

【研究ノート】

曲げ振動解析に差分式を適用する際の問題点

SEVERAL PROBLEMS IN APPLICATION OF DIFFERENCE EQUATIONS TO THE ANALYSIS OF LATERAL VIBRATION

佐藤亮典*・川崎鉄一郎**

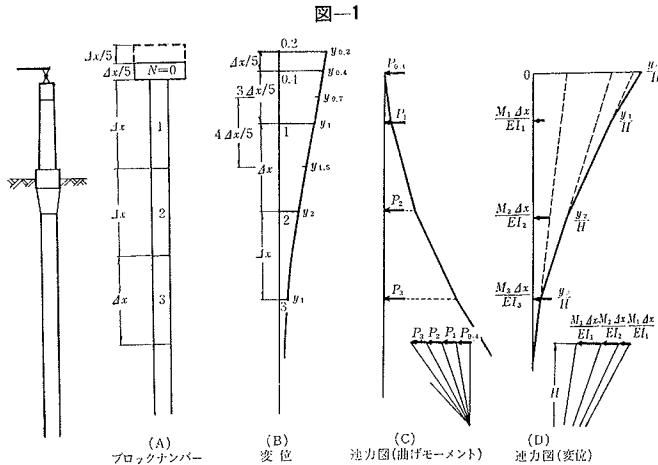
By Ryosuke Sato and Tetsuichirō Kawasaki

1. まえがき

著者らはさきにアナログコンピューターを用いた井筒の動的解析方法¹⁾について研究した。その際、曲げ振動方程式が4次の偏微分方程式となってそのままでは解けないので、差分式を用いて2次の常微分方程式になおした。この場合、頭部の境界条件の入れ方に若干工夫をするだけでなく、きわめて間違ひを起こしやすいのでこれについて述べ、そのほか、不等間隔差分式使用についての問題点ならびにこの解析方法を一般多層階建築構造の解析に適用する場合の問題等について付記した。

2. 上部境界条件の入れ方

井筒の振動解析に差分式を用いる場合、下部工を等間隔ブロックに分割し、上部工質量はその最上端ブロックの中央に作用するとして略算すればきわめて簡単であるが¹⁾、上部工質量が大きくなるにつれて誤差が大きくなる(図-1 参照)。この誤差を小さくするため、井筒上端に



いま一つ小ブロックを付加し、近似度を高めることを考えると、上端ブロックが不等間隔となるため差分方程式の作り方に問題があり、きわめて間違ひを起こしやすいので、以下これについて説明する。なお、この場合の上

端ブロック長は、標準的なブロック長やシューの高さを考慮し、かつ、との計算の容易さをも考え、 $4x/5$ とした。

さて、標準的な曲げ振動方程式、ならびに、差分方程式は次式で示される。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + mA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} + KBy = 0 \quad (1)$$

ここに、

EI : 井筒剛度

m : 井筒の単位体積当たり質量

A : 井筒断面積

B : 井筒幅

K : 土の反力係数

C : 井筒の長さ方向単位長あたりの粘性抵抗

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right]_n &= \frac{1}{4x^2} \left\{ \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{n-1} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n + \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{n+1} \right\} \\ &= \frac{1}{4x^2} \{ -M_{n-1} + 2M_n - M_{n+1} \} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n = \frac{EI_n}{4x^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) = -M_n \quad (3)$$

さて、等分割の差分式で $n=1$ のブロックから始まる場合、頭部の方程式は

$$\begin{aligned} M_1/EI_1 &= -\partial^2 y_1 / \partial x^2 \\ &= (-y_0 + 2y_1 - y_2) / 4x^2 \\ M_2/EI_2 &= -\partial^2 y_2 / \partial x^2 \\ &= (-y_1 + 2y_2 - y_3) / 4x^2 \\ p_1 &= -\partial^2 M_1 / \partial x^2 \\ &= (-M_0 + 2M_1 - M_2) / 4x^2 \\ p_2 &= -\partial^2 M_2 / \partial x^2 \\ &= (-M_1 + 2M_2 - M_3) / 4x^2 \end{aligned} \quad (4)$$

境界条件は $M_1=0$ であり、仮想曲げモーメント M_0 も当然 0 あるとすれば、連立常微分方程式はとける。な

* 正会員 日本道路公団 岩槻工事事務所長

** 元日本道路公団 名古屋支社 工事課勤務

お、 $M_1=0$ から、 $-y_0+2y_1-y_2=0$ となるが、これは仮想点 y_0 が、 y_1, y_2 を結ぶ直線上にあるとの意味にほかならない。

つぎに不等間隔ブロックの境界条件を求めるが、それに先立って不等間隔ブロックに対する差分公式を求めると、既述の理由で分割間隔が $\Delta x/5$ となつたとすれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial x} &= \left\{ 5 \times \frac{y_{0.4}-y_1}{3 \Delta x/5} + 3 \times \frac{y_1-y_2}{\Delta x} \right\} / 8 \\ &= \frac{1}{24 \Delta x} \{ 25 y_{0.4} - 16 y_1 - 9 y_2 \} \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{12 \Delta x} \{ 25 y'_{0.7} - 16 y'_1 - 9 y'_{1.5} \} \\ &= \frac{1}{12 \Delta x} \left\{ 25 \times \frac{y_{0.4}-y_1}{3 \Delta x/5} - 16 \right. \\ &\quad \times \left. \frac{25 y_{0.4}-16 y_1-9 y_2}{24 \Delta x} - 9 \times \frac{y_1-y_2}{\Delta x} \right\} \\ &= \frac{5}{12 \Delta x} \{ 5 y_{0.4} - 8 y_1 + 3 y_2 \} \\ \frac{\partial y_{0.4}}{\partial x} &= \left\{ 3 \times \frac{y_{0.2}-y_{0.4}}{\Delta x/5} + \frac{y_{0.4}-y_1}{3 \Delta x/5} \right\} / 4 \\ &= (45 y_{0.2} - 40 y_{0.4} - 5 y_1) / 12 \Delta x \\ \frac{\partial^2 y_{0.4}}{\partial x^2} &= \frac{1}{6 \Delta x} \{ 45 y'_{0.3} - 40 y'_{0.4} - 5 y'_{0.7} \} \\ &= \frac{25}{6 \Delta x} \{ 3 y_{0.4} - 4 y_{0.4} + y_1 \}\end{aligned}$$

以上、まとめて書くと

$$\left. \begin{aligned} M_{0.4}/EI_{0.4} &= 25(-3 y_{0.2} + 4 y_{0.4} - y_1)/6 \Delta x^2 \\ M_1/EI_1 &= 5(-5 y_{0.4} + 8 y_1 - 3 y_2)/12 \Delta x^2 \\ M_2/EI_2 &= (-y_1 + 2 y_2 - y_3)/4 \Delta x^2 \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} p_{0.4} &= 25(-3 M_{0.2} + 4 M_{0.4} - M_1)/6 \Delta x^2 \\ p_1 &= 5(-5 M_{0.4} + 8 M_1 - 3 M_2)/12 \Delta x^2 \\ p_2 &= (-M_1 + 2 M_2 - M_3)/4 \Delta x^2 \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(5)、式(6)は不等間隔ブロックに対する差分公式で上部工を載荷する場合だけでなく、条件の急変点や、影響力の大きい地上部などをとくに細分割して精度を上げる場合などにも利用できる。参考のため、不等間隔ブロックの差分公式を表-1に示す。

さて、境界条件は式(5)および式(6)で $M_{0.2}=M_{0.4}=0$ とおけば求まるはずである。これを示すと

$$\left. \begin{aligned} p_{0.4} &= \frac{-25 M_1}{6 \Delta x^2} \\ p_1 &= \frac{5}{12 \Delta x^2} (8 M_1 - 3 M_2) \\ p_2 &= \frac{1}{4 \Delta x^2} (-M_1 + 2 M_2 - M_3) \\ \dots & \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

同時に、 $M_{0.4}=0$ から仮想点 $y_{0.2}$ が $y_{0.4}$ と y_1 を結ぶ直線上にあることになる。このことは常識的な感覚とも

表-1 差分公式(略算)

分割比	$\partial^2 y_1 / \partial x^2$	$\partial^2 y_0 / \partial x^2$
1	$\frac{1}{4 \Delta x^2} (y_0 - 2 y_1 + y_2)$	$\frac{1}{4 \Delta x^2} (y_{-1} - 2 y_0 + y_1)$
2	$\frac{8}{21 \Delta x^2} (4 y_{0.25} - 7 y_1 + 3 y_2)$	$\frac{16}{15 \Delta x^2} (3 y_{-0.25} - 5 y_{0.25} + 2 y_1)$
3	$\frac{3}{5 \Delta x^2} (3 y_{0.3} - 5 y_1 + 2 y_2)$	$\frac{3}{4 \Delta x^2} (2 y_0 - 3 y_{0.3} + y_1)$
5	$\frac{5}{12 \Delta x^2} (5 y_{0.4} - 8 y_1 + 3 y_2)$	$\frac{25}{6 \Delta x^2} (3 y_{0.2} - 4 y_{0.4} + y_1)$

注: Δx は大きいブロック側の長さ

一致するが、ここで問題は y_1 点以上の直線部がどこまで続くと解釈するかであって、その想定いかんで M_1 の値が大きく変わることである。すなわち、 y_1 点の弯曲率を $y'_{0.1} y'_{0.2} y'_{0.3}$ を用いて計算したのが式(5)であるが、 y_1 点以上が仮想点 $y_{0.2}$ などを含めて直線であると解釈されているので、仮に $y'_{0.7}$ のかわりに $y'_{0.4}$ を用いても $y'_{0.7} = y'_{0.4}$ であり、しかもその勾配変化をおこした距離は $0.8 \Delta x$ から $1.1 \Delta x$ に変わり、この意味では M_1 は不定ということになる。すなわち、仮想点を媒介とし、差分公式によって y_i から機械的に M_i, p_i を求める方法には上記のような盲点がある。とすれば、仮想点を用いない別の考え方で M_1 を求める必要があるが、この意味で最も簡単な方法として、 p_i から M_i, y_i を求める連力図作法があり、これを逆追跡することによって y_i から M_i, p_i を求める式を誘導してみた。図-1(C), (D) の連力図により変位と曲げモーメントの関係を求めると、

$$\begin{aligned} -\frac{y_{0.4}}{H} &= \frac{M_1}{EI_1 H} \frac{3}{5} \Delta x^2 + \frac{M_2}{EI_2 H} \frac{8}{5} \Delta x^2 \\ &\quad + \frac{M_3}{EI_3 H} \frac{13}{5} \Delta x^2 \dots \\ -\frac{y_1}{H} &= \frac{M_2}{EI_2 H} \Delta x^2 + \frac{M_3}{EI_3 H} 2 \Delta x^2 \\ &\quad + \frac{M_4}{EI_4 H} 3 \Delta x^2 \dots \\ -\frac{y_2}{H} &= \frac{M_3}{EI_3 H} \Delta x^2 + \frac{M_4}{EI_4 H} 2 \Delta x^2 \\ &\quad + \frac{M_5}{EI_5 H} 3 \Delta x^2 \dots \\ \therefore y_1 - y_{0.4} &= \frac{3 \Delta x^2}{5} \left\{ \frac{M_1}{EI_1} + \frac{M_2}{EI_2} + \frac{M_3}{EI_3} \dots \right\} \\ y_2 - y_1 &= \Delta x^2 \left\{ \frac{M_2}{EI_2} + \frac{M_3}{EI_3} + \frac{M_4}{EI_4} \dots \right\} \\ \dots & \\ \therefore M_1/EI_1 &= 5(y_1 - y_{0.4})/3 \Delta x^2 - (y_2 - y_1)/4 \Delta x^2 \\ &= (-5 y_{0.4} + 8 y_1 - 3 y_2)/3 \Delta x^2 \\ M_2/EI_2 &= (-y_1 + 2 y_2 - y_3)/4 \Delta x^2 \\ M_3/EI_3 &= (-y_1 + 2 y_3 - y_4)/4 \Delta x^2 \\ \dots & \end{aligned} \quad (8)$$

つぎに荷重と曲げモーメントの関係は

$$-M_1 = 3 p_{0.4} \Delta x^2 / 25 = 3 W \Delta x / 5$$

$$\begin{aligned}
 -M_2 &= 8 p_{0.4} \Delta x^2 / 25 + p_1 \Delta x^2 \\
 -M_3 &= 13 p_{0.4} \Delta x^2 / 25 + 2 p_1 \Delta x^2 + p_2 x^2 \\
 \text{ただし, } p_{0.4} &= 5 W / \Delta x, \quad W \text{ は上部工荷重} \\
 \therefore -M_2 + M_1 &= p_{0.4} \Delta x^2 / 5 + p_1 \Delta x^2 \\
 -M_3 + M_2 &= p_{0.4} \Delta x^2 / 5 + p_1 \Delta x^2 + p_2 \Delta x^2 \\
 -M_4 + M_3 &= p_{0.4} \Delta x^2 / 5 + p_1 \Delta x^2 + p_2 \Delta x^2 + p_3 \Delta x^2 \\
 \cdots & \\
 \therefore p_{0.4} &= -25 M_1 / 3 \Delta x^2 \\
 p_1 &= -(3 M_2 - 8 M_1) / 3 \Delta x^2 \\
 p_2 &= -(M_3 - 2 M_2 + M_1) / 4 \Delta x^2 \\
 p_3 &= -(M_4 - 2 M_3 + M_2) / 4 \Delta x^2 \\
 \cdots &
 \end{aligned} \tag{9}$$

式(9)は式(8)と同形で、式(7)、式(5)にくらべると $p_{0.4}$ は 2 倍、 p_1 、 M_1 は $4/5$ 倍となっているが、本式の方が力学的条件を満足していること、式(7)、式(5)には既述のとおり誤差介入の原因があること、などから境界条件としては本式の方が正しく、これは完全に static な問題であるのでその例証は容易である。不等間隔差分式を用いる場合、これを機械的に操作すると境界条件に対して前記のような重大な過誤を犯す危険があるので注意を要する。各種分割比の場合の境界条件を表-2 に示した。表-1 と対比することによって、上記の誤差の程度が推定できる。

表-2 境界条件

分割比	M_1/EI_1	p_1	p_0
1	$\frac{1}{4 \Delta x^2} (-y_0 + 2y_1 - y_2)$	$\frac{1}{4 \Delta x^2} (2M_1 - M_2)$	$-\frac{1}{4 \Delta x^2} M_1$
2	$\frac{1}{3 \Delta x^2} (-4y_{0.25} + 7y_1 - 3y_2)$	$\frac{1}{3 \Delta x^2} (7M_1 - 3M_2)$	$-\frac{8}{3 \Delta x^2} M_1$
3	$\frac{1}{2 \Delta x^2} (-3y_{0.3} + 5y_1 - 2y_2)$	$\frac{1}{2 \Delta x^2} (5M_1 - 2M_2)$	$-\frac{9}{2 \Delta x^2} M_1$
5	$\frac{1}{3 \Delta x^2} (-5y_{0.4} + 8y_1 - 3y_2)$	$\frac{1}{3 \Delta x^2} (8M_1 - 3M_2)$	$-\frac{2.5}{3 \Delta x^2} M_1$

注: Δx は大きいブロックの長さ

さらにいま一つ注意すべき点は、表-1 に示した差分式は不等間隔の度合が大きくなるにつれて誤差が大きくなることである。その原因を式(5)、(6)によって説明すると、その誘導過程で明らかのように、たとえば y'_1 、 y''_1 を決めるのに $y_{0.4}y_1y_2$ の 3 点による方法であり、そして、3 点を通るという条件だけで一義的に決まる曲線

は円曲線だけであること、結局式(5)、(6)は円曲線を満足する式になっており、したがって、 y'_1 は $y_{0.4}y_1y_2$ を通る円の y_1 点における切線方向にほかならず、同時に y''_1 は同円の弯曲率、すなわち、 $y_{0.4} \sim y_1 \sim y_2$ 間の平均弯曲率にほかならないこと、したがって、等間隔ブロックで y_1 点が y_0y_2 の中央にあって y'_1 が近似的に y_0y_2 間の平均弯曲率に等しい場合は誤差が小さいが、不等間隔ブロックの場合にはその偏りに応じた誤差を生ずるのである。すなわち、一見、 $y'_{0.4}y'_1y'_{1.5}$ を加重平均してあるかに見える式(5)のプロセスは、 $y_{0.4} \sim y_1 \sim y_2$ が円曲線にほかならないという理由によって、結果的には $y_{0.7} \sim y_{1.5}$ 間の一様な曲率が求まっているに過ぎず、したがって、単純に $4 \Delta x / 5$ 間に $(y'_{1.5} - y'_{0.7})$ の勾配変化があると考えたのと同じである。結局、厳密な解を得るには 3 点では不十分で、つぎのプロセスによって、3 つの円 ($y_{0.2}y_{0.4}y_1$) ($y_{0.4}y_1y_2$) ($y_1y_2y_3$) の曲率を距離によって加重平均すること、すなわち、5 点を使うことによって得られる。そして、この方法によれば精度は重心差分式を使用した場合とほぼ等しくなる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y_1}{\partial x} &= \frac{1}{24 \Delta x} \{25 y_{0.4} - 16 y_1 - 9 y_2\} \\
 \frac{\partial y_{0.4}}{\partial x} &= \frac{1}{12 \Delta x} \{45 y_{0.2} - 40 y_{0.4} - 5 y_1\} \\
 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{24 \Delta x} \{25 y'_{0.4} - 16 y'_1 - 9 y'_2\} \\
 &= \frac{1}{24 \Delta x} \left\{ 25 \times \frac{45 y_{0.2} - 40 y_{0.4} - 5 y_1}{12 \Delta x} \right. \\
 &\quad \left. - 16 \times \frac{25 y_{0.4} - 16 y_1 - 9 y_2}{24 \Delta x} - 9 \times \frac{y_1 - y_2}{2 \Delta x} \right\} \\
 &= \frac{1}{(4 \Delta x)^2} \left\{ \frac{250}{64} y_{0.2} - \frac{25}{6} y_{0.4} - \frac{17}{96} y_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} y_2 + \frac{3}{16} y_3 \right\} \\
 \frac{\partial^2 y_{0.4}}{\partial x^2} &= \frac{1}{12 \Delta x} \{45 y'_{0.2} - 40 y'_{0.4} - 5 y'_1\} \\
 &= \frac{1}{12 \Delta x} \left\{ 45 \times \frac{y_0 - y_{0.4}}{0.4 \Delta x} - 40 \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{45 y'_{0.2} - 40 y'_{0.4} - 5 y'_1}{12 \Delta x} - 5 \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{25 y_{0.4} - 16 y_1 - 9 y_2}{24 \Delta x} \right\}
 \end{aligned}$$

表-3 5 点による差分公式(厳密式)

分割比	$\partial^2 y_0 / \partial x^2$	$\partial^2 y_1 / \partial x^2$
1	$\frac{1}{4 \Delta x^2} (y_{-1} - 2y_0 + y_1)$	$\frac{1}{4 \Delta x^2} (y_0 - 2y_1 + y_2)$
2	$\frac{1}{4 \Delta x^2} \left\{ \frac{6}{5} y_{-0.25} - \frac{4}{5} y_{-0.25} - \frac{122}{105} y_{0.25} + \frac{8}{15} y_1 + \frac{8}{35} y_2 \right\}$	$\frac{1}{4 \Delta x^2} \left\{ \frac{64}{70} y_{-0.25} - \frac{16}{12} y_{-0.25} - \frac{107}{210} y_1 + \frac{1}{7} y_2 + \frac{3}{14} y_3 \right\}$
3	$\frac{1}{4 \Delta x^2} \left\{ 3y_{-0.3} - 3y_0 - \frac{6}{5} y_{0.3} + y_1 + \frac{1}{5} y_2 \right\}$	$\frac{1}{5 \Delta x^2} (9y_0 - 9y_{0.3} - 2y_1 + y_2 + y_3)$
5	$\frac{1}{4 \Delta x^2} \left\{ \frac{150}{16} y_0 - \frac{100}{8} y_{0.2} + \frac{125}{96} y_{0.4} + \frac{5}{3} y_1 + \frac{5}{32} y_2 \right\}$	$\frac{1}{4 \Delta x^2} \left\{ \frac{250}{64} y_{0.2} - \frac{25}{6} y_{0.4} - \frac{17}{96} y_1 + \frac{1}{4} y_2 + \frac{3}{16} y_3 \right\}$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ \frac{150}{16} y_0 - \frac{100}{8} y_{0.2} + \frac{125}{96} y_{0.4} + \frac{5}{3} y_1 + \frac{5}{32} y_2 \right\}$$

5点を用いた差分公式を表-3に示す。同式を用いて
 $p = -\partial^2 M / \partial x^2$

をも算定し得る。同式が5点を用うる関係で、きわめて計算が複雑となり、したがって、条件の変化点などにおいても等価な等間隔ブロックに換算するなどしてできるだけ避けるのが賢明であるが、精度を高めるためやむを得ず不等間隔ブロックを採用する場合は、その精度向上の趣旨を一貫するためには表-3の公式を採用するのが適切であろう。文献2)等にも表-1の方法が示されているが、その欠陥は上記のとおりであり、きわめて誤りを犯し易いので、とくに表-2との比較の目的をも兼ねて表-1をまず示し、最後に正解としての表-3を示した。なお、径間長 $l, p = \text{const}$ の単純ばかりに対して $\Delta x = l/10$ として $y \rightarrow M$ の計算に両公式を適用したところ、表-1では10%前後の誤差を生じたのに対し、表-3ならびに、等間隔差公式では3%以内の誤差に収まった。

3. 多層階構造物解析法への適用

今までの解析は井筒のような曲げ振動を中心に述べてきたが、建築物等一般多層階構造に対する従来の解析法³⁾との関連について少しばかり触れてみる。

振動方程式は文献3)の記法によるとつぎのとおり。

$$[m]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = 0$$

{ } は列ベクトルを表わす。[m] は各点の質量を表わし対角行列となる。

[C] は粘性抵抗で、建築構造物等地上構造物では内部摩擦が主体となるので、質点間の相対速度に比例すると考えれば

$$[C] =$$

$$\begin{bmatrix} C_n & -C_n \\ -C_n & C_n + C_{n-1} - C_{n-1} \\ & \dots \\ & 0 & -C_2 & C_2 + C_1 - C_1 \\ & & & -C_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

となり、対称行列となる。ただし、 C_n は n 階と $n-1$ 階相対単位速度あたりの粘性抵抗である。しかしながら、井筒のような地中構造物では、土の粘性にもとづく外部減衰が支配的と考えられるので、前回の解析¹⁾では内部減衰を無視して対角行列と考えたが、もちろん、アナコン解析では C の形いかんにかかわらず減衰の計算は容易であり、同時に、C の分布形状の想定のもとに（たとえば、地上部は 0 と仮定するなど）減衰状況から C を算定することも可能であって、この点数値解析よりきわ

めですぐれている。

つぎに [K] について述べる。 K_{ij} は j 点のみに単位変位を生じさせるために i 点に加えねばならない力であって、建築構造では変形が主としてせん断変形であることから、三項方程式や固定法などによって計算し、[K] を [C] と同形の 3 項からなる対称行列としている。しかしながら、本稿で取り上げた井筒などでは曲げ変形が主体となるので、きわめて容易、かつ、正確に、差分式を用いて 5 項からなる対称行列に表わすことができる。なお [K] を算定する場合、差分式を用いないで、せん断振動の計算と同じ要領で固定法を用いて算定することも可能なようと考えられるが、これは計算が困難であるだけでなく、きわめて大きな誤差が生ずるので注意を要する。これを 図-2 によって説明すると、 j 点のみが変位する荷重系は (b) のような連続ばかりの一支点が沈下した形で示されるが、せん断変形における K_{ij} が各層間の相対変位量そのものの関数であるとの異なり、曲げ変形の K_{ij} は勾配変化の関数であるので変位との関係が簡単ではない。すなわち、一次振動形のような反曲点の少ない荷重系 (a) を、反曲点の多い荷重系 (b) で求めた K_{ij} によって推定しようとするときわめて過大に評価する危険がある。この誤差は $y \rightarrow M$ の計算段階で入るのであって、図-2において $l_0 l_1$ を反曲点間の距離、 $\theta_0 \theta_1$ を反曲点において引いた切線間の角度、 $\theta'_0 \theta'_1$ を部材角とし、簡単のため $EI = \text{const}$ として説明すれば、M 図は三角形であるので

$$\theta_0 = \int_0^{l_1} \frac{M}{EI} dx = \frac{M_1}{2EI} l_1$$

$$\therefore M_1/EI = d^2 y_1 / dx^2 = 2 \theta_1 / l_1$$

しかるに図から

図-2

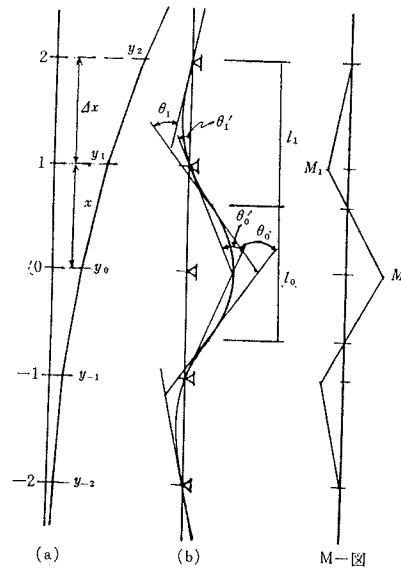


表-4 K_{ij} の値 $\times EI/4x^3$

算定方法	K_{20}	K_{20}	K_{10}	K_{00}
差分式	0	1	- 4	6
4 span連続ばり	0	2.57	- 9.43	13.71
6 span連続ばり	-0.69	4.15	-10.61	14.31

$$\theta_1/l_1 > \theta_1'/l_1 = (y_0 - 2y_1 + y_2)/l_1 \text{ } 4x$$

となり、しかも l_1 はほぼ $1.24x$ 前後であるので、 d^2y_i/dx^2 は (a) においては $(y_0 - 2y_1 + y_2)/4x^2$ にはほぼ等しいのに対し、(b) では 2 倍余りとなる。その結果、(b) によって求めた M_i と y_i の相関係数 K_{ij} によって (a) のような一次振動形の M を類推すると常に過大な値が求まる。同様にして

$$M_0/EI = 2\theta_0/l_0 > 2\theta_0'/l_0 = 2(y_{-1} - 2y_0 + y_1)/l_0 \text{ } 4x$$

連続ばりによって求めた K_{ij} と差分式の比較を表-4

に示すが、これはまったく static な問題であるので、差分式による計算が正しいことの判定は容易である。このことは曲げ振動の解析にきわめて重要である。とくに建築構造の振動解析は変形がせん断的であるため、容易、かつ、妥当な方法として固定法を常用するので、耐震壁など曲げ変形が入る場合には、上記の事実にとくに注意する必要がある。

参考文献

- 1) 佐藤亮典・川崎鉄一郎：アナログコンピューターによる橋梁下部構造の動的挙動の解析に関する研究、土木学会論文集、141 号、昭 42.5
- 2) 日立電子株式会社、社内テキスト、アナログ計算機の使用法（偏微分方程式の解き方）
- 3) 日本鋼構造協会編：建築物の動的解析

(1967.12.8・受付)

卷

土木学会論文集編集委員会

委員長 ○林泰造	副委員長 ○山口柏樹	委員	委員	委員
委員 青木康成	委員 倉神隆一	仁蔵昭暉	憲雷明	宮幸士
・秋山博	・西月枝	・昭暉義利	・勝和主	・元弥照臣也史
・阿井島崎藤郁	・是合木良武	・税知雄	・宏幸	・尚忠曉輝正文昌
・岩遠岡内本堯	・小清水清	・満一	・義真	・高清和欽
・柏谷生衛	・首須藤伸	○前田	・田浦	・田下本瀬水作田口
○神山一三	・二重作藤島	・松	・田	・森福成深矢谷内田山
・銀治晃	・重四郎	・松	・高宮	・山山湯
・栗林栄	・博	・田	・田	
委員兼幹事 西脇威夫	○印部会長			

昭和43年10月15日印刷
昭和43年10月20日発行

土木学会論文集 第158号

定価 200円(税20円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目
印刷者 東京都港区赤坂1-3-6社団法人 土木学会 羽田巖
株式会社 技報堂 大沼正吉発行所 社団法人 土木学会 振替東京 16828番
東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話(351)代表 5138番