

井筒の振動に対する粘性の影響

EFFECTS OF VISCOSITY ON THE VIBRATION OF WELLS

佐藤亮典・川崎鉄一郎

By Ryōsuke Satō and Tetsuichirō Kawasaki

1. まえがき

強制振動時の共振振幅は粘性抵抗の大きさに一次逆比例する。したがって、井筒の耐震設計に対して粘性は地震強度や地盤力に劣らぬ大きな影響力をもち、これを無視しての耐震設計はあり得ない。このことはもちろん周知のことであるが、それにもかかわらず、今まで粘性の分野が十分に解明されていないのは、a) 粘性を考慮することにより解析がきわめて困難になること、b) 固有周期の計算さえ不十分で、きわめて精度の悪い略算法で処理されている現況では、粘性の分野まで手もまわらず、また、検討しても無意味だと解釈によるものであろう。したがって、粘性が考慮されたとしても、杭全体が一様な粘性を受けるとか、杭頭部に等価な粘性抵抗を集中して受けると仮定して処理するもの¹⁾であった。

しかしながら、後述するように、系の減衰は、各局部の粘性の単純和の関数ではなく、各部の粘性をその変位量の自乗をウェイトとして加算したものの関数であって、井筒のように地中部と地上部で粘性もまったく異なり、影響するウェイトも異なる構造物ではこのような略算法ではまったく実態をとらえ得ない。すなわち、地上高さや、変位の分布状況は、地盤固有の粘性に劣らぬ減衰への影響力をもつて、これを無視してばく然と全体的に眺めるだけでは減衰の実態はまったく把え得ず、地盤の粘性と振動系の減衰度は関連性を失なってしまう。この意味では、橋梁下部工の耐震設計に粘性を考慮する方法は、厳密には存在してなかったといえよう。このことは従来気付かれてなかったか、仮に気付かれていたとしても解析上無視せざるを得なかつたのが実情であろう。

しかしに、著者らの研究によって、analogue computer(以下アナコンと略称)を用いて粘性をも考慮した横振動方程式をきわめて厳密に解くことが可能になった²⁾ので、つぎの緊急の課題として、粘性抵抗を中心とした井筒の動的応答の検討を試みた。

すなわち、一種の机上実験ともいべきアナコンによる解析結果と、名四道路における実地試験結果をもとにして、粘性に関する2,3の重要な性質について言及し、これを解析的に裏付けつつ説明しようと思う。

なお、解析そのものは、エネルギー法を用いて比較的かんたんに証明できるものではあったが、同時に、変位分布や固有周波数、位相差などの解明がともなわなければ厳密には適用できない面もあるので、その意味では電算機による厳密な解法とともに登場した新しい理論ともいえよう。

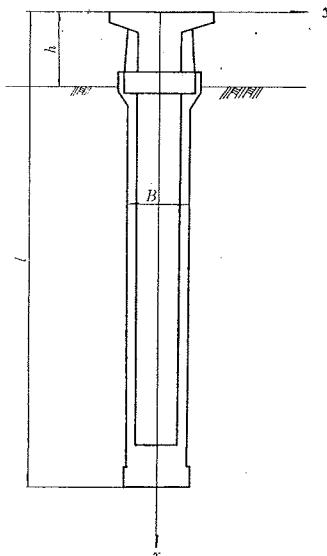
本論文では粘性の影響をまず理論的に説明し、つぎにアナコン解析結果と比較しつつ例証的に説明、最後に、この性質を利用して、そのメカニズム把握の一助として、また、アナコン解析の補助手段としての略算方法に触れ、さらに付加的に、アナコンによる解析結果から井筒の固有周期などに関する一般的な諸性質について論じた。

2. 粘性に関する解析的検討

井筒の自由横振動方程式は次式で示される(図-1参照)。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} + K B y = 0 \quad (1)$$

図-1



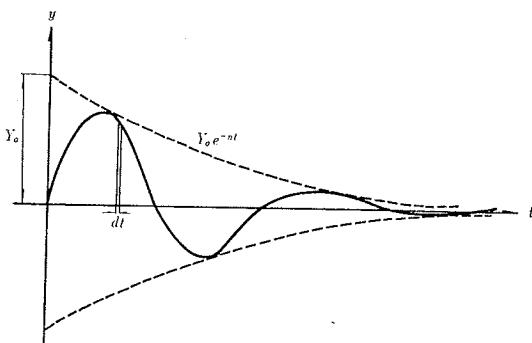
ここに、

EI : 井筒剛度, m : 井筒の単位体積質量, A : 井筒の断面積, B : 井筒幅, K : 土の反力係数, C : 井筒の長さ方向単位長あたり粘性抵抗,

* 正会員 日本道路公団 岩槻工事事務所長

** 元 日本道路公団 名古屋支社 工事課勤務

図-2



さて、井筒各部が次式で表わされるような調和振動をするものとする(図-2参照)。

$$y = Y_0 \exp(-nt) \sin(\omega t + \phi) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに、

$Y_0: t=0$ のときの井筒各部の振幅

ϕ は原点を図-2のように選ぶことによって0となる。運動エネルギーは $mv^2/2$ で表わされるので、式(2)から、一周期の間に失なわれる運動エネルギーを求めよう。 $v=\partial y/\partial t$ であり、式(2)から

$$\partial y/\partial t = Y_0 \exp(-nt) (\omega \cos \omega t - n \sin \omega t) \quad \dots \dots \dots (3)$$

であるので、 $t=0$ から $t=2\pi/\omega$ の間に $\partial y/\partial t$ は $Y_0 \omega$ から $Y_0 \omega \exp(-2n\pi/\omega)$ となり、消費される運動エネルギー E_K は

$$E_K = mA Y_0^2 \omega^2 \{1 - \exp(-4n\pi/\omega)\} / 2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

となる。なお、 $t=0, 2\pi/\omega$ における変位は0で、したがって、位置のエネルギーは0となり、上記運動エネルギーの損耗はそのまま全エネルギーの損耗量となる。

つぎに、粘性抵抗に着目して、この同じ時間内に粘性によってなされる仕事量を求める。粘性抵抗は $C(\partial y/\partial t)$ 、 dt 秒間の変位は $(\partial y/\partial t)dt$ 、仕事量は力と変位の積であるから、 dt 秒間の仕事量は $C(\partial y/\partial t)^2 dt$ となり、一周期の間になされる仕事量は、

$$E_c = \int_0^{2\pi/\omega} C(\partial y/\partial t)^2 dt \quad \dots \dots \dots (5)$$

となる。これに式(3)を代入して計算すると、

$$E_c = CY_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \exp(-2nt) \times (\omega \cos \omega t - n \sin \omega t)^2 dt$$

さて、

$$\sin A = \omega / \sqrt{\omega^2 + n^2}, \quad \cos A = n / \sqrt{\omega^2 + n^2}$$

とおけば、

$$(\omega \cos \omega t - n \sin \omega t)^2 = (\omega^2 + n^2) \times \{1 - \cos 2\omega t \cos 2A - \sin 2\omega t \sin 2A\} / 2$$

となるから、積分の結果、つぎのようになる。

$$E_c = (C/4n) Y_0^2 \omega^2 \{1 - \exp(-4n\pi/\omega)\} \dots \dots \dots (6)$$

粘性による仕事量は、エネルギーの減少量に等しい。一自由度系の振動では式(6)はそのまま式(4)に等しいの

で

$$2n = C/mA \quad \dots \dots \dots (7)$$

となって、周知の式となる。

さて、弾性体の振動の場合には系全体としてこのつり合いが成り立つ。この場合、系全体として同一周期、同一減衰率で振動するものと仮定するが、このことは、今回のアコンによる振動解析結果から推しても、さきに行なった木曾川橋梁における振動実地試験の結果³⁾から見ても、実用上さしつかえないものと判定される。式(4)と式(6)から、

$$\begin{aligned} & \int_0^l mA Y_0^2 \omega^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{4n\pi}{\omega}\right) \right\} dx \\ & = \int_0^l \frac{C \omega^2}{2n} Y_0^2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{4n\pi}{\omega}\right) \right\} dx \end{aligned}$$

であり、前記仮定によって ω, n は全長にわたって等しいので、

$$2n = \int_0^l CY_0^2 dx / \int_0^l mA Y_0^2 dx \quad \dots \dots \dots (8)$$

井筒の減衰は、各部の振幅の自乗をウェイトとして、粘性抵抗 C に比例し、単位長さあたり質量 mA に逆比例する。 Y_0 が数式化されれば、上式が解析的に解ける可能性があるが、これは不可能に近いので、実用的には上式をつぎのような差分式になおして使用すればよい。

$$2n = \sum_{i=0}^N C_i Y_i^2 \Delta x / \sum_{i=0}^N mA_i Y_i^2 \Delta x \quad \dots \dots \dots (9)$$

地上部の粘性が地中部の粘性に比しきわめて小さい橋梁下部構造のような場合、この式の意味はきわめて重要である。系の減衰に対しては変位量の大きい地上部の影響が支配的であるため、地中の粘性の影響は地上部が長くなるとともに急減し、地盤の粘性と系の減衰とはあたかも無関係であるかのような形となる。したがって、従来のように粘性抵抗を系全体として総体的に考えるかぎり、その実態はつかめない。実際の減衰には地盤の粘性定数以上に、井筒の地上突出長や変位の分布状況に影響され、したがって、井筒の剛度や質量分布などにも大きく影響される。

式(9)が実際の解析結果としてどのような形で表われるか、そして、その性質を利用してどのような簡便推定方法が可能であるか、などについては後節で述べる。

さて、つぎに粘性が強制振動の挙動におよぼす影響について考察しよう。地震時における振動方程式は、 U を地震変位とすれば、式(1)の記号を用いて次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + mA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} \\ & + KBy = -mA \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

ある瞬間の仕事量は、加振力 $mA(\partial^2 U / \partial t^2)$ と変位量 $(\partial y / \partial t)dt$ の積である。地震振動を正弦波と仮定して、 $U = u \sin \omega t$ とすれば、 $(\partial^2 U / \partial t^2) = -u \omega^2 \sin \omega t$ とな

る。ただし、 u は地震振幅で、振幅 0 の時点を原点とする。地震波が正弦振動のとき、共振時における強制振動も正弦振動であることは、アナコンによる解析結果が示している。したがって、強制振動は、位相の遅れを φ とすれば、 $y = Y_0 \sin(\omega t - \varphi)$ で表わされ、共振時における瞬間の仕事量は次式で表わされる。

$$dW = mA(\partial^2 U / \partial t^2)(\partial y / \partial t)dt \\ = -mA u \omega^3 Y_0 \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt \dots (11)$$

一周期の間に入って来る総エネルギーは、計算の結果、つぎのようになる。

$$W = -mA u \omega^2 Y_0 \pi \sin \varphi \dots \dots \dots (12)$$

つぎに同じ時間内に粘性によって失われるエネルギーを求めるとき、力は $C(\partial y / \partial t)$ 、 dt 秒間の変位は $(\partial y / \partial t)dt$ であるから

$$E_c = \int_0^{2\pi/\omega} CY_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi) dt = C \omega Y_0^2 \pi \dots \dots \dots (13)$$

共振状態では入出力がバランスするので、式(12)と式(13)から、つぎのようにおくことができる。

$$\omega \int_0^t umA Y_0 \sin \varphi dx = \int_0^t CY_0^2 dx \dots \dots \dots (14)$$

Y_0 が数式化されないかぎり、式(14)は解析的には解けないが、 Y_0 のおおよその形が推定できること、つぎの差分式におすすめによって、地震振動に対する粘性の影響を把握することができる。

$$\omega \sum_{i=0}^{i=n} umA_i Y_i \sin \varphi_i dx_i = \sum_{i=0}^{i=n} C_i Y_i^2 dx_i \dots \dots \dots (15)$$

なお、質点系の振動では、式(12)と式(13)はそのまま等式が成立し、しかも共振時の位相遅れ φ は $\pi/2$ となるので

$$u \omega mA = CY$$

となり、周知の式となる。

3. アナコン解析結果の検討

さきに、粘性抵抗の動的挙動へおよぼす影響を解析的に論じたので、これが実際に表われる状態をアナコン解析結果と照合しつつ説明し、その誤りのないことを確認するとともに、その間のメカニズムを実体的に把握しようと思う。まず、今回実施した解析の概要を述べる。対象とした井筒は、直径 6 m、および 8 m の井筒で、前回の論文との関連をもたせるため、表-1 のような諸元を用いた。なお、上部工載荷の井筒は、井筒上端ハンチ部（第2ブロック）が大き過ぎるので、若干縮小した形に修正した。解析の考え方などは、さきの論文²⁾を参照されたい。また、さきの解析では上部荷重を考える場合、かんたんのため、井筒最上端ブロックに上部工質量が集中作用するとして考えたが、今回の解析では近似度を高めるため、井筒上端ブロックの上にいま一つ別のブロックを設定し、ここに上部工質量を集中負荷して計算

表-1

	EI_u		$m A_t \sec^2/m^2$	
	$B=6m$	$B=8m$	$B=6m$	$B=8m$
0				
1	30.0×10^3 (51×10^3)	30.0×10^3 (60×10^3)	3.4 (6.0)	6.0 (7.2)
2	34.8×10^3	102×10^3	12.5	22.0
3	12.3×10^3	38.7×10^3	2.9	5.1
4	"	"		
5	"	"		
6	"	"		
7				
8			5.6	9.9

() 内の数字は上部工載荷時の解析に用いたもの

した⁴⁾。これによって組んだブロック方程式はつきのとおりである。

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} \frac{W}{x} \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} &= \frac{25}{3} \frac{1}{4} \frac{x^2}{x^2} M_1 - u \omega^2 \frac{5}{4} \frac{W}{x} \sin \omega t \\ m A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{x^2}{x^2} (3M_2 - 8M_1) - u \omega^2 m A_1 \sin \omega t \\ m A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} (M_3 - 2M_2 + M_1) \\ &\quad - K_2 B_2 y_2 - C_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} - u \omega^2 m A_2 \sin \omega t \\ m A_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} (M_{n+1} - 2M_n + M_{n-1}) \\ &\quad - K_n B_n y_n - C_n \frac{\partial y_n}{\partial t} - u \omega^2 m A_n \sin \omega t \\ m A_7 \frac{\partial^2 y_7}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} (-2M_7 + M_6) \\ &\quad - K_7 B_7 y_7 - C_7 \frac{\partial y_7}{\partial t} - u \omega^2 m A_7 \sin \omega t \\ m A_8 \frac{\partial^2 y_8}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} M_7 - K_8 B_8 y_8 \\ &\quad - C_8 \frac{\partial y_8}{\partial t} - u \omega^2 m A_8 \sin \omega t \end{aligned}$$

ただし、

$$M_0 = 0$$

$$M_1 = EI_1(-5y_0 + 8y_1 - 3y_2)/4x^2$$

$$M_2 = EI_2(-y_1 + 2y_2 - y_3)/4x^2$$

$$M_7 = EI_7(-y_6 + 2y_7 - y_8)/4x^2$$

$$M_8 = 0$$

これによって組んだアナコン配線図は図-3のとおりで、その数値を表-3に示した。地震波には正弦波を用い、深さ方向の震度は一定として 100 gal とした。解析結果のおもなものを表-2に示す。これから結論される一般的性質は以下のとおり。

(1) 粘性抵抗値 C と減衰度 n とは比例関係にあり、

表-2 アナコン解析一覧表

番号	解析条件				解析結果		減衰率算定**		震度0.1の振動	
	W	B	h	K _n	T	e ^{-nT}	n	e ^{-nT}	y ₀	M _{max}
	t	m	m	kg/cm ³	tsec/m ³	sec			mm	t.m
I-1	0	6	12	1	100	0.35	0.57	1.78	0.54	
2		"	"	125	"	0.48	2.22	0.46		
3		"	"	150	"	0.42	2.67	0.39		
4		"	"	200	"	0.30	3.56	0.29		
II-1	0	8	6	0.5	20	0.33	0.72	0.83	0.76	
2	"	"	"	1.0	"	0.24	0.79		0.82	
3	"	"	"	2.0	"	0.17	0.88		0.87	
4	"	"	12	0.5	"	0.46	0.79	0.36	0.85	
5	"	"	"	1.0	"	0.33	0.88		0.89	
6	"	"	"	2.0	"	0.25	0.92		0.91	
7	"	6	6	0.25	"	0.44	0.44	0.83	0.70	
8	"	"	"	0.5	"	0.32	0.54		0.76	
9	"	"	"	1.0	"	0.22	0.62		0.84	
10	"	"	"	2.0	"	0.17	0.74		0.87	
11	"	"	12	0.25	125	0.64	—	2.23	0.24	
12	"	"	"	0.5	"	0.45	0.20		0.37	
13	"	"	"	1.0	"	0.33	0.37		0.48	
14	"	"	"	2.0	"	0.26	0.63		0.56	
III-1*	200	6	6	0.5	100	0.36	0.30	3.91	0.24	2
2*	"	"	"	1.0	"	0.27	0.40		0.35	2
3	"	"	"	2.0	"	0.20	—	0.46		2
4	400	"	"	0.5	"	0.41	0.33	2.93	0.30	
5	"	"	"	1.0	"	0.31	0.42		0.40	
6	"	"	"	2.0	"	0.25	—	0.48		
7*	600	"	"	0.5	"	0.47	0.36	2.32	0.34	9 1,600
8*	"	"	"	1.0	"	0.36	0.52		0.44	10 2,500
9*	"	"	"	2.0	"	0.28	0.75		0.52	11 5,400
10	900	"	"	0.5	"	0.52	0.36	1.76	0.40	
11	"	"	"	1.0	"	0.39	0.53		0.50	
12	"	"	"	2.0	"	0.31	0.75		0.58	
IV-1	200	6	12	1.0	100	0.40	0.50	1.68	0.51	7
2	"	"	"	2.0	"	0.32	—	0.58		9
3	400	"	"	1.0	"	0.47	0.61	1.26	0.55	
4	"	"	"	2.0	"	0.37	—	0.63		
5	600	"	"	1.0	"	0.53	0.67	1.00	0.59	30 6,000
6	"	"	"	2.0	"	0.43	—	0.65		40 11,000
7	900	"	"	1.0	"	0.58	0.68	0.76	0.65	
8	"	"	"	2.0	"	0.47	—	0.70		

* 3 節 (5) 項参照

** 減衰率算定の計算方法は 4 節参照。

表-3 ポテンショメーター数値表

	中間部数値		上端部数値
1	$\frac{10^4}{4x^2mA_n\beta}$	1'	$\frac{25 \times 10^4}{34x^2\rho_0}$
2	$\frac{EI_n}{5 \times 10^4 4x^2\beta}$	2'	$\frac{8EI_1}{15 \times 10^4 4x^2\beta}$
3	$\frac{2EI_n}{5 \times 10^4 4x^2\beta}$	3'	$\frac{EI_1}{3 \times 10^4 4x^2\beta}$
4	$\frac{C}{mA_n\beta}$		
5	$\frac{4x^2K_n}{10^4\beta}$		
6	$\frac{u\omega^2mA_n4x^2}{20\beta}$	6'	$\frac{3 \times u\omega^2\rho_04x^2}{25 \times 20\beta}$

注 1) 上記数値は加積分器の数値をも含んだものとする。

2) β (は時間軸変換係数で 100 とした)。

3) 左側点線は地震動解析の結線を示す。

4) $\rho_0 = 5W/4x$, W ; 上部工質量

また、粘性による固有周期の変化のないことの確認 (表-2, I-1~I-4 参照)。

(2) 井筒形状、地上高、地盤反力係数、上部工質量などの変化とともに固有周期変化の状況を II~IV で検討し、結果を 図-4 にまとめた。解析の範囲内で、きわめて概略的には、固有周期は地盤力の平方根に逆比例し、地上高の平方根に比例する。これは片持ばかりの周期が長さの自乗比例するとの対比的である。

(3) 井筒長と地盤反力の変化とともに固有周期変化の状況を 図-5 に示す。この種資料をさらに整備することによって、標準的な井筒に対し周期の推定がきわめて容易にすることが可能であろう。

(4) 図-5 の変位曲線を観察すると、本解析の範囲では変位の不動点は井筒長や地盤反力にかかわらず、下 1/4 点と 1/2.5 点の間にあり、平均して 1/3 点付近にある。これは下層地盤が強くなり埋設長が短くなるとともに下方に移動する。

(5) 井筒頭部の引張力を切断したときに生ずる自由振動、井筒頭部に加振力を加えた強制振動、井筒全長に地震による慣性力が作用する地震振動、これらの振動は (6) 項にも説明するように位相のずれ合も異なり、また、作用力の分布形状も異なり、したがって、当然変位曲線形も異なるが、それにもかかわらず固有周期と共振周期はまったく変わらない。このことは表-2 の *印の振動に対して地震周期を変えてみることによって確認した。

(6) 強制振動振幅に位相角 ϕ が関係することは式 (15) によって明らかであるが、従来このことはほとんど着目されてないし、無視されてきた。ところが今回のアナコン解析でこれが比較的明瞭に解析され、しかもその結果は先回名四道路木曽川橋脚で行なった振動試験結果とも傾向的に一致したので、この結果について若干考察する。一自由度の共振振動では ϕ は常に $\pi/2$ となるが、井筒などの振動ではこの方則は成立しない。この模様を表-4、図-6、および図-7 によって説明する。

強制振動の共振状態の位相差は表-4 のとおりで、上端 $\pi/2$ 、下端 $3/2\pi$ 、上下端の位相ずれはほぼ π となり、実験と解析結果は傾向的には一致する。そしてこの位相遅れ角は、加振周期が長くなるほど小さくなる傾向にある。地震時における共振状態では、上下端の位相差 0.2 π 、平均位相遅れ $\pi/2$ で、この値も共振点を離れるとと

図-3

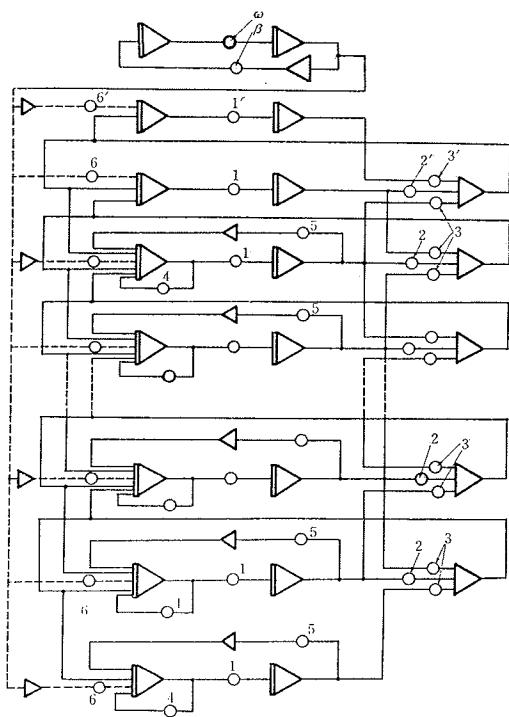


図-4

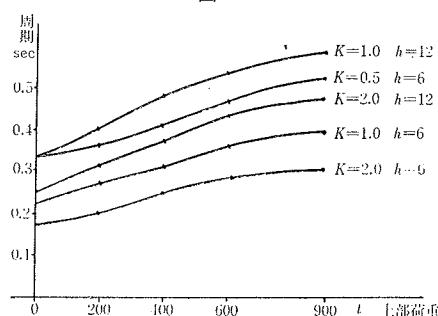


表-4 位相差

名四道路における強制振動実験（推定共振周期 0.25~0.15 sec, 解析固有周期 0.21 sec）

実験番号（文献3による）	共 振 状 態								非 共 振		平均*	
	I-2	I-3	II-1	II-2	II-3	V-1	V-2	VI-1	I-1	III-1	IV-1	
加振周期 sec	0.22	0.21	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.20	0.24	0.30	0.36	0.22
上下端位相差 π	0.93	0.92	0.97	0.93	1.00	0.88	1.00	0.76	0.71	1.06	0.89	0.90

* 平均は共振振動分のみ

アナコン解析（文献2による解析結果）

解 析 種 別	強制非共振	強制共振	地 震 時 非 共 振	地 震 時 共 振	自 由 振 動
周 期 sec	0.25	0.17	0.21	0.40	0.29
上 端 位 相 遅 れ π	0.16	0.78	0.47	0	0.9
下 端 位 相 遅 れ π	1.20	1.67	1.30	—	0.66
上 下 端 位 相 差 π	1.04	0.89	0.83	—	0.26
					0.95

アナコン解析（地震時共振状態）

解 析 番 号（表-2 による）	III-7	III-8	III-9	IV-1	IV-2	IV-5	IV-6	平 均
地 震 周 期 sec	0.47	0.36	0.28	0.40	0.32	0.53	0.43	
上 下 端 位 相 差 π	0.17	0.17	0.25	0.14	0.25	0.17	0.17	0.19

注：地震振動は上部工載荷井筒、強制振動は無載荷井筒に対するものとする。

図-5 振動形と固有周期

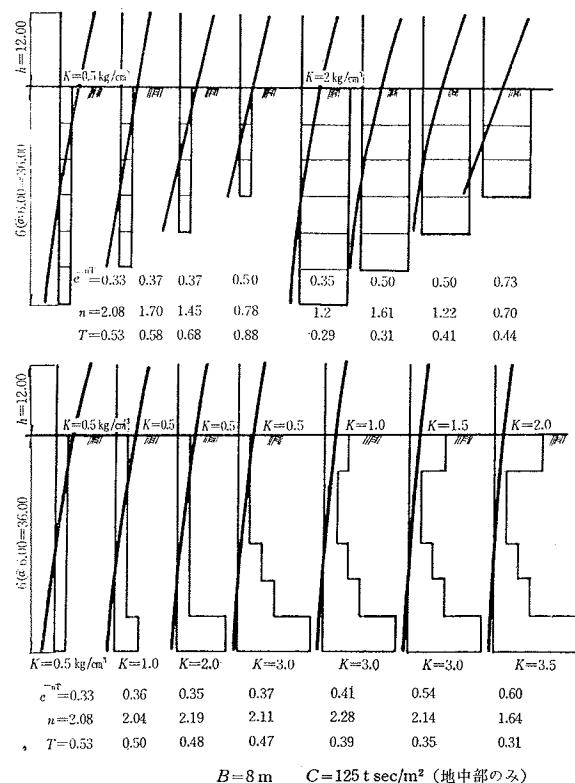
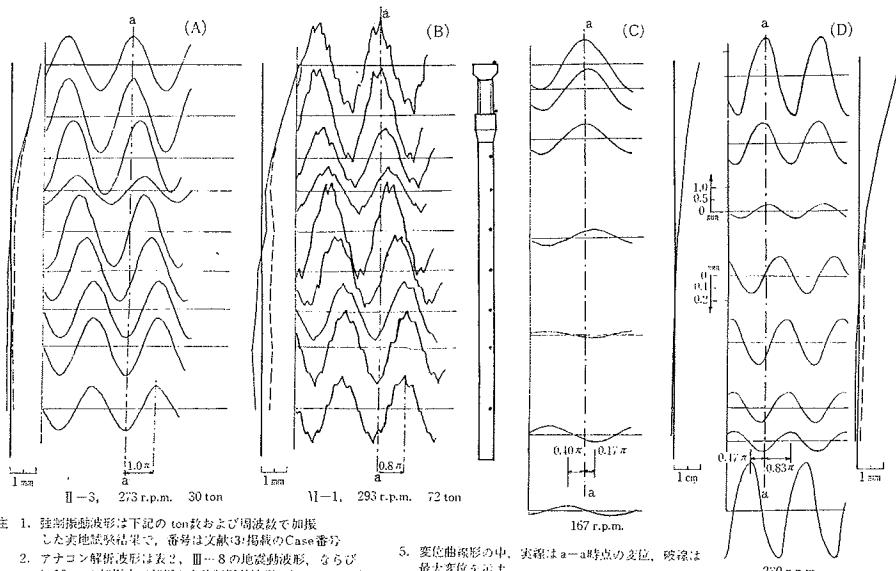
 $B=8 \text{ m}$ $C=125 \text{ t sec/m}^2$ (地中部のみ)

図-6 位相差

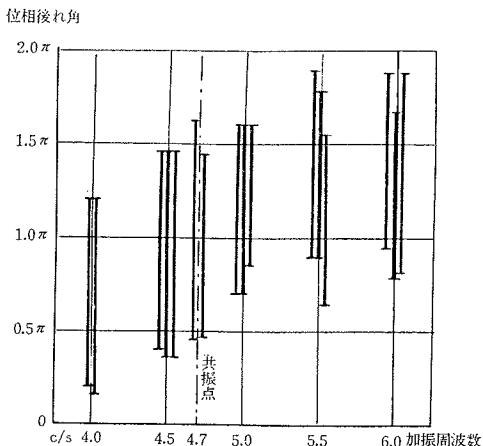
名四道路木曽川橋梁脚強制振動試験結果 アナコン解析結果(地震) 同左(強制振動)



- 注 1. 強制振動波形は下記の ton 数および周波数で加振した実地盤試験結果で、番号は文献3)掲載の Case番号
2. アナコン解析波形は表2、表3の地震動波形、ならびに 10ton の加振力で加振した強制振動波形 C=100t sec/m²
3. 下端波形は加振力
4. •印は加速度計設置位置

5. 变位曲線の中、実線は a-a 点の変位、破線は最大変位を示す
6. 時間軸は左から右に進み、下端数字は位相差角
7. 波形の縮尺は不定

図-7 強制振動位相差



- 注 1. 棒グラフ下端は井筒端の後れ角、上端は井筒底部の後の後れ角を表わす
2. 粘性抵抗 C=80~120 t sec/m²

もに増減する。注意すべき点は、頭部加振による強制振動は、上端から下端に伝播する波動のような形をとり、したがって、 ϕ は同位相点が上端から下端に到達する時間を表わしているのに対し(図-6 (A), (B), (D)), 地震時共振振動は中央部に不動点をもつロッキング振動の形をとり、したがって、位相ずれのないロッキング振動を基準として、これからのはずれを ϕ としたことである。したがって、前記強制振動と同一の表わし方をすれば、単に ϕ としてあるのは正確には $\pi + \phi$ としなければならない。

さて、この位相ずれの原因を地震振動によって考えてみると、地上部は局部的に片持振りと考えるかぎりその

固有周期は短かく、しかも粘性は 0 と考えているので、加振力と同一位相で振動しようとする。これに対し、地中は地盤力をばね定数とする自由度 1 の振動系と考えられるので、仮に $B=6\text{ m}$, $K=1\text{ kg/cm}^3$ として計算しても周期は 0.44 秒となり、地上部とは逆に $\pi/2$ 以上の位相差で運動しようとする。この結果、地上部は地震動に対して $\pi/2$ 以下の位相差で振動しようとし、 $\pi/2$ 以上の位相差で振動しようとする地中に対し先行して加振力として働くものと考えられる。とくに強制振動は無載荷井筒に対するものであるので地上部局部周期はさらに短くなって上記傾向はさらに著しくなり、上端部ではほとんど起振機と同一位相に近い振動となり、もともと、上端を加振したものであるため、上端部が先行する傾向は当然である。さて、以上の諸性質を根拠として、粘性抵抗の減衰におよぼす影響、ならびに、強制振動幅におよぼす影響を検討しよう。

4. 粘性抵抗の影響

粘性に関する式を再掲すると

$$2n = \sum C_i Y_i^2 A x / \sum m A_i Y_i^2 A x \dots \dots \dots (9)$$

式 (9) の意味は、減衰率 n が、各ブロックの変位量 Y_i の自乗をウェイトとして加算した粘性と質量の比の関数であることを示す。しかしながら、本式の計算に必要な Y_i は正確にはアナコンで解析しなければ求められないので、これでは答を用いて計算することになって意味がない。そこで Y_i が適当に仮定できれば本式独自で計算できるわけであるが、前節に述べたとおり、上記の目的で都合

のよいいくつかの性質がある。

(1) かなり広範な条件に対し、変位の不動点は下1/3点付近にある。

(2) 計算に必要な Y_i としては絶対量は必要でなく、相対的な大きさの割合だけが必要である。

(3) しかも Y_i が自乗で影響するので、井筒頭部の変位に対し、中央部以下変位の影響はきわめて小さく、変位曲線をかなり大まかに仮定してもさして影響がない。

Y 曲線として下1/3点を不動点とした正弦曲線を仮定し、各局部の影響の度合いを示す係数 $p = Y_i^2 / \sum Y_i^2$ を8分割の場合に対して計算した値を表-5に示す。この p をもとにした減衰率 n の計算例が表-5であり、このような方法で今回検討の井筒の各種条件に対して算出した $2n$ の値が表-6である。また、この n をもとに計算した減衰比 $\exp(-nT)$ を表-2の減衰略算値として

表-5 無載荷井筒の減衰度計算例

$C=100 \text{ t sec/m}^2, h=6 \text{ m}$

No.	φ	mA tsec^2/m^2	pmA	pC	$2n$
0	0.65				
1	0.51	3.4	1.73	0	0
2	0.28	12.5	3.50	28	4.76
3	0.14	2.9	0.41	14	2.38
4	0.04	~	0.12	4	0.68
5	0.01	~	0.03	1	0.17
6	0	~	0	0	0
7	0.01	~	0.03	1	0.17
8	0.01	5.6	0.06	1	0.17
合計	1.65		5.88		8.33

表-6 $2n = \frac{\sum pC}{\sum pmA}$ の値

ただし $C=100 \text{ t sec/m}^2$

$h \backslash W$	0	200	400	600	900
0 m	17.00	—	—	—	—
6 m	8.33	7.82	5.86	4.64	3.53
12 m	3.57	3.36	2.51	1.99	1.52
18 m	1.19	1.11	0.83	0.66	0.50

注：載荷井筒については mA_2 は 12.5 のかわりに 6.0 を使用した。

表-7 局部的粘性による減衰

$B=6 \text{ m}, h=6 \text{ m}, W=0, K=1 \text{ kg/cm}^3$

$C=100 \text{ tsec/m}^2, T=0.27$

No.	$2n$	nT	e^{-nT}	アナコン解
1	(8.70)	(2.35)	(0.10)	
2	4.76	1.28	0.28	0.25
3	2.38	0.64	0.53	—
4	0.68	0.18	0.84	0.8
5	0.17	0.05	0.95	0.9
6	0	0	0	—
7	0.17	0.05	0.95	—
8	0.17	0.05	0.95	—
全長*	1.67	0.45	0.64	0.4

* : 井筒全長に粘性が作用した場合の計算には、 $C=20 \text{ tsec/m}^2$ が No. 2 ブロック以下に作用するものとして積算した。

示したが、アナコン解析結果による減衰比 $\exp(-nT)$ と対比することによって、かなりの符合度をもつことが確認できるであろう。なお、表-7 は部分的な粘性の影響を一層明確に確認するため、粘性が局部的に作用する仮想の状態を想定してアナコンで解析したものである。たとえば、No. 2 のブロックにだけ $C=100 \text{ t sec/m}^2$ の粘性が作用するような仮想の条件に対し、減衰比は上記の略算で 0.28、アナコンによる厳密解析では 0.25 となつことを示す。また、地中部全域に $C=20 \text{ t sec/m}^2$ の粘性が作用したときの減衰比は、計算上の 0.64 に対し、アナコン解析では 0.4 となった。この種解析をこのほかかなりの例について行なったが、減衰比でおおむね一割程度の誤差に収まり、上記略算が実用上十分使用できることがわかった。

さて、上記の例について考察するに、粘性減衰 $2n$ の値は、 C が同じ 100 t sec/m^2 であっても、地上高が 0 m, 6 m, 12 m, 18 m と変化するにつれて、17.00, 8.33, 3.57, 1.19 と変化し、まったく異なる値を示す(表-6)。また、地上高さが 6 m から 12 m に変化することや、上部荷重 900 t が載荷されることとは、地中の粘性値 C の値が半減すること同等であり、粘性減衰を論ずる場合、質量や変位の分布を無視してはまったく無意味なことを示している。また、この関係から、地中部の粘性としても地表近くの粘性が支配的であることがわかり、したがって、先に行なった名四道路橋脚実地試験解析結果²⁾の示す $C=100 \text{ t sec/m}^2$ の値は、6 m 円形井筒に対する砂質粘土層の粘性抵抗値と考えて差し支えないであろう。

さて、減衰度の推定が可能となったので、つぎに粘性の強制振幅におよぼす影響を式(15)によって考察しよう。式(15)を再掲するとつぎのとおり。

$$\omega \sum u m A_i Y_i \sin \varphi_i A x_i = \sum C_i Y_i^2 A x_i \dots \dots (15)$$

この場合、式(9)のような略算が可能ならば好都合であるが、もともと本式利用の目的は振幅の絶対量を求めるにあり、そのため Y_i を仮定すること自体若干無理な注文であるが、 Y の相似律が成り立つ範囲内に限ってその絶対量を求める目的とすれば必ずしも無意味ではない。しかしながら、その場合でも、左辺に Y の一次の項があって、 Y の仮定にともなう誤差が大きいこと、 Y のほかに ω, φ などの値も必要なことなどもあって、前記の場合ほどの効用や、本式だけで独立しての効用は期待しくない。本式の効用は Y と C, φ, u などの間のメカニズムを把握してアナコン解析の補助手段として利用するに限られるであろう。元来コンピューターは条件と結果を直結するあまり、その間のメカニズムを示さず、したがって、計算途中の誤りもまったく示さないので、コンピューターによる計算が複雑高度となればなるほど、この種理論式はかえって必要性を増すであろう。それは式自体では直接計算に役立たなくても、条件と結果の関

表-8 地震時変位の式(15)による照合

$H=6\text{ m}$, $K=1\text{ kg/cm}^3$, $W=600\text{ t}$, $C=100\text{ tsec}^2/\text{m}$
 $\omega=17.4$, $u=0.0033\text{ m}$

$H=12\text{ m}$, $K=1\text{ kg/cm}^3$, $W=600\text{ t}$, $C=100\text{ tsec}^2/\text{m}$
 $\omega=11.8$, $u=0.0072$

Y_i 10^{-2}m	mA_i tsec^2/m^2	$\sin \varphi_i$	$mA_i Y_i \sin \varphi_i$	CY_i^2
1.0	10	0.90	9.0×10^{-2}	
0.85	3.4	0.95	$2.8 \times \sim$	
0.60	6.0	0.98	$3.5 \times \sim$	0.36×10^{-2}
0.40	2.9	0.99	$1.1 \times \sim$	$0.16 \times \sim$
0.23	"	1.00	$0.7 \times \sim$	$0.05 \times \sim$
0.08	"	0.99	$0.2 \times \sim$	$0.01 \times \sim$
0	"	0.98	$0 \times \sim$	$0 \times \sim$
-0.08	"	0.95	$-0.2 \times \sim$	$0.01 \times \sim$
-0.12	5.6	0.90	$-0.6 \times \sim$	$0.01 \times \sim$
合計			16.5×10^{-2}	0.60×10^{-2}

$$u \omega \sum mA_i \sin \varphi_i Y_i = 0.96 \times 10^{-2}$$

$$\sum CY_i^2 = 0.60 \times 10^{-2}$$

$$0.60 / 0.96 = 0.63$$

連を示すことにより、部分修正や予備検討段階でおおよその目安と方向を示すことによって、アナコンによる試行回数を節約するであろうし、導入数値や機械故障などに起因する誤りをチェックするにも役立つであろう。

式(15)が示すメカニズムを一口でいえば、 Y_i の相似律が成り立つ範囲内では、 Y_i の絶対量は C に反比例し、 $umA_i \omega \sin \varphi_i$ に比例する。また、変位量は地震速度に比例すること、位相ずれ φ が影響し、しかもこの φ は $\pi/2$ でないこと、とくに起振機による振動では井筒下端の φ は π に近いことなどの事実は重要である。

解析結果のチェックの例として、アナコン解析結果の Y, ω, φ などを用い、等式がほぼ成立することを表-8に示した。ただし、 φ_i は若干資料不足ではあったが、表-4をもとに上端 66° 下端 114° として試算し、数割程度の誤差にとどまった。

Y_i と ω がわかれば、慣性力 ($mA_i \omega^2 Y_i dx$) と地盤反力 ($KBY_i dx$) を計算し、連力図を描くことによって曲げモーメントを略算することもできる。この場合、力やモーメントのつり合いが完全には成立しないが、適当に補正することによって曲げモーメントの値は 1 割以内の誤差でアナコン解析結果と符合した。

5. む す び

以上、主として粘性抵抗を考慮した場合の動的応答を

Y_i 10^{-2}m	mA_i tsec^2/m^2	$\sin \varphi_i$	$mA_i Y_i \sin \varphi_i$	CY_i^2
3.0	10	0.90	27.0×10^{-2}	
2.6	3.4	0.95	$8.3 \times \sim$	
2.0	6.0	0.98	$11.7 \times \sim$	
1.3	2.9	0.99	$3.8 \times \sim$	1.7×10^{-2}
0.7	"	1.00	$2.0 \times \sim$	$0.5 \times \sim$
0.3	"	0.99	$0.9 \times \sim$	$0.1 \times \sim$
0	"	0.98	$0 \times \sim$	$0 \times \sim$
-0.2	"	0.95	$-0.6 \times \sim$	$0 \times \sim$
-0.5	5.6	0.90	$-2.6 \times \sim$	$0.3 \times \sim$
合計			50.5×10^{-2}	2.6×10^{-2}

$$u \omega \sum mA_i \sin \varphi_i Y_i = 4.28 \times 10^{-2}$$

$$\sum CY_i^2 = 2.6 \times 10^{-2}$$

$$2.6 / 4.28 = 0.61$$

中心に井筒の振動を論じた。さきの論文²⁾で実態がつかめなかつた粘性と減衰の関連がこれで明らかになったわけで、あとは実験を重ねることによって諸定数を見出すことが今後の課題である。しかしながら、今回の論文で減衰度と関連づけられた粘性抵抗は井筒の単位長あたりの値であるので、これをさらに、井筒の断面形状との関連において地質固有の値として把握する必要がある。この場合、粘性研究の緒としては十分精確、かつ、簡便な方法として、本論文の手法、ならびに、アナコンによる解析法を推すものである。

最後に、本研究にあたって終始ご指導いただいた名古屋大学の成岡教授ならびに、同研究室の方々に感謝の意を表するとともに、本研究の完成を待たず、不幸にして事故によって亡くなつた共同研究者川崎鉄一郎君に対し、心から哀悼の意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) 後藤尚男・龜田弘行: 杭基礎上の橋脚に地震応答について、土木学会論文集、131号、昭41.7.
- 2) 佐藤亮典・川崎鉄一郎: アナログコンピューターによる橋梁下部構造の動的挙動の解析に関する研究、土木学会論文集、141号、昭42.5.
- 3) 土木研究所: 木曽川橋橋脚振動実験、同所資料179号、昭41.4.
- 4) 佐藤亮典・川崎鉄一郎: 曲げ振動解析に差分式を適用する際の問題点、土木学会論文集、158号、昭43.10
(1987.12.8・受付)