Psi}_f(v_{mf}) = \sum_{k_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{k_{12}=0}^{n_{12}} \dots \sum_{k_{1m}=0}^{n_{1m}} \left\{ \prod_{j=1}^m [\tilde{\Psi}_s(v_{mf}; I_j)] k_{1j} \cdot b(k_{1j}; n_{1j}, P_f) \right\} \dots \dots \dots (53)$$

ただし、 $\tilde{\Psi}_s(v_{mf}; I_j)$ は β に対して β_{1j} を用いた場合の $\tilde{\Psi}_s(v_{mf})$ を表わす。

α_f, v_{mf} の期待値は、式 (45) により

$$\left. \begin{aligned} E[\alpha_f] &\equiv \int_0^\infty \{1 - \Psi_f(\alpha_f)\} d\alpha_f \\ E[v_{mf}] &\equiv \int_0^\infty \{1 - \tilde{\Psi}_f(v_{mf})\} dv_{mf} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

から算出される。

(2) 数値計算に用いた過去の地震記録

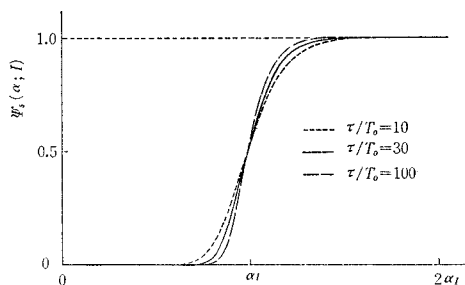
本節の数値計算では、震度階 V, VI, VII の地震のみを対象とする。震度階 IV 以下を除外したのは、この程度の地震は被害地震として古い時代の記録に残っていないものが多いであろうと考えられるためであるが、ここで問題にしている比較的大きな地震動の範囲では、震度階の低い地震による最大地動の確率分布はほとんど 1 に近い値をとるから、これらの地震を除外することによる誤差は大きくはないと考えられる。

理科年表 (1966) に記載されている過去の被害地震のうち、発生時期、震央、マグニチュードがわかっている地震による全国各地 (緯度・経度を 30' ごとに分割) での震度階を河角博士の方法¹⁾によって算出し、これより震度階 V 以上の地震のみに注目して各地での地震回数 $N, N_r, n_v, n_{vi}, n_{vii}$ および再現期間 $T_{rv}, T_{rvi}, T_{rvii}$ を求めた。 S_r は統計的には長いほど望ましいが、地震記録の正確さという点を考慮すればあまり長くできない。ここでは北海道については $S_r=150$ 年、その他の地方については $S_r=200$ 年とした。ただし本州以南では西暦 600~800 年代から地震記録が現われているのに対し、北海道での最初の地震記録は 1741 年であるから、以下の数値計算で北海道に対する結果の精度が他の地方のそれより劣ることは避けられない。表-1 に計算

表-1 過去の地震回数および再現期間の例

地名	地震の回数					S_r (年)	再現期間 (年)		
	N	n_v	n_{vi}	n_{vii}	N_r		T_{rv}	T_{rvi}	T_{rvii}
川路	3	1	0	2	3	150	50	75	75
札幌	1	1	0	0	1	150	150	∞	∞
秋田	14	7	6	1	8	200	25	50	350
仙台	11	9	1	1	7	200	29	157	314
東京	31	14	10	7	15	200	13	24	59
新潟	8	6	2	0	5	200	40	160	∞
富山	14	10	4	0	4	200	50	175	∞
名古屋	19	9	6	4	8	200	25	48	119
京都	39	20	18	1	13	200	15	32	600
鳥取	13	10	2	1	7	200	29	124	371
広島	9	5	3	1	4	200	50	113	450
高知	9	6	2	1	4	200	50	150	450
福岡	2	2	0	0	1	200	200	∞	∞
宮崎	6	4	1	1	4	200	50	150	300

図-12 1 回の地震における最大地動の確率分布 (期待値との関係)



結果の一部を示す。

(3) τ/T_0 の影響

本研究の方法によって最大地震動の確率分布を計算する際には、 τ/T_0 に適当な値を与えなければならない。前節 3. (2) でみたように、 $\tau/T_0=10\sim 100$ の範囲では β_I は (したがって α の期待値 $E[\alpha]$ も) τ/T_0 にあまり影響されないが、 $\Psi_s(\alpha; I), \tilde{\Psi}_s(v_m; I)$ についても同様のことがいえる。 τ/T_0 の種々の値に対する $\Psi_s(\alpha; I)$ の値を、横軸に期待値 α_I をとって図-12 に示したが、同図より、 τ/T_0 の上記の範囲では $\Psi_s(\alpha; I)$ の形状はほぼ相似であるとみなしてよからう。また図-13 は、 $T_0=0.5$ sec, $S_f=75$ 年に対する東京、京都での最大地震加速度の確率分布 $\Psi_f(\alpha_f)$ を τ/T_0 の値を変化させて示したものである (ただし α_I は式 (49)~(49') より決定)。同図で、 τ/T_0 の変化による $\Psi_f(\alpha_f)$ の差異は実用的には十分小さいといえよう。さらにこれらの確率分布から式 (54) により算出した期待値 $E[\alpha_f]$ の値の τ/T_0 による変化も小さく、東京で 328~336 cm/sec², 京都で 255~262 cm/sec² となった。かくして τ/T_0 の影響は実用的には無視しても差し支えない程度であることがわかったので、以下の計算においては $\tau/T_0=10$ と $\tau/T_0=100$ に対する β_I のほぼ平均値を与える $\tau/T_0=30$ を用いる。

(4) 将来の地震危険度

将来の最大地震動 α_f, v_{mf} の確率分布 $\Psi_f(\alpha_f), \tilde{\Psi}_f(v_{mf})$ およびそれらの期待値 $E[\alpha_f], E[v_{mf}]$ をわが国全域について計算した。将来の B_f 期間の長さ S_f は 75 年とした。 $\Psi_f(\alpha_f)$ の例を図-14 に示したが、これに前述の図-13 をも加えて考察を行なう。またこれらの図に対応する $E[\alpha_f]$ を表-2 に掲げた。

まず図-13, 14 で $\Psi_f(\alpha_f)$ が地方によって種々の形状を示していることが注目される。たとえば、京都に対する $E[\alpha_f]$ の値は宮崎のそれより大きい、非超過確率 90% に対する α_f は逆に宮崎の方が大きな値を示している。このことから、 $\Psi_f(\alpha_f)$ の標準的な形状を考えることは困難のようであり、ある程度詳細な確率的評価を行なう場合には、 $E[\alpha_f]$ のみでなく、各地に特有の

$\Psi_f(\alpha_f)$ を考慮することが必要となろう。

α_f の性格からみて、厳密には $\Psi_f(0)=0$ となるべきであるが、図-13, 14 では $\Psi_f(0)$ は完全にゼロにはなっていない。これは低い震度階の地震を除外したためであり、同図の $\Psi_f(0)$ は、75年以内に震度階 V 以上の地震が発生しない確率を表わしている。 $\Psi(0) \neq 0$ により $E[\alpha_f]$ などの値が受ける影響は、札幌、福岡など

図-13 75年間における最大地震加速度の確率分布 ($T_0=0.5$ sec, α_f は式 (49)~(49') より決定)

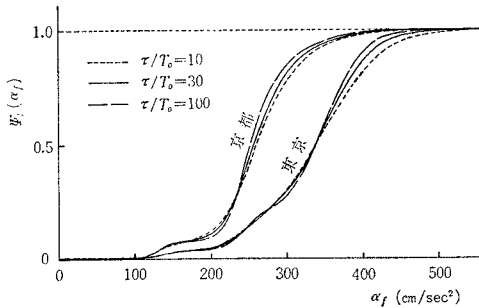


図-14 75年間における最大地震加速度の確率分布 ($T_0=0.5$ sec, $\tau/T_0=30$; α_f は式 (49)~(49') より決定)

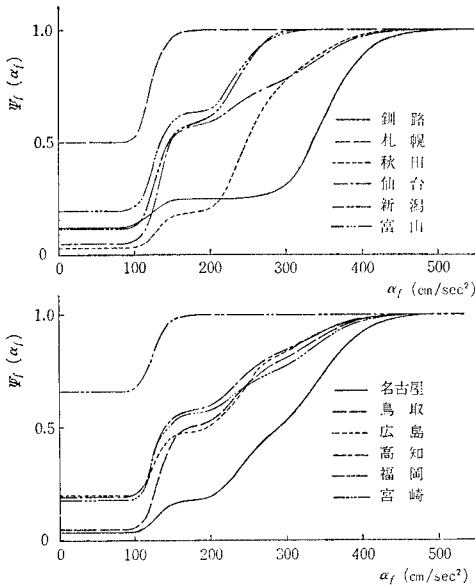


表-2 75年間における最大地震加速度の期待値 ($T_0=0.5$ sec; $\tau/T_0=30$, α_f は式 (49)~(49') より決定)

地名	$E[\alpha_f](\text{cm/sec}^2)$	地名	$E[\alpha_f](\text{cm/sec}^2)$
釧路	285	名古屋	275
札幌	70	京都	258
秋田	244	鳥取	202
仙台	198	広島	183
東京	332	高知	172
新潟	163	福岡	52
富山	147	宮崎	184

地震危険度のとくに小さい地方を除いてはわずかである。

上記の所論から、将来の最大地震動についてはその確率分布の形状が重要であることがわかったが、かかる注意を怠らなければ、期待値 $E[\alpha_f]$, $E[v_{mf}]$ は、やはり将来の地震危険度を簡潔に表わす有力な指標であることに変わりはない。そこで本研究の方法によって $S_f=75$ 年, $T_0=0.5$ sec に対して求めた $E[\alpha_f]$ の分布を図-15, 17 に、 $E[v_{mf}]$ の分布を図-16 に示した。ただし α_f の決定は図-15, 16 では式 (49)~(49'), 図-17 では式 (47) によった。

本節の計算で式 (49)~(49') を用いる場合にはすべて $T_0=0.5$ sec としたが、それ以外の場合には、得られた α_f , $E[\alpha_f]$ の値を $\lambda_\alpha = (T_0/0.5)^{-1.316}$ 倍, v_{mf} , $E[v_{mf}]$ の値を $\lambda_v = (T_0/0.5)^{-0.316}$ 倍にすればよい(ただし T_0 の単位は sec)。この λ_α , λ_v の値を表-3 に示す。

表-3 補正係数 λ_α , λ_v

$T_0(\text{sec})$	λ_α	λ_v
0.2	3.34	1.34
0.3	1.96	1.18
0.4	1.33	1.07
0.5	1.00	1.00
0.6	0.79	0.94
0.7	0.64	0.90
0.8	0.54	0.86

つぎに、 α_f を定めるに際して式 (49)~(49') を用いた図-15 と式 (47) を用いた図-17 を比較すると、図-17 における $E[\alpha_f]$ が図-15 のそれよりはるかに大きな値を示していることが注目される。式 (47) は $T_0=0.3$ sec の場合について提案されたといわれるから、両図を比較するためには、表-3 より図-15 の値を $1.96 \cong 2.0$ 倍して考えるべきであろうが、このことを考慮してもなお図-17 は図-15 に比較してかなり大きな値を示している。たとえば東京では、図-17 によれば $E[\alpha_f]=1221$ cm/sec², また図-17 の基礎となった確率分布 $\Psi_f(\alpha_f)$ によれば、75年間の非超過確率 60% に対応する α_f が 1450 cm/sec², 85% に対応する α_f は 1623 cm/sec² にもなり、かなり過大な値ではないかと考えられる。式 (49')~(49') をあえて提案した理由の一つはこのような計算結果によるものであり、著者らは、 $E[\alpha_f]$ の分布図として、比較的妥当な値を与えている図-15, さらに $E[v_{mf}]$ の分布図として図-16 を用いることを提案したい。

(5) 従来の研究結果との比較

図-18 に $E[\alpha_f]$ の分布図として著名な河角博士による地図¹⁾を示したが、これと本研究の方法の結果とを比較検討する。前述のように、河角博士の研究では式 (47) が用いられているから、ここでは図-18 と図-17 とを比較するのが妥当である。両図の理論的背景のおもな相違は、図-17 が過去に生じた被害地震の数のみならず、それらが記録された時期をも考慮しているのに対し、図-18 では、地震記録の精度が時代によって変化

図-15 75年間に於ける最大地震加速度の期待値
($T_0=0.5$ sec, α_I は式 (49)~(49') より決定)

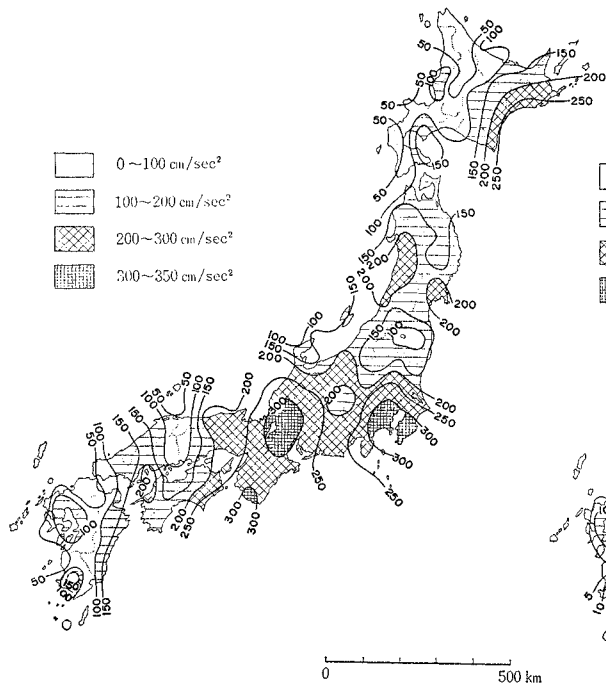


図-16 75年間に於ける最大地震速度の期待値
($T_0=0.5$ sec, α_I は式 (49)~(49') より決定)

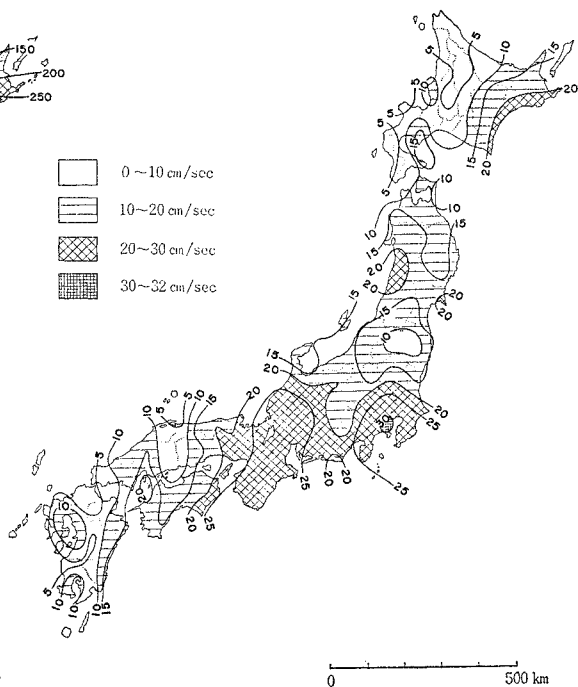


図-17 75年間に於ける最大地震加速度の期待値
($T_0=0.5$ sec, α_I は式 (47) より決定)

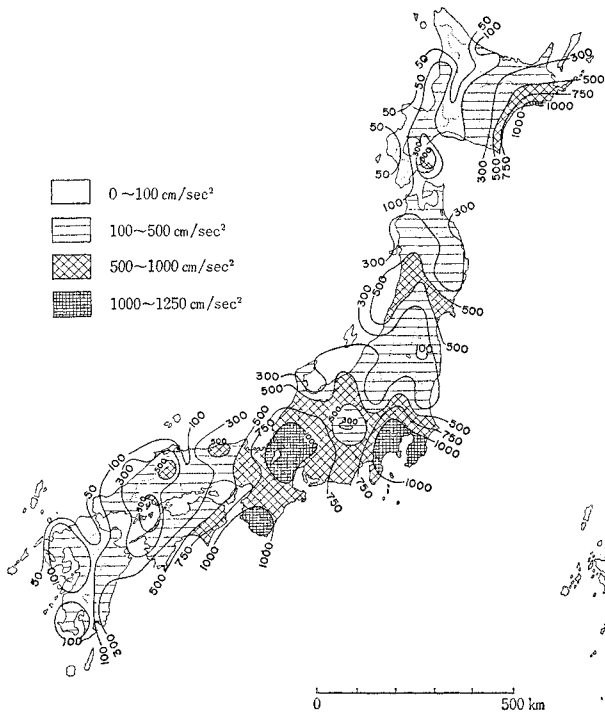
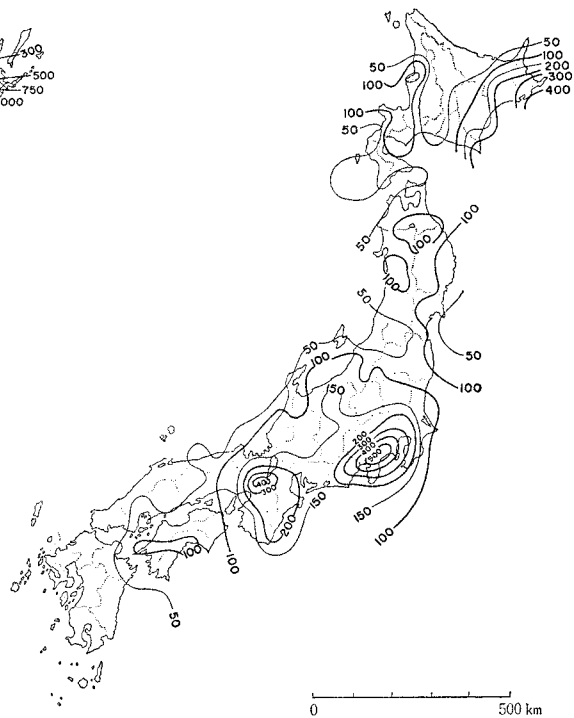


図-18 75年間に於ける最大地震加速度の期待値
(河角博士による)



している可能性の大きいことが無視されている点にあるが、このことに関連して、図-17の方が図-18より全体として大きい $E[\alpha_I]$ を示していることが注目される。

この差異は、記録に残っている過去の地震の数が、一般に時代が新しくなるとともに増加していることに原因がある。たとえば東京と京都を比較すると、図-1で見た

ように、時代とともに地震の数が増加する傾向が京都より東京で著しい。しかも表-1からわかるように、東京に対する n_m は京都のそれよりはるかに大きい。かかる事実を考慮すれば、東京での $E[\alpha_f]$ が京都に対する値よりかなり大きいという図-17の結果は、両者の差が小さい図-18より自然であると考えられる。また、図-18では、あまり強い地震ではなくても記録に残った地震の数が多いために、京都付近が近畿地域では最も大きな $E[\alpha_f]$ を示しているが、これに対して図-17では、過去においてたびたび激震に見舞われている岐阜県西部から滋賀県東部および紀伊半島南部で最も大きな $E[\alpha_f]$ を示している。これらの結果は本研究の解析法の合理性を裏づけるものであろうと考えられる。

$E[\alpha_f]$ の絶対値が異なる点を除けば、 $E[\alpha_f]$ の分布状態に関する上述の議論は、図-17の代りに図-15を見てもそのまま成り立つが、さらに図-15と図-18を比較すると、図-18からは地震危険度が小さいと考えられる中国地方中部や九州の東海岸沿いの地方、あるいは東北地方中部の海岸地方でも、図-15によればそれほど安全でもないという結論が得られる。

5. 結 論

本研究で得られた成果を要約すれば、つぎのように結論することができよう。

(1) 本文2.で提案した地震の確率モデルによって、地震発生の不規則性および地震動そのものの不規則性をあわせて取り入れた地震動の確率統計的解析が可能となり、しかも過去の地震の記録の精度が時代によって異なる可能性が大きいという問題も一応解決することができた。

(2) これらの確率モデルを用いて、1回の地震による最大地震動、あるいは将来の一定期間での最大地震動の確率分布を求める方法を示した。

(3) 1回の地震による最大地震動の確率分布を求めるに際しては、Poisson過程による近似が十分の精度を持つことが、理論解析とシミュレーションの結果から確かめられた。

(4) 地震加速度定常部分の振幅の標準偏差を表わすパラメーター β (または β_I) を決定する一方法を示したが、これは不規則振動論による地震応答解析において入力地震動の強度を決定する有力な指標となりうるであろう。

(5) 本研究で取り扱った $\tau/T_0=10\sim 100$ (τ :地震動の定常部分の継続時間, T_0 :地震加速度の卓越周期)の範囲では、1回の地震による最大地震動の確率分布およびその期待値は τ/T_0 にあまり影響されない。

(6) 数値計算の結果によれば、わが国各地における将来の最大地震動の確率分布は各地に特有の形状を有するため、将来の最大地震動の推定には、その期待値のみでなく、確率分布の形状をも参考にするのが望ましい。

(7) 将来の最大地震動の大略の推定は、その期待値の分布を示す地図を用いて行なえるが、そのために、著者らは本研究の方法により作製された図-15, 16を用いることを提案したい。

本研究では、地震の発生および地震動の波形という二つの面から、現在得られている資料をできるだけ活用して確率統計的な解析を行ない、地震動の推定法の面で、構造物の耐震設計上有力な資料を提供し得たと考えている。ただし本文中にも述べたように、激震時の平均最大加速度を決定する精度の高い算定式など、将来の研究に待つべき部分も残されており、それらの点が解明された際には、本研究で得られた数値計算結果の一部はより正確な値に補正されるべきであることはいままでもないが、それにはなお相当の年月にわたる強震観測活動が必要であろう。

終りに臨み、ランダム地震動のシミュレーションに関して有益なご助言を与えられた京都大学 土岐憲三助教授に深謝の意を表するとともに、本研究での数値計算およびシミュレーションは京都大学計算センターのKDC-IIによったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Kawasumi, H.: "Measures of Earthquake Danger and Expectancy of Maximum Intensity Throughout Japan as Inferred from the Seismic Activity", Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Vol. 29, 1951, pp. 469-482.
- 2) 村松郁栄: 50年間に予想される地震動速度最大値の日本全域における分布, 第2回災害科学総合講演会講演論文集, 昭.40.10, pp. 201-204.
- 3) Rice, S.O.: "Mathematical Analysis of Random Noise", Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, edited by N. Wax, Dover, 1954, pp. 133-294.
- 4) Feller, W.: "An Introduction to Probability Theory and Its Application, Vol. 1", Wiley, 1950.
- 5) Freudenthal, A.M. and Shinozuka, M.: "Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration", Trans. J.S.C.E., No. 118, June 1965, pp. 9-15.
- 6) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓: 電子計算機による耐震設計用の人工地震波に関する研究, 日本地震工学シンポジウム(1966)講演集, 昭.41.10, pp. 25-30.
- 7) 金井 清: 地震動の振動特性に関する実験式, 日本地震工学シンポジウム(1966)講演集, 昭.41.10, pp. 1-4.
- 8) 土木学会編: 土木技術者のための振動便覧, 土木学会, 昭.41.8, pp. 147-148.
- 9) 金井 清・小堀鐸二・蛭田捨太郎: 地震・振動学, 建築学大系, 11巻, 昭.38.8, p. 38, 彰国社.

(1968.2.5・受付)