

# 円弧アーチの弾塑性解析\*

ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF CIRCULAR ARCHES

山崎徳也\*\*・石川信隆\*\*\*  
By Tokuya Yamasaki and Nobutaka Ishikawa

## 1. 緒 言

骨組鋼構造物の弾塑性状態における応力および変形性状を解明せんがため、近年、各方面で活発に数多くの実験または理論解析が行なわれているが、その多くは直線材を対象とするものであり、曲線材に関してはほとんど究明されていないのが現状である。

本研究はアーチ鋼構造物に対する弾塑性解析法の確立を試みたもので、その第1段階として最も代表的な円弧アーチの弾塑性挙動を  $\phi$ -法により解明したものである。

$\phi$ -法は弾性解析において共役ばかり法として慣用されているものであるが、弾塑性解析においても直線ばかりおよび長方形ラーメンを対象として C.H. Yang<sup>1)</sup> および K.H. Gerstle<sup>2)</sup> などがその応用について研究している。 $\phi$ -法では曲率  $\phi$  を荷重と見なしたときのせん断力がたわみ角を、曲げモーメントがたわみを表すもので、一般に不静定構造物を解く場合にたわみとたわみ角の連続条件および力と曲げモーメントのつりあい条件とを用うるいわゆる応力法の一種として、変形法におけるたわみ角法と対比されるものである。

さて、一般にアーチに対する弾塑性挙動を考察する場合には、軸力と軸力によって誘起される軸線の伸縮による影響を考慮する必要があり、その取り扱いはきわめて繁雑である。このため、従来の弾塑性解析例はわずかに円弧片持ばかり<sup>3)</sup> に関するものがあるにすぎないが、類似の研究例として以下の塑性解析法によるものが見受けられる。

すなわち、曲げモーメントと軸力による断面の降伏条件式を導き、通常のせり高をもつ 2 ヒンジアーチの実用解を示した E.T. Onat & W. Prager<sup>4)</sup> の著名な論文や、せり高の変化とともにアーチの崩壊時の挙動を明らかにした横尾・山肩氏<sup>5)</sup> の研究があり、また最近では福本・吉田氏<sup>6)</sup> の変動くり返し荷重に対するアーチの変形硬化荷重を求めたもの、その他横座屈の影響<sup>7)</sup> を考慮したアーチの崩壊に関する研究など数多くある。

げることができる。

しかしながら、元来塑性解析法は構造物の崩壊荷重の算定のみを目的としており、アーチの弾塑性変形過程を解明することは不可能である。したがって、もしこれが明らかになればアーチの塑性設計に際しての有用な資料をうるとともに、最大許容変形を基準とした経済的設計に対する一指針を与えることにもなりうる。

かかる見地より、本論文は前記  $\phi$ -法をアーチの弾塑性解析に応用拡張せんと企図したもので、まず軸線の伸縮を考慮した円弧アーチに対する変形の微分方程式を用いて弾塑性領域を包含した  $\phi$ -法公式を導き、ついで H 型、箱型および長方形断面をもつ静定アーチの弾塑性挙動に関する基本的考察を行ない、軸力および軸線の伸縮による影響を比較検討し、さらに不静定アーチの弾塑性時における断面力および変形量の算定手法を確立せんとするものである。

## 2. 曲げモーメントと軸力に対する曲率の変化と軸線の伸縮の関係

本論文では塑性解析での慣用にしたがってつきのごとき仮定を採用する。

図-1

(i) 応力-ひずみ  
関係は図-1のごとく  
完全弾塑性モデルと  
し、履歴効果はないものとする。

(ii) 平面保持の法則が成立するものとし、変形は微小と考え

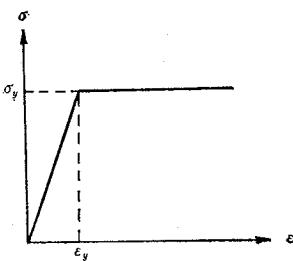
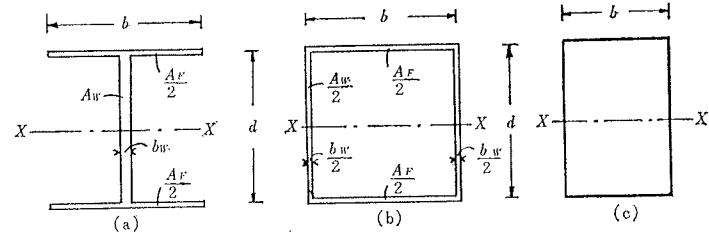


図-2



\* 昭和 40 年 5 月第 20 回年次学術講演会および昭和 41 年 10 月第 16 回応用力学連合講演会にて一部発表

\*\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科教室

\*\*\* 学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科土木工学科専攻

る。

(iii) アーチの座屈および不安定現象による崩壊は考慮しない。

(iv) 断面は図-2のごとく二軸対称のH型、箱型および長方形とし、同図(a), (b)のフランジの厚さは断面高さに比して無視できるものとする<sup>8), 9)</sup>。

いま、上記仮定に基づいて漸増曲げモーメントおよび軸力を受けた断面に生ずる応力分布を、弾性より第1弾塑性、第2弾塑性状態を経て完全塑性状態に至る全過程について示せば図-3のごとくなり、各状態における曲げモーメント  $M$  と軸力  $N$  (圧縮を正) に対する曲率の変化  $\phi$  と軸線の伸縮  $\epsilon$  (縮みを正) の関係は以下のとくえられる。

まず図-3(a)の弾性状態では周知のごとく  $\phi = M/EI$  および  $\epsilon = N/EA$  で表わされ、これらを無次元化して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0/\phi_y &= \Phi_0 = M/M_y = m \\ \epsilon_0/\epsilon_y &= \tilde{\epsilon}_0 = N/N_y = n \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

ただし、

$\phi_y = M_y/EI$ : 純曲げによる降伏時の曲率の変化、  
 $M_y = (1+3\rho)b_w d^2 \sigma_y / 6$ : 純曲げによる降伏曲げモーメント、

$\epsilon_y = \sigma_y/E$ : 降伏ひずみ、

$N_y = (1+\rho)b_w d \sigma_y$ : 軸力のみによる全断面降伏力、

$I = (1+3\rho)b_w d^3 / 12$ : 断面2次モーメント、

$A = (1+\rho)b_w d$ : 全断面積、 $\rho = A_F/A_W$ 、

$A_W$ : ウエブ断面積、 $A_F$ : 両フランジ断面積。

ここで  $\rho$  の値は通常の広フランジH型鋼で  $\rho = 2 \sim 3^9)$  となるが、対称箱型断面では  $\rho = 1$ 、また長方形断面では  $\rho = 0$  とすればよい。

ついで図-3(c)の第1弾塑性状態の断面力  $M$  および  $N$  を算定すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= m = \frac{1}{M_y} \left\{ \int_{-d/2}^t \sigma y dA + \int_t^{d/2} \sigma_y y dA \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_F}{4} d \sigma_y \left( 1 + \frac{d/2 - e_0}{t + e_0} \right) \right\} \\ &= \frac{\phi}{1+3\rho} \left\{ \frac{1}{2} - 2 \left( \frac{t}{d} \right)^3 + \frac{3}{2} \left( \frac{t}{d} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \rho \left( 1 + \frac{2t}{d} \right) \right\} \\ \frac{N}{N_y} &= n = \frac{1}{N_y} \left\{ \int_{-d/2}^t \sigma dA + \int_t^{d/2} \sigma_y dA \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_F}{2} \sigma_y \left( 1 - \frac{d/2 - e_0}{t + e_0} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{1+\rho} \left[ 1 - \frac{\phi}{4} \left( 1 + \frac{2t}{d} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \rho \left\{ 1 - \frac{\phi}{2} \left( 1 + \frac{2t}{d} \right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

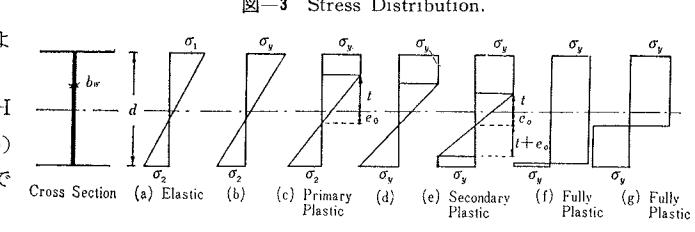


図-3 Stress Distribution.

$$\text{ただし } \phi = \phi/\phi_y = d/2(t + e_0)$$

式(2)より  $t/d$  を消去したうえで第1弾塑性状態における曲率の変化  $\phi_1$  および軸線の伸縮  $\epsilon_1 (= \phi_1 \cdot e_0)$  を求めれば、 $m < 0$  のときをも考慮して次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_1}{\phi_y} &= \Phi_1 = \frac{\pm \omega_1}{\omega_2 + \sqrt{\omega_2^2 + 4\omega_1\omega_3\rho^3}} \\ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_y} &= \tilde{\epsilon}_1 = 1 - \Phi_1(\omega_4 - 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

ただし、複号  $\pm$  は  $m$  の正負に応じて用いるものとし、また

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 8(1-n)^3(1+\rho)^3, \\ \omega_2 &= \{3(1+\rho)^2(1-n) - (1+3\rho)|m|\}^2 - \{3(1+\rho) \\ &\quad (1-n)\rho\}^2, \\ \omega_3 &= 3(1+\rho)(1-n) - (1+3\rho)|m|, \\ \omega_4 &= \sqrt{\rho^2 + 4(1+\rho)(1-n)/\Phi_1} - \rho \end{aligned}$$

さらに図-3(e)の第2弾塑性状態の  $M$  および  $N$  を式(2)と同様に算定すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= m = \frac{1}{M_y} \left\{ \int_{-d/2}^{-(t+2e_0)} (-\sigma_y y) dA \right. \\ &\quad \left. + \int_{-(t+2e_0)}^t \sigma_y dA + \int_t^{d/2} \sigma_y y dA + \frac{A_F}{2} d \sigma_y \right\} \\ &= \frac{3}{2(1+3\rho)} \left\{ 1 - \left( \frac{2e_0}{d} \right)^2 - \frac{1}{3\Phi^2} + 2\rho \right\} \\ \frac{N}{N_y} &= n = \frac{1}{N_y} \left\{ \int_{-d/2}^{-(t+2e_0)} (-\sigma_y) dA \right. \\ &\quad \left. + \int_{-(t+2e_0)}^t \sigma dA + \int_t^{d/2} \sigma_y dA + \frac{A_F}{2} \sigma_y \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_F}{2} \sigma_y \right\} = \frac{1}{1+\rho} \frac{2e_0}{d} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4)$$

よって第2弾塑性状態における曲率の変化  $\phi_2$  および軸線の伸縮  $\epsilon_2$  も式(3)と同様にそれぞれつぎのごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_2}{\phi_y} &= \Phi_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{3-3n^2(1+\rho)^2-2(1+3\rho)|m|+6\rho}} \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_y} &= \tilde{\epsilon}_2 = \frac{(1+\rho)n}{\sqrt{3-3n^2(1+\rho)^2-2(1+3\rho)|m|+6\rho}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5)$$

ただし、複号  $\pm$  は式(3)に準ずる。

ここで、図-3(b)のごとく圧縮縁のみ降伏した状態は弾性状態と第1弾塑性状態との境界を示し、式(2)に  $t=d/2$  を代入して  $m < 0$  の場合も考慮すれば、つ

ぎの初期降伏の条件式をうる。

また図-3(d)のごとく圧縮縁に引き続き引張縁が降伏した状態は第1弾塑性と第2弾塑性状態との境界を示すもので、式(4)に  $t + e_0 = d/2 - e_0$  とおくことによりつぎのごとき境界条件式となる。

ただし  $\lambda_1 = (1 + \rho) / (1 + 3\rho)$ ,  $\lambda_2 = (1 + \rho)^2 / (1 + 3\rho)$

さらに第1弾塑性または第2弾塑性状態の極限としての完全塑性状態の場合は、図-3(f)または(g)のごとく中立軸がフランジまたはウェブにある場合にわかれ、式(3)または式(5)で  $\phi$  を無限大とすれば、下記の式(8)がえられる。

中立軸がフランジにある場合 (図-3 (f))

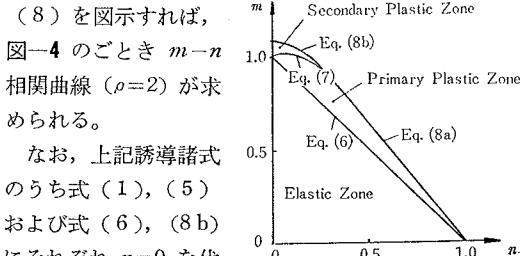
$$|m|=3\lambda_1(1-n), n \geq 1/(1+\rho) \dots \dots \dots \quad (8a)$$

### 中立軸がウェブにある場合（図-3 (g)）

$$|m|=3(\lambda_3 - \lambda_2 n^2)/2, \quad n < 1/(1+\rho) \dots \dots \dots \quad (8\text{ b})$$

ただ

以上の式(6)～式図-4 Interaction Curve. ( $\rho=2$ )



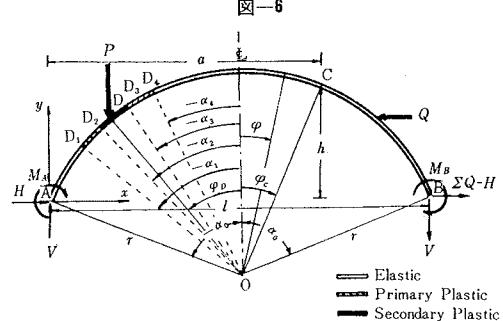
### 3. アーチに対する $\phi$ -法公式

一般に微小円弧 AB が図-5 のごとく A'B' に変形のうえ移動するものとすれば、A 点での曲率の変化  $\phi$ 、軸線の縮み  $\epsilon$  およびたわみ角  $\theta$  は半径方向変位  $u$  および接線方向変位  $v$  によってそれぞれ次式で与えられる<sup>10)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\left( \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} \right) \\ \epsilon &= \frac{u}{r} - \frac{dv}{ds} \\ \theta &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} \dots \quad (9)$$

ただし  $r$ : 曲率半径,  $ds$ : 微小軸長,  $u$  および  $v$  はそれぞれ円弧の中心方向および時計回り円周方向を正とし, また  $\theta$  は時計回りを正とする。

图-8



一方、図-6 に示すごとき单一アーチ AB を考え、両端 A, B に曲げモーメント  $M_A, M_B$ , 水平反力  $H$  および垂直反力  $V$  が働くものとし、部材の途中  $D_1D_2$ ,  $D_3D_4$  および  $D_2D_3$  の範囲にそれぞれ第1弾塑性および第2弾塑性領域が生ずるものとすれば、まず任意点の曲げモーメント  $M$  および軸力  $N$  は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{l-x}{l} M_A - \frac{x}{l} M_B - Hy + M_0 \\ N &= H \cos \varphi - V \sin \varphi + N_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

ただし  $M$  は内側に引張応力を生ずる方向を正,  $N$  は圧縮力を正とし,  $M_0$  および  $N_0$  はアーチ AB を単純アーチばかりと見なしたときの荷重による曲げモーメントおよび軸力を示す。また  $V = -(M_A + M_B)/l$ 。

ついで式(1), (3), (5)と式(9), (10)とを用うれば、内力と外力のつりあいより弾性および弾塑性領域にわたる微分方程式が以下のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_i}{d \varphi^2} + u_i &= -r(r\phi_i - \varepsilon_i) \\ \frac{dv_i}{d \varphi} &= u_i - r\varepsilon_i \\ \frac{du_i}{d \varphi} + v_i &= r\theta_i \end{aligned} \right\} i=0,1,2 \dots \dots \dots (11)$$

ここに添字記号  $i=0,1,2$  はそれぞれ弾性、第1および第2弾塑性の各応力状態を示す。また  $\phi_i, \epsilon_i (i=0,1,2)$  はそれぞれ式(1), (3), (5)の式表現となるが、同式中に含まれる  $m$  および  $n$  の内容が式(10)の  $M$  および  $N$  をそれぞれ  $M_y$  および  $N_y$  で除した値に変化する。式(11)の第1式より  $u_i$  を求め、これを第2および第3式に代入すれば、 $u_i, v_i$  および  $\theta_i$  の一般解がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= A_j \cos \varphi + B_j \sin \varphi + \int_{-\alpha_j}^{\varphi} (r \phi_i - \varepsilon_i) \sin(\bar{\varphi} - \varphi) r d\bar{\varphi} \\ v_i &= A_j \sin \varphi + B_j(1 - \cos \varphi) + C_j - \int_{-\alpha_j}^{\varphi} \times \phi_i r \{(1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi))\} r d\bar{\varphi} - \int_{-\alpha_j}^{\varphi} \times \varepsilon_i \cos(\bar{\varphi} - \varphi) r d\bar{\varphi} \\ \theta_i &= (B_j + C_j)/r - \int_{-d_j}^{\varphi} \phi_i r d\bar{\varphi} \end{aligned} \right\} i = 0, 1, 2, \dots, (12)$$

ただし  $A_j, B_j, C_j (j=0, 1, \dots, 4)$  : 積分定数、また  $\bar{\varphi}$  は  $-\alpha_j (j=0, 1, \dots, 4) \leq \bar{\varphi} \leq \varphi$  の値をとる変数で、 $\alpha_j (j=1, 2, 3, 4)$  は弾塑性境界を指定する角度である。

ここで任意点  $C$  の水平、垂直変位  $\delta_c^x, \delta_c^y$  およびたわみ角  $\theta_c$  を求めるため、まず式(12)の  $u_i, v_i$  を  $\delta_i^x, \delta_i^y$  に変換すればそれぞれ次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_i^x &= v_i \cos \varphi - u_i \sin \varphi \\ &= (B_j + C_j) \cos \varphi - B_j - \int_{-\alpha_j}^{\varphi} \times \{\phi_i r (\cos \varphi - \cos \bar{\varphi}) + \epsilon_i \cos \bar{\varphi}\} r d\bar{\varphi} \end{aligned} \right\}_{i=0, 1, 2} \\ \left. \begin{aligned} \delta_i^y &= v_i \sin \varphi + u_i \cos \varphi \\ &= A_j + (B_j + C_j) \sin \varphi - \int_{-\alpha_j}^{\varphi} \times \{\phi_i r (\sin \varphi - \sin \bar{\varphi}) + \epsilon_i \sin \bar{\varphi}\} r d\bar{\varphi} \end{aligned} \right\}_{i=0, 1, 2} \quad (13)$$

式(12), (13)に含まれる積分定数  $A_j, B_j, C_j (j=0, 1, \dots, 4)$  は次式のごとき弾塑性境界におけるたわみとたわみ角の連続条件および材端Aの境界条件によって決定される。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \varphi = -\alpha_0 &\text{ で } \delta_0^x = \delta_A^x, \delta_0^y = \delta_A^y, \theta_0 = \theta_A \\ \varphi = -\alpha_1 &\text{ で } \delta_0^x = \delta_1^x, \delta_0^y = \delta_1^y, \theta_0 = \theta_1 \\ \varphi = -\alpha_2 &\text{ で } \delta_1^x = \delta_2^x, \delta_1^y = \delta_2^y, \theta_1 = \theta_2 \\ \varphi = -\alpha_3 &\text{ で } \delta_2^x = \delta_1^x, \delta_2^y = \delta_1^y, \theta_2 = \theta_1 \\ \varphi = -\alpha_4 &\text{ で } \delta_1^x = \delta_0^x, \delta_1^y = \delta_0^y, \theta_1 = \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

よって式(12)の第3式および式(13)に  $\varphi = \varphi_c$  を代入したうえでC点の  $x, y$  座標を  $a, h$  で表わせば、結局所要の基本式が次式のごとく誘導される。

$$\left. \begin{aligned} \delta_c^x &= \delta_A^x + h \theta_A - \left[ \int_A^C \{\phi_0(h-y) + \epsilon_0 \cos \varphi\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cos \varphi\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cos \varphi\} ds \right] \end{aligned} \right\} \dots (15a)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_c^y &= \delta_A^y + a \theta_A - \left[ \int_A^C \{\phi_0(a-x) + \epsilon_0 \sin \varphi\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(a-x) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \sin \varphi\} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(a-x) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \sin \varphi\} ds \right] \end{aligned} \right\} \dots (15b)$$

$$\theta_c = \theta_A - \left[ \int_A^C \phi_0 ds + \int_{P_1} (\phi_1 - \phi_0) ds \right. \\ \left. + \int_{P_2} (\phi_2 - \phi_0) ds \right] \dots (15c)$$

ここに積分記号の添字  $P_1$  および  $P_2$  はそれぞれ A~C 間のアーチ表面における第1および第2弾塑性領域の材軸方向の長さを示し、図-6より  $P_1$  を  $-\alpha_1 \sim -\alpha_2, -\alpha_3 \sim -\alpha_4$ ,  $P_2$  を  $-\alpha_2 \sim -\alpha_3$  の範囲にとるものとし、これら弾塑性境界を指定する  $\alpha_j (j=1, 2, 3, 4)$  は弾塑性

境界条件としての式(6)および式(7)を用いてつぎのごとく算定される。たとえば、図-6における第1弾塑性および第2弾塑性領域の先端  $D_1$  点および  $D_2$  点の作用曲げモーメントが部材の初期降伏曲げモーメント  $M_{I D_1}$  および第1弾塑性と第2弾塑性との境界を示す臨界曲げモーメント  $M_{II D_2}$  に等しかるべき条件を用いて、式(6)および式(7)と式(10)より次式をうる。

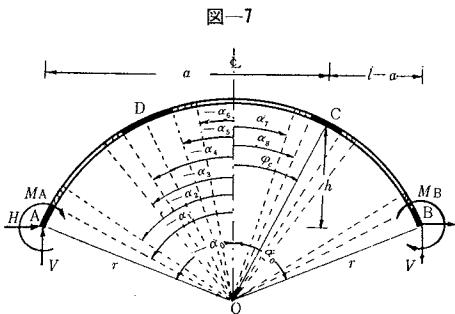
$$\left. \begin{aligned} |m_{(\varphi=-\alpha_1)}| &= M_{I D_1}/M_y = 1 - n_{(\varphi=-\alpha_1)} \\ |m_{(\varphi=-\alpha_2)}| &= M_{II D_2}/M_y = 1 + \lambda_1 n_{(\varphi=-\alpha_2)} \\ &\quad - 2 \lambda_2 \{n_{(\varphi=-\alpha_2)}\}^2 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} m(\varphi) &= \frac{1}{M_y} \left\{ \frac{M_A}{2} \left( 1 - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha_0} \right) - \frac{M_B}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 + \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha_0} \right) - Hr(\cos \varphi - \cos \alpha_0) + M_0(\varphi) \right\} \\ n(\varphi) &= \frac{1}{N_y} \{H \cos \varphi - V \sin \varphi + N_0(\varphi)\} \end{aligned} \right.$$

よって式(16)を解くことにより  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  が求められ、また  $\alpha_3$  および  $\alpha_4$  に対しても同様な条件式がえられる。

さらに図-7のごとく部材の材端および途中に弾塑性領域が生ずる場合の基本式を誘導すれば、結果は式(15)に合致し、ただ内容的に式(15)の  $P_1$  を  $-\alpha_1 \sim -\alpha_2, -\alpha_3 \sim -\alpha_4, -\alpha_5 \sim -\alpha_6, \alpha_7 \sim \alpha_8, P_2$  を  $-\alpha_0 \sim -\alpha_1, -\alpha_4 \sim -\alpha_5, \alpha_8 \sim \varphi_c$  の範囲に変えることとなる。ここで生じた  $\alpha_j (j=1, 2, \dots, 8)$  も式(16)と同様に弾塑性境界条件式によって求められる。

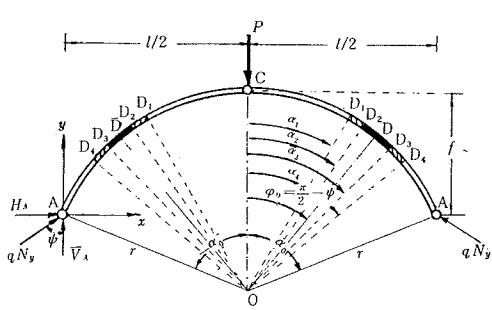


以上より、式(15)は直線材の場合に水平変位  $\delta_c^x$ 、軸線の伸縮  $\epsilon_i (i=0, 1, 2)$  および第1弾塑性領域長を示す  $P_1$  が必然的に消失することを考慮すれば、直線材  $\phi$ -法公式をその特例として包含し、円弧およびパラボラ材など曲線材に適用可能な  $\phi$ -法の一般公式を表わしていくことが了解できる。

#### 4. 静定アーチに対する基本的考察

H型、箱型および長方形断面をもつ3ヒンジ円弧アーチに单一中央集中荷重および満載等分布荷重が作用するときのたわみを、初期降伏時より最終崩壊時に至るまで求め、断面形状による差異ならびに軸力と軸線の伸縮に

図-8



よる影響について比較吟味する。

### (1) 単一中央集中荷重載荷の場合 (Case I)

図-8 に示すとき 3 ヒンジアーチの中央点 C に集中荷重  $P$  が作用するとき、最大応力位置 D 点の近傍  $D_1D_2$ ,  $D_3D_4$  および  $D_2D_3$  の範囲にそれぞれ第1および第2弾塑性領域が生ずるものとすれば、中央点 C のたわみ  $\delta_c^y$  は式(15)より対称条件  $\delta_c^x=0$  を用いて次式のごとくえられる。

$$\begin{aligned} \delta_c^y = & \left[ \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \{ \Phi_0 f(\varphi) + R_d \bar{\varepsilon}_0 g(\varphi) \} d\varphi \right. \\ & + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{ (\Phi_1 - \Phi_0) f(\varphi) + R_d (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0) g(\varphi) \} d\varphi \\ & + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \{ (\Phi_2 - \Phi_0) f(\varphi) + R_d (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_0) g(\varphi) \} d\varphi \\ & + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \{ (\Phi_1 - \Phi_0) f(\varphi) + R_d (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0) g(\varphi) \} d\varphi \\ & \times \frac{M_y r^2}{EI} \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ただし  $f(\varphi) = (\sin \alpha_0 - \sin \varphi) - l(\cos \varphi - \cos \alpha_0)/2f$ ,

$g(\varphi) = \sin \varphi + l \cos \varphi / 2f$ ,  $R_d = \varepsilon_y / \psi r = d/2r$

一方任意断面の  $M$  および  $N$  は図-8 の右半分で次式のごとく表わされる。

$$\begin{aligned} M/M_y = m &= \kappa_0 \{ \sin(\alpha_0 + \psi) - \sin(\varphi + \psi) \} \\ N/N_y = n &= q \sin(\varphi + \psi) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (18)$$

ただし  $\kappa_0 = N_y r / M_y$ ,

$$q = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} / N_y = P \sqrt{(l/4f)^2 + (1/2)^2} / N_y$$

$$\psi = \tan^{-1}(H_A / V_A) = \tan^{-1}(l/2f)$$

$$H_A = Pl/4f, V_A = P/2$$

また式(17)の  $\alpha_j (j=1,2,3,4)$  は式(16)と式(18)より以下のごとく算出される。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^{-1} \left\{ \frac{1 + \kappa_0 q \sin(\alpha_0 + \psi)}{q(\kappa_0 + 1)} \right\} - \psi, \\ \alpha_2 &= \sin^{-1} \left\{ \frac{(\lambda_1 - \kappa_0) + \sqrt{(\lambda_1 - \kappa_0)^2 + 8\lambda_2 \kappa_0 q \sin(\alpha_0 + \psi) - 1}}{4q\lambda_2} \right\} - \psi, \\ \alpha_3 &= \pi - \alpha_2 - 2\psi, \quad \alpha_4 = \pi - \alpha_1 - 2\psi \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (19)$$

さらに初期降伏荷重  $P_0$  および崩壊荷重  $P_P$  を求めるには、最大応力位置 D 点が図-8 から明らかなるとく  $\varphi_D = \pi/2 - \psi$  であり、これを式(18)に代入のうえ初期降伏状態を示す式(6)および完全塑性状態を表わす式(8a)または式(8b)を用いて  $P$  について解けばよく、 $P_0$  および  $P_P$  がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\frac{P_0}{N_y} = \frac{2 \cos \psi}{1 - \kappa_0 \{ \sin(\alpha_0 + \psi) - 1 \}} \quad \dots \dots \dots (20a)$$

$$\frac{P_P}{N_y} = \frac{6\lambda_1 \cos \psi}{3\lambda_1 - \kappa_0 \{ \sin(\alpha_0 + \psi) - 1 \}}, \quad n_D \geq \frac{1}{1+\rho} \quad \dots \dots \dots (20b)$$

または

$$\begin{aligned} \frac{P_P}{N_y} = & \frac{2 \cos \psi [\kappa_0 \{ \sin(\alpha_0 + \psi) - 1 \}] }{N_y} \\ & + \frac{\sqrt{\kappa_0^2 \{ \sin(\alpha_0 + \psi) - 1 \}^2 + 9\lambda_2\lambda_3}}{3\lambda_2}, \quad n_D < \frac{1}{1+\rho} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (20c)$$

したがって  $P$  値の範囲を  $P_0 \leq P < P_P$  にとり、式(1), (3), (5), (18)～(20)を用いて式(17)を数值積分すれば、初期降伏時より最終崩壊時に至る全過程の弾塑性たわみ  $\delta_c^y$  がえられる。

### (2) 満載等分布荷重載荷の場合 (Case II)

4.(1)の図-8と同様、最大応力位置 D 点近傍にそれぞれ第1および第2弾塑性領域が発生するゆえ、中央点 C のたわみは式(17)と全く同じ表現となるが、同式中に含まれる  $m$  および  $n$  は次式のごとき内容となる。

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_y} = m &= \kappa_0 V_A \left\{ \frac{\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi}{2 \sin \alpha_0} \right. \\ & \left. + \tan \psi (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) \right\} \\ \frac{N}{N_y} = n &= V_A \left( \tan \psi \cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \alpha_0} \right) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (21)$$

ただし  $V_A = V_A / N_y$ ,  $\tan \psi = H_A / V_A = l/8f$ ,

$$V_A = wl/2, H_A = wl^2/8f$$

また弾塑性境界を指定する  $\alpha_j (j=1,2,3,4)$  は式(16)と式(21)を用いて次値に変化する。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos^{-1} [\{ b_1 + \sqrt{b_1^2 - a_1 c_1} \} / a_1] \\ \alpha_2 &= \cos^{-1} [\{ b_2 + \sqrt{b_2^2 - a_2 c_2} \} / a_2] \\ \alpha_3 &= \cos^{-1} [\{ b_2 - \sqrt{b_2^2 - a_2 c_2} \} / a_2] \\ \alpha_4 &= \cos^{-1} [\{ b_1 - \sqrt{b_1^2 - a_1 c_1} \} / a_1] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (22)$$

ただし

$$a_1 = \kappa_0 + 2,$$

$$b_1 = \sin \alpha_0 \tan \psi (\kappa_0 + 1),$$

$$c_1 = \kappa_0 (2 \sin \alpha_0 \tan \psi \cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0) + 2(\sin \alpha_0 / V_A - 1),$$

$$a_2 = (2\lambda_1 - \kappa_0) / 2 \sin \alpha_0 - 4V_A \lambda_2 / \sin \alpha_0 + 2V_A \tan^2 \psi \lambda_2,$$

$$b_2 = (\tan \psi (\lambda_1 - \kappa_0) - 4V_A \tan \psi \lambda_2 / \sin \alpha_0) / 2,$$

$$c_2 = \kappa_0 (\cos^2 \alpha_0 / 2 \sin \alpha_0 - \tan \psi \cos \alpha_0) - 1 / V_A$$

$$- \lambda_1 / \sin \alpha_0 + 2V_A \lambda_2 (1 + \cos^2 \alpha_2) / \sin^2 \alpha_0 - 4 \tan \psi$$

$$V_A \cos^3 \alpha_2 \cdot \lambda_2 / \sin \alpha_0$$

$$c_3 = \kappa_0 (\cos^2 \alpha_0 / 2 \sin \alpha_0 - \tan \psi \cdot \cos \alpha_0) - 1/V_A \\ - \lambda_1 / \sin \alpha_0 + 2 V_A \lambda_2 (1 + \cos^4 \alpha_3) \\ / \sin^2 \alpha_0 - 4 \tan \psi \cdot V_A \cos^3 \alpha_3 \lambda_2 / \sin \alpha_0$$

ここで式 (22) の  $\alpha_2$  および  $\alpha_3$  はそれぞれ右辺の係数  $c_2$  および  $c_3$  中にも同値を含むゆえ、くり返し試算により算出することとなる。

一方初期降伏荷重  $w_0$ 、および崩壊荷重  $w_P$  は式(20)と同様、式(6)と式(8)および式(21)よりそれぞれつぎのごとく算出される。

$$w_0 = \frac{N_y}{(|\bar{m}_D| + \bar{n}_D)l} \dots \dots \dots \quad (23a)$$

$$w_P = \frac{3 \lambda_1 N_y}{(|\bar{m}_D| + 3 \lambda_1 \bar{n}_D)l}, \quad n_D \geq \frac{1}{1+\rho} \dots \dots (23 \text{ b})$$

または

$$w_P = \frac{\sqrt{\bar{m}_D^2 + 9\bar{n}_D^2\lambda_2\lambda_3} - |\bar{m}_D|}{3\bar{n}_D^2\lambda_2} \cdot \frac{N_y}{t}, \quad n_D < \frac{1}{1+\rho}$$

..... (23 c)

ここに  $\bar{m}_D$  および  $\bar{n}_D$  は式 (21) に  $\varphi = \varphi_D$  および  $w = N_y/l$  を代入した値でそれぞれ次値となる。

$$\bar{m}_D = \kappa_0 \{ (\sin^2 \alpha_0 - \sin^2 \varphi_D) / 2 \sin \alpha_0 + \tan \psi (\cos \alpha_0 - \cos \varphi_D) \} / 2,$$

$$\bar{n}_D = (\tan \psi \cos \varphi_D + \sin^2 \varphi_D / \sin \alpha_0) / 2$$

上式中の  $\varphi_D$  は最大応力位置を指定し、 $d\sigma/d\varphi=0$  より次式にて求められる。

$$\varphi_D = \cos^{-1} \{ \sin \alpha_0 \tan \psi (\kappa_0 + 1) / (\kappa_0 + 2) \} \dots (24)$$

よって式(1), (3), (5), (21)~(24)を用い,  
 $w_0 \leq w < w_P$ について式(17)の数値積分を行なえば、満載等分布荷重が作用するときの中央点Cのたわみ  
 $\delta_{C^y}$ が算出されることとなる。

### (3) 断面形状による比較

断面高さ  $d$ , 断面積  $A$ , 半開角  $\alpha_0$  および降伏点応力  $\sigma_y$  を一定とし, 断面形状係数  $\rho$  を変化させ 3 種の断面を一括包含して比較検討する。

すなわち、 $d/l=0.05$ ,  $\alpha_0=60^\circ$ ,  $\rho=0, 1, 2, 3$  に対して式(17)を  $10^{-5}$  の精度で Simpson 公式により数値積分すれば、図-9, 10 に示す荷重-たわみ曲線がえられる。

図-9 Case I ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.05$ )

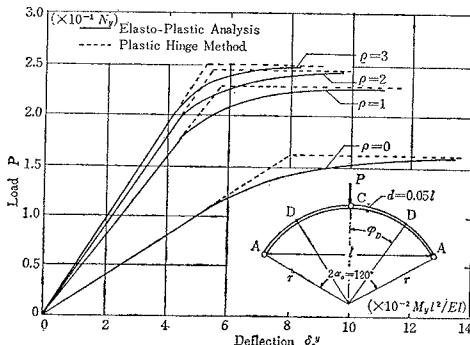
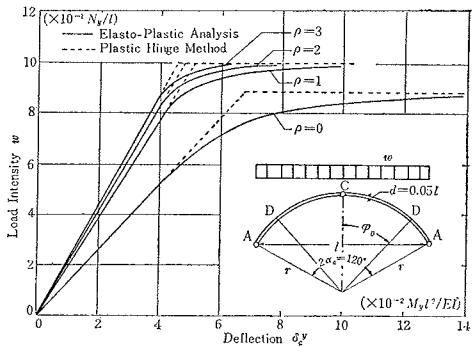


図-10 Case II ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.02\sim0.05$ )



一般に  $\rho$  が大なるにしたがい、崩壊荷重の増加が認められるが、図-9 では  $\rho=2\sim 3$  に対する増加率が著しく鈍化している。一方図-10 では  $\rho=1\sim 3$  に対する崩壊荷重  $w_P$  が合致するが、これは軸力の影響が大きく、中立軸がフランジ内にある式(23 b)に起因するものである。

初期降伏時より崩壊時までの変形性能は  $\rho$  が大なるほど小さくなるが、これは H 型断面のフランジがいったん降伏するとただちにウェブに波及し、断面全体の降伏進行が早められるという必然の結果を示している。これに反し  $\rho=0$  の長方形断面の変形性能は最も大きいが、崩壊荷重値がこれに伴なわぬため、結局両者が比較的大きい  $\rho=1$  すなわち、対称箱型断面または  $A_F=A_W$  なる H 型断面のごとき形状が本例では適当であると思われ、これらの傾向は直線材の場合<sup>3)</sup> にも合致している。

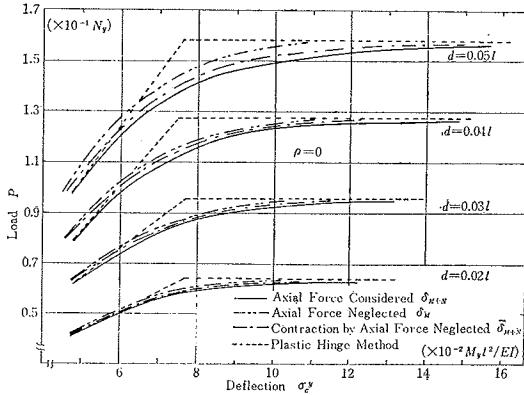
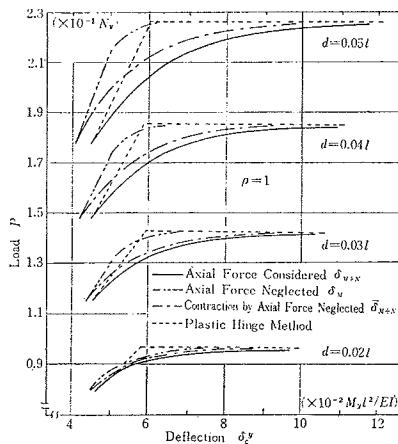
#### (4) 軸力および軸線の伸縮による影響

4. (1) および (2) のそれぞれに対し、軸力を無視し曲げモーメントのみを考慮した場合および軸力そのものは考慮したたび軸線の伸縮を無視した場合のたわみを、スパン  $l$  を一定に半開角  $\alpha_0$  および断面高さ-スパン比  $d/l$  をパラメーターとして求め、軸力および軸線の伸縮による影響について検討する。

すなわち、ここでは断面を長方形 ( $\rho=0$ ) および対称箱型または  $A_F=A_W$  なる H 型 ( $\rho=1$ ) とし、式(17)のたわみを  $\delta_{M+N}$ 、式(17)に  $n=0$  を代入したたわみを  $\delta_M$ 、式(17)の  $\epsilon_i$  ( $i=0, 1, 2$ ) = 0 としたたわみを  $\delta_{M+N}$  として、 $d/l=0.02 \sim 0.05$  および  $\alpha_0=10^\circ \sim 90^\circ$  に対して数値計算を行ない、一例を 図-11, 12 および表-1~4 に示した。

a)  $\alpha_0$  が一定で  $d/l$  が変化する場合

図-11 (a),(b) は Case I, 図-12 (a),(b) は Case IIについていずれも  $\alpha_0=60^\circ$  とし,  $d/l=0.02\sim0.05$  に対して  $\delta_{M+N}$ ,  $\delta_M$  および  $\bar{\delta}_{M+N}$  をそれぞれ図示したものの、一般に  $d/l$  が大なるにしたがい、 $\delta_{M+N}$  と  $\delta_M$  および  $\bar{\delta}_{M+N}$  との差が広がりとくに Case II ではその傾向が著しい。

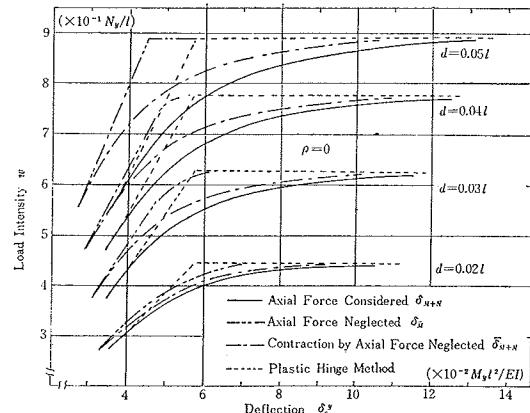
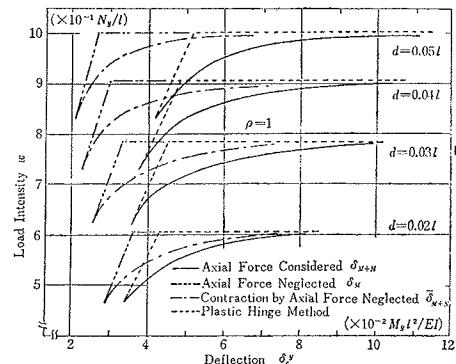
図-11 (a) Case I ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.02 \sim 0.05$ )図-11 (b) Case I ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.02 \sim 0.05$ )

すなわち、軸力がたわみによぼす影響  $\nu_1 = (\delta_{M+N} - \delta_M) \times 100\% / \delta_{M+N}$  と軸線の伸縮がたわみによぼす影響  $\nu_2 = (\delta_{M+N} - \bar{\delta}_{M+N}) \times 100\% / \delta_{M+N}$  を崩壊直前時の荷重  $P_{P^*}$  または  $w_{P^*}$  (崩壊荷重  $P_P$  または  $w_P$  では  $\delta_{M+N}$  が無限大となるゆえ,  $P_P$  または  $w_P$  よりそれぞれ 0.5% 減じた荷重)において比較すれば表-1, 2 のごとくなり,  $d/l=0.02 \sim 0.05$  に対し,  $\nu_1$  は Case I で 11~34% とかなり大きく, Case II で 42~66% とますます大きく, 結局いずれの場合も  $\alpha_0=60^\circ$  に対しては軸力の影響を無視できないことがわかる。他方  $\nu_2$  は Case I で 1~6% 程度とほとんど影響なく無視しても差し支えないが, Case II の  $d/l > 0.03$  では 9~20% となり, この場合は軸線の伸縮も無視できないことが認められる。

### b) $d/l$ が一定で $\alpha_0$ が変化する場合

$d/l=0.05$  とし,  $\alpha_0=10^\circ \sim 90^\circ$  まで  $10^\circ$  刻みで変化させ, 崩壊直前時の荷重  $P_{P^*}$  または  $w_{P^*}$  におけるたわみ  $\delta_{M+N}$ ,  $\delta_M$ ,  $\bar{\delta}_{M+N}$  および  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  を表-3, 4 に比較表示した。

$\nu_1$  は Case I で 16~90%, Case II で 35~100% といずれも大きく, 軸力の影響を無視することはできな

図-12 (a) Case II ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.02 \sim 0.05$ )図-12 (b) Case II ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.02 \sim 0.05$ )表-1  $\rho=0$ , Case I (Concentrated Load),  $\alpha_0=60^\circ$ 

$d/l$	0.02	0.03	0.04	0.05
$\delta_{C^y}^{(1)} \times 10^{-1} (N_y/l)$	$0.641 \times 10^{-1}$	$0.956 \times 10^{-1}$	0.1265	0.1568
$\delta_{M+N}$	0.1527	0.1545	0.1571	0.1603
$\delta_M$ ( $\nu_1$ )	0.1356 (11.2%)	0.1242 (19.6%)	0.1142 (27.3%)	0.1056 (34.1%)
$\bar{\delta}_{M+N}$ ( $\nu_2$ )	0.1512 (1.0%)	0.1512 (2.1%)	0.1511 (3.8%)	0.1511 (5.7%)

$$P_{P^*} = 0.995 P_P$$

表-2  $\rho=0$ , Case II (Distributed Load),  $\alpha_0=60^\circ$ 

$d/l$	0.02	0.03	0.04	0.05
$\delta_{C^y}^{(1)} \times 10^{-1} (N_y/l)$	0.4456	0.6225	0.7653	0.8796
$\delta_{M+N}$	0.1129	0.1170	0.1229	0.1303
$\delta_M$ ( $\nu_1$ )	$0.654 \times 10^{-1}$ (42.1%)	$0.553 \times 10^{-1}$ (52.3%)	$0.487 \times 10^{-1}$ (60.3%)	$0.440 \times 10^{-1}$ (66.2%)
$\bar{\delta}_{M+N}$ ( $\nu_2$ )	0.1078 (4.5%)	0.1064 (9.1%)	0.1053 (14.3%)	0.1049 (19.5%)

$$w_{P^*} = 0.995 w_P$$

い。しかし得られた計算資料より Case I の  $d/l=0.02 \sim 0.03$  で  $\alpha_0=80^\circ \sim 90^\circ$  に対してのみ 7% 以下となり, この場合は無視できることが認められた。一方,  $\nu_2$  は Case I で  $\alpha_0=60^\circ \sim 90^\circ$  に対し 6% 以下と小さいが,  $\alpha_0 < 50^\circ$  では 10% 以上と大きくなる傾向にあり, Case

表-3  $\rho=0$ , Case I (Concentrated Load),  $d/l=0.05$ 

$\alpha_0$ ( $\times M_y l^2 / EI$ )	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\delta_{M+N}^y$	0.1134	0.1552	0.1689	0.1700	0.1652	0.1568	0.1459	0.1332	0.1192
$\delta_{M+N}$	0.3087	0.1759	0.1462	0.1409	0.1437	0.1603	0.1824	0.2154	0.2640
$\delta_M^y$ ( $v_1$ )	$0.290 \times 10^{-1}$ (90.5%)	$0.427 \times 10^{-1}$ (75.6%)	$0.550 \times 10^{-1}$ (62.4%)	$0.687 \times 10^{-1}$ (51.3%)	$0.851 \times 10^{-1}$ (40.8%)	0.1056 (34.1%)	0.1325 (27.4%)	0.1691 (21.5%)	0.2206 (16.5%)
$\delta_{M+N}^y$ ( $v_2$ )	0.1054 (65.8%)	0.1073 (38.9%)	0.1126 (23.0%)	0.1211 (14.1%)	0.1309 (8.9%)	0.1511 (5.7%)	0.1756 (3.7%)	0.2101 (2.5%)	0.2598 (1.6%)

 $P_P^* = 0.995 P_P$ 表-4  $\rho=0$ , Case II (Distributed Load),  $d/l=0.05$ 

$\alpha_0$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\delta_{C,y}^y$ ( $\times M_y l^2 / EI$ )	0.3449	0.6599	0.9049	1.030	1.013	0.8796	0.6978	0.5246	0.3832
$\delta_{M+N}$	0.1444	$0.829 \times 10^{-1}$	0.1466	0.1494	0.1412	0.1303	0.1410	0.1644	0.2019
$\delta_M^y$ ( $v_1$ )	$0.255 \times 10^{-3}$ (99.8%)	$0.202 \times 10^{-3}$ (97.6%)	$0.708 \times 10^{-2}$ (95.2%)	$0.137 \times 10^{-1}$ (89.2%)	$0.289 \times 10^{-1}$ (79.5%)	$0.440 \times 10^{-1}$ (66.2%)	$0.636 \times 10^{-1}$ (54.9%)	$0.916 \times 10^{-1}$ (44.3%)	0.1322 (34.5%)
$\delta_{M+N}^y$ ( $v_2$ )	$0.593 \times 10^{-3}$ (99.6%)	$0.733 \times 10^{-2}$ (91.2%)	$0.577 \times 10^{-1}$ (60.6%)	$0.830 \times 10^{-1}$ (44.5%)	0.1005 (28.9%)	0.1049 (19.5%)	0.1244 (11.8%)	0.1531 (6.8%)	0.1940 (3.9%)

 $w_P^* = 0.995 w_P$ 

II では  $\alpha_0=80^\circ \sim 90^\circ$  で 7% 以下と無視しうるが、 $\alpha_0=30^\circ \sim 70^\circ$  では 12~61%， $\alpha_0$  がさらに小さく扁平になればその影響は 90% 以上にも増大し、当然考慮しなければならないことがわかる。

## 5. 不静定アーチの弾塑性解析法

3. で導いた  $\phi$ -法公式を用うことにより、不静定アーチの弾塑性解析が可能となるが、その解法骨子は弾性解析における共役ばかり法と類似であり、ただ弾塑性境界条件としての  $m-n$  相関関係式 (6)~(8) (図-4 参照) が加わるのみといえる。

すなわち、不静定アーチにまず弾塑性領域のみ発生する場合は、弾塑性境界を指定する  $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$  を式 (6), (7) より誘導した弾塑性境界条件式 (16) を用いて求めるとともに、支点の境界条件より不静定反力および未知変形量を算定する。

さらに、荷重の増加とともにある断面の  $m$  および  $n$  が完全塑性条件たる式 (8) を満足する場合は、いわゆる塑性ヒンジが形成されることになり、同断面での曲率の変化は無限大となる。実際にはひずみ硬化などの影響によりかかる現象は起こりえないが、ここでは解析の便宜上リミットアナリシス<sup>4), 5)</sup> にいう塑

性ヒンジを仮定するものとする。すなわち、もし C 点に塑性ヒンジが形成される場合には、同点は式 (8) を満足するヒンジ構造となるゆえ、アーチは不静定次数を一次減少し、新たに未知たわみ角を増すことになるが、C 点でのたわみの連続条件がこれに対処するゆえ、かかる場合も結局未知数と同数の条件式をうることになる。

以下に具体例をあげて解説する。

### (1) 不静定反力および未知変形量の算定

いま、支点条件を両端ヒンジおよび両端固定として、集中荷重または等分布荷重をうけるライズの比較的大きいアーチ ( $半開角 \alpha_0 > 30^\circ$ ) の崩壊前の状態をリミットアナリシス<sup>5)</sup> を参照して 図-13, 14 のごとく想定すれば、それぞれの場合の不静定反力および未知変形量がつぎのごとき条件によって算定されることとなる。

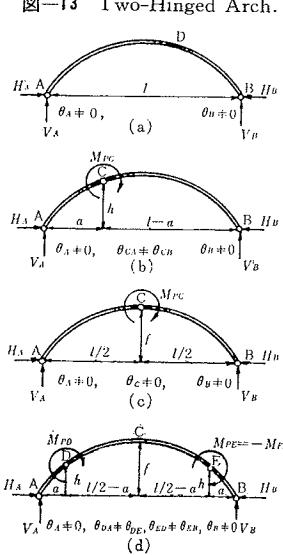
#### a) 両端ヒンジの場合

① 図-13 (a) のごとくアーチの途中に弾塑性領域のみ生ずる場合は、不静定反力  $H_A$  が式 (15a) を用いて  $\delta_B^x=0$  すなわち、次式より算定される。

$$\begin{aligned} & \int_A^B \{\phi_0(-y) + \epsilon_0 \cos \varphi\} ds \\ & + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(-y) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cos \varphi\} ds \\ & + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(-y) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cos \varphi\} ds = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

また  $\theta_A$  は式 (15b) を用いて、 $\delta_B^y=0$  より次式のごとく求められる。

$$\begin{aligned} \theta_A = & \frac{1}{l} \left[ \int_A^B \{\phi_0(l-x) + \epsilon_0 \sin \varphi\} ds \right. \\ & + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(l-x) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \sin \varphi\} ds \\ & \left. + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(l-x) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \sin \varphi\} ds \right] \end{aligned} \quad (26)$$



② 図-13 (b) のごとく弾塑性領域の発生に引き続い部材の中間点Cに塑性ヒンジが形成される場合は、C点に塑性ヒンジをもつ3ヒンジアーチとなって静定化され、 $H_A$ はC点の完全塑性条件たる次式を用いて求められることとなる。

$$|m_C| = \frac{M_{PC}}{M_y} = \begin{cases} 3\lambda_1(1-n_C), & n_C \geq 1/(1+\rho) \\ 3(\lambda_3 - \lambda_2 n_C^2)/2, & n_C < 1/(1+\rho) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (27)$$

ただし  $M_{PC}$  : C点の塑性曲げモーメント

一方C点のたわみ角は塑性ヒンジの形成により不連続で  $\theta_{CA} = \theta_{CB}$  となるゆえ、同点のたわみの連続条件  $\delta_{CA}^x = \delta_{CB}^x$  および  $\delta_{CA}^y = \delta_{CB}^y$  を用いて  $\theta_A$  および  $\theta_B$  を求めればそれぞれ次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{l} \left[ \int_A^B [\phi_0((a-x)+(l-a)(h-y)/h) \right. \\ &\quad + \epsilon_0 \{\sin \varphi + (l-a) \cos \varphi / h\}] ds \\ &\quad + \int_{P_1} [(\phi_1 - \phi_0) \{(a-x)+(l-a)(h-y)/h\} \\ &\quad + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \{\sin \varphi + (l-a) \cos \varphi / h\}] ds \\ &\quad + \int_{P_2} [(\phi_2 - \phi_0) \{(a-x)+(l-a)(h-y)/h\} \\ &\quad + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \{\sin \varphi + (l-a) \cos \varphi / h\}] ds \end{aligned} \right] \\ \theta_B &= \theta_A - \frac{1}{h} \left[ \int_A^B [\phi_0(h-y) + \epsilon_0 \cos \varphi] ds \right. \\ &\quad + \int_{P_1} [(\phi_1 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cos \varphi] ds \\ &\quad + \int_{P_2} [(\phi_2 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cos \varphi] ds \left. \right] \end{math>$$

.....(28)

③ 図-13 (c) は図-13 (b) の特例で、 $H_A$  は式 (27) より求められ、 $\theta_A (= -\theta_B)$  は対称条件  $\delta_C^x = 0$  より下記の式 (29) となる。

$$\begin{aligned} \theta_A &= -\theta_B = \frac{1}{f} \left[ \int_A^C [\phi_0(f-y) + \epsilon_0 \cos \varphi] ds \right. \\ &\quad + \int_{P_1} [(\phi_1 - \phi_0)(f-y) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cos \varphi] ds \\ &\quad + \int_{P_2} [(\phi_2 - \phi_0)(f-y) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cos \varphi] ds \left. \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (29)$$

④ 図-13 (d) のごとく左右対称2個の塑性ヒンジが同時に形成される場合は、DおよびE点に塑性ヒンジをもつ4ヒンジアーチとなり、 $H_A$ に対して式 (27) と同様に次式が成立する。

$$\begin{aligned} |m_D| &= \frac{M_{PD}}{M_y} \\ &= \begin{cases} 3\lambda_1(1-n_D), & n_D \geq 1/(1+\rho) \\ 3(\lambda_3 - \lambda_2 n_D^2)/2, & n_D < 1/(1+\rho) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (30)$$

また未知たわみ角  $\theta_A$ ,  $\theta_{DA}$  および  $\theta_{DC}$  はD点

におけるたわみの連続条件  $\delta_{DA}^x = \delta_{DC}^x$  および対称条件  $\delta_C^x = \theta_C = 0$  を用いてそれぞれ次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{h} \left[ \int_A^C [\phi_0(h-y) + \epsilon_0 \cos \varphi] ds \right. \\ &\quad + \int_{P_1} [(\phi_1 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cos \varphi] ds \\ &\quad + \int_{P_2} [(\phi_2 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cos \varphi] ds \left. \right] \\ \theta_{DA} &= \theta_A - \left[ \int_A^D \phi_0 ds + \int_{P_1} (\phi_1 - \phi_0) ds \right. \\ &\quad + \int_{P_2} (\phi_2 - \phi_0) ds \left. \right] \\ \theta_{DC} &= \int_D^C \phi_0 ds + \int_{P_1} (\phi_1 - \phi_0) ds \\ &\quad + \int_{P_2} (\phi_2 - \phi_0) ds \end{aligned} \right] \quad \dots \dots \dots (31)$$

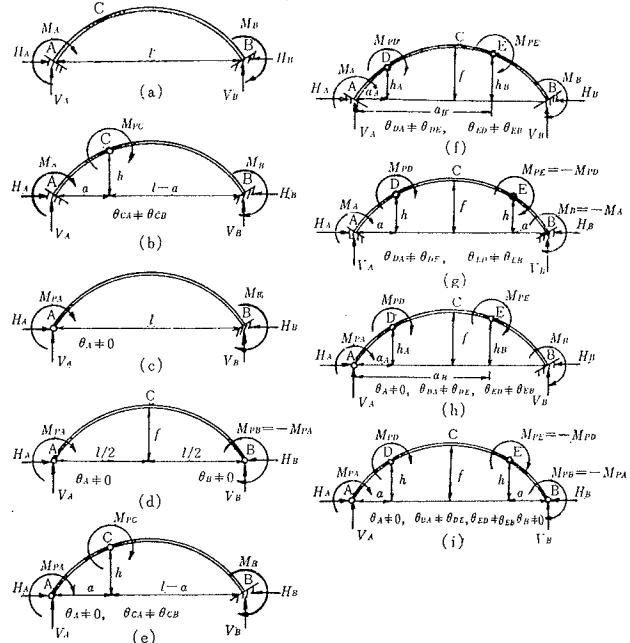
なお、非対称2個の塑性ヒンジが部材の中間に形成される場合は、リミットアナリシスにいう4点系となり崩壊に至るゆえ、両点の完全塑性条件を用うるのみで崩壊荷重が算定されうる。

### b) 両端固定の場合

① 図-14 (a)において不静定反力を  $M_A, M_B$  および  $H_A$  とすれば、これらは式 (15) で  $\delta_A^x = \delta_A^y = \theta_A = 0$  および  $\delta_B^x = \delta_B^y = \theta_B = 0$  とき、次式を連立に解くことによって算定される。

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B \phi_0 ds + \int_{P_1} (\phi_1 - \phi_0) ds + \int_{P_2} (\phi_2 - \phi_0) ds &= 0 \\ \int_A^B \{\phi_0(-y) + \epsilon_0 \cos \varphi\} ds \end{aligned} \right]$$

図-14



$$\begin{aligned}
 & + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(-y) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\cos\varphi\} ds \\
 & + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(-y) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\cos\varphi\} ds = 0 \\
 \int_A^B \{ & \phi_0(l-x) + \varepsilon_0 \sin\varphi\} ds \\
 & + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(l-x) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\sin\varphi\} ds \\
 & + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(l-x) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\sin\varphi\} ds = 0
 \end{aligned}$$

② 図-14 (b) のごとく C 点に塑性ヒンジが形成される場合は、式 (27) が  $M_A$  を求める条件となり、 $H_A$  および  $M_B$  の算定条件は C 点のたわみの連続条件を用いて次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_A^B \{\phi_0(h-y) + \varepsilon_0 \cos \varphi\} ds \\ & + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(h-y) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cos \varphi\} ds \\ & + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(h-y) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \cos \varphi\} ds = 0 \\ \\ & \int_A^B \{\phi_0(a-x) + \varepsilon_0 \sin \varphi\} ds \\ & + \int_{P_1} \{(\phi_1 - \phi_0)(a-x) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \sin \varphi\} ds \\ & + \int_{P_2} \{(\phi_2 - \phi_0)(a-x) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \sin \varphi\} ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

③ 図-14(c) の場合も、A 端の完全塑性条件たる次式によって  $M_A$  が直接求められる。

$$|m_A| = \frac{M_{PA}}{M_y} = \begin{cases} 3\lambda_1(1-n_A), & n_A \geq 1/(1+\rho) \\ 3(\lambda_3 - \lambda_2 n_A^2), & n_A < 1/(1+\rho) \end{cases} \quad \dots \quad (34)$$

残る  $H_A$  および  $M_B$  に対する条件式は式 (33) に  $a=h=0$  を代入した式に合致する。

④ 図-14(d) は両端 A, B に塑性ヒンジが同時に形成される場合で、 $M_A(-M_B)$  は式(34)より、また  $H_A$  の算定条件式および  $\theta_A$  は対称条件  $\delta_C^x = \theta_C = 0$  より次式をうる。

$$\begin{aligned} & \int_A^C \{ \phi_0(-y) + \varepsilon_0 \cos \varphi \} \, ds \\ & + \int_{P_1} \{ (\phi_1 - \phi_0)(-y) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cos \varphi \} \, ds \\ & + \int_{P_2} \{ (\phi_2 - \phi_0)(-y) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \cos \varphi \} \, ds = 0 \end{aligned}$$

(5) C点およびA端に塑性ヒンジが生ずる図-14(e)では、 $M_A$  および  $H_A$  が式(27)および式(34)を用いて決定され、残る  $M_B$  の算定条件式および  $\theta_A$  は式(28)に  $\theta_B=0$  を代入した式表現に合致する。

以下 図-14 (f), (g), (h), (i) の場合も同様に支点の境界条件、完全塑性条件および塑性ヒンジ点のたわみの連続条件を用いて、不静定反力および未知たわみ角を算定したが紙面の都合上省略する。なお、図-14 (i) の C 点に塑性ヒンジが生ずる場合は 5 点ヒンジとなって崩壊に至るゆえ、式 (27), (30), (34) を用いて崩壊荷重が算定される。

## (2) 算 法

上記諸式を用うれば弾塑性時における断面力および変形量の算出が可能となるが、その算法は 図-15 のフローチャートに示すとく一般にくり返し試算を必要とする。

図-15 Flow Chart.

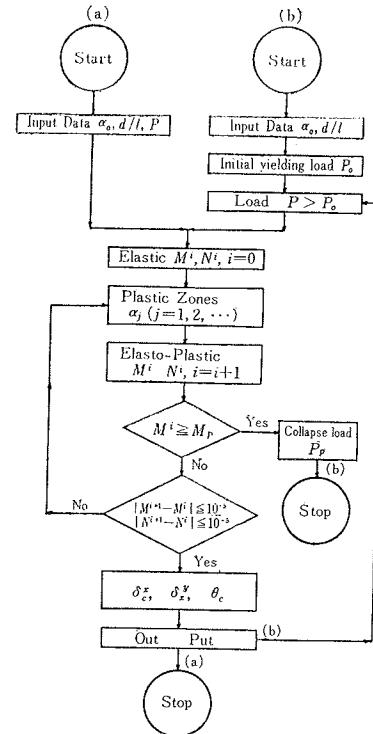


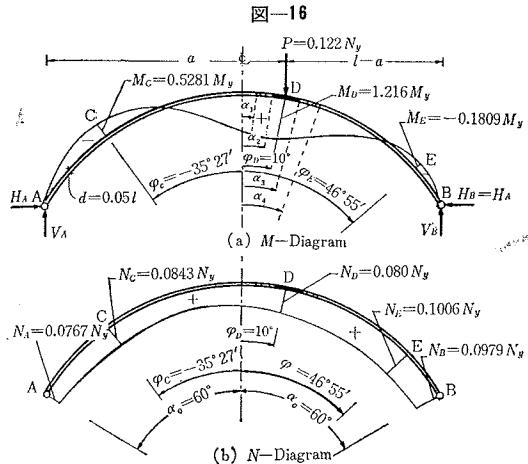
図-15(a)は任意荷重  $P (> P_0$ : 初期降伏荷重) が作用する場合の任意点の断面力  $M, N$  および変形量  $\delta c^x, \delta c^y, \theta_c$  の算定手法を、また 図-15(b) は初期降伏時より最終崩壊時まで追跡する場合のプログラムを概略示したもので、塑性ヒンジ形成以後のたわみとたわみ角の算出には特異積分を行なう必要などあるが、これら詳細は 6. の計算例で述べることにする。

## 6. 計 算 例

計算手法の解説をも兼ねて、以下に長方形断面( $\rho=0$ )をもつ不静定円弧アーチに対する弾塑性解析を行なう。

### 1) 偏心集中荷重をうける2ヒンジアーチ

図-16のごとき 2 ヒンジ アーチ ( $\alpha_0 = 60^\circ$ ,  $d/l = 0, 05$ )



のD点(\$\varphi\_D=10^\circ\$)に単一集中荷重\$P=0.122 N\_y(>P\_0:\$初期降伏荷重)が作用するとき、\$M, N\$-図ならびに任意点Cの\$\delta\_{C^x}, \delta\_{C^y}\$および\$\theta\_C\$を求めればつぎのごとくである。

当初弾塑性領域の発生が未知なるゆえ、試算の第1段階として弾性解析を行なう。

まず任意断面の\$M\$および\$N\$は

A~D間で

$$\left. \begin{aligned} M/M_y &= m = \kappa_0 \{ V_A (\sin \alpha_0 + \sin \varphi) \\ &\quad - H_A (\cos \varphi - \cos \alpha_0) \} \\ N/N_y &= n = H_A \cos \varphi - V_A \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots(35\text{a})$$

D~B間で

$$\left. \begin{aligned} M/M_y &= m = \kappa_0 \{ V_B (\sin \alpha_0 - \sin \varphi) \\ &\quad - H_B (\cos \varphi - \cos \alpha_0) \} \\ N/N_y &= n = H_B \cos \varphi + V_B \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots(35\text{b})$$

ただし \$V\_A = P(l-a)/l, V\_B = Pa/l,

$$H_A = H_B = H_A/N_y, P = P/N_y,$$

ついで第2、第3項を0に等置した式(25)に式(35)を代入して弾性時における不静定力\$H\_A\$を求めれば次式がえられる。

$$H_A/N_y = H_A = d_1 P/d_2, \dots\dots(36)$$

ただし

$$\begin{aligned} d_1 &= \kappa_0 \{ \sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + \cos \alpha_0 \cos \varphi_D \\ &\quad - \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - (\cos 2\varphi_D - \cos 2\alpha_0)/4 \\ &\quad - 3(\cos 2\varphi_D - \cos 2\alpha_0)/4\kappa_0 \\ &\quad - (2a-l)(\varphi_D \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - \sin 2\varphi_D \sin \alpha_0) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= 2\kappa_0 \{ \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 - 3 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 / 2 \\ &\quad + \alpha_0 / 2 + 3(\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) / 2\kappa_0^2 \} \end{aligned}$$

ここで \$\alpha\_0=60^\circ, d/l=0.05, \varphi\_D=10^\circ\$ および \$P=0.122 N\_y\$ の諸値を式(35), (36)に代入のうえ、\$d\sigma/d\varphi=0\$ を用いて最大応力点C, D, Eの\$M\$および\$N\$を求めるべく、次式のごとくそれぞれ算出される。

$$\left. \begin{aligned} M_C &= -0.525 M_y, N_C = 0.084 N_y, \\ M_D &= 1.220 M_y, N_D = 0.080 N_y, \\ M_E &= -0.179 M_y, N_E = 0.101 N_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

一方、初期降伏曲げモーメント\$M\_I\$および臨界曲げモーメント\$M\_{II}\$が式(6)および式(7)よりそれぞれ次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{I,C} &= 0.916 M_y, M_{II,C} = 1.070 M_y, \\ M_{I,D} &= 0.920 M_y, M_{II,D} = 1.067 M_y, \\ M_{I,E} &= 0.900 M_y, M_{II,E} = 1.080 M_y \end{aligned} \right\} \dots\dots(38)$$

式(37)および式(38)より\$M\_D > M\_{II,D} > M\_{I,D}\$となるゆえ、D点近傍に第1弾塑性引き続き第2弾塑性領域が発生していることがわかり、これを図-16(a)のごとく\$\alpha\_j\$(\$j=1, 2, 3, 4\$)で示せば、これらは式(16)および式(35)を用いて次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^{-1} \left\{ \frac{1 - \kappa_0 q_A \sin(\alpha_0 + \psi_A)}{q_A(1 - \kappa_0)} \right\} - \psi_A, \\ \alpha_2 &= \sin^{-1} \left\{ \frac{(\kappa_0 + 1) - \sqrt{(\kappa_0 + 1)^2 -}}{4 q_A} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{8 \{\kappa_0 q_A \sin(\alpha_0 + \psi_A) - 1\}}{q_A} \right\} - \psi_A, \\ \alpha_3 &= \sin^{-1} \left\{ \frac{(\kappa_0 + 1) - \sqrt{(\kappa_0 + 1)^2 -}}{4 q_B} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{8 \{\kappa_0 q_B \sin(\alpha_0 + \psi_B) - 1\}}{q_B} \right\} - \psi_B, \\ \alpha_4 &= \sin^{-1} \left\{ \frac{1 - \kappa_0 q_B \sin(\alpha_0 + \psi_B)}{q_B(1 - \kappa_0)} \right\} - \psi_B, \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

ただし \$q\_A = \sqrt{H\_A^2 + V\_A^2}/N\_y, q\_B = \sqrt{H\_B^2 + V\_B^2}/N\_y\$, \$\psi\_A = \tan^{-1}(H\_A/V\_A), \psi\_B = \tan^{-1}(H\_B/V\_B)\$

ここで改めて式(25)より式(39)の\$\alpha\_j\$(\$j=1, 2, 3, 4\$)を考慮した弾塑性時の\$H\_A\$を求める事になるが、また式(25)を次式のごとく無次元化して表現する。

$$\left[ \int_{-\alpha_0}^{\varphi_D} \{ \Phi_0' (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) + R_d \bar{\epsilon}_0 \cos \varphi \} d\varphi \right. \\ \left. + \int_{\varphi_D}^{\alpha_0} \{ \Phi_0' (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) + R_d \bar{\epsilon}_0' \cos \varphi \} d\varphi \right] \\ + I_P \frac{M_y r^2}{EI} = 0 \dots\dots(40)$$

ただし

$$\begin{aligned} I_P &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \{ (\Phi_1 - \Phi_0) (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) \\ &\quad + R_d (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &\quad + \int_{\alpha_2}^{\varphi_D} \{ (\Phi_2 - \Phi_0) (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) \\ &\quad + R_d (\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &\quad + \int_{\varphi_D}^{\alpha_3} \{ (\Phi_2' - \Phi_0') (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) \\ &\quad + R_d (\bar{\epsilon}_2' - \bar{\epsilon}_0') \cos \varphi \} d\varphi \\ &\quad + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \{ (\Phi_1' - \Phi_0') (\cos \alpha_0 - \cos \varphi) \\ &\quad + R_d (\bar{\epsilon}_1' - \bar{\epsilon}_0') \cos \varphi \} d\varphi \end{aligned}$$

ここに \$\Phi\_0, \bar{\epsilon}\_0, \Phi\_1, \bar{\epsilon}\_1, \Phi\_2, \bar{\epsilon}\_2, \Phi\_2', \bar{\epsilon}\_2'\$ および \$\Phi\_1', \bar{\epsilon}\_1', \Phi\_1', \bar{\epsilon}\_1'\$, \$\Phi\_2', \bar{\epsilon}\_2'\$ は式(1), (3), (5)にそれぞれ式(35a)および式(35b)を代入した値を示す。

ついで式(40)の第3項の\$IP\$すなわち弾塑性項を第

1,2 項の弾性項に比し微小と見做して右辺に移項し定数項のごとく取り扱い、第 1, 第 2 項に含まれる  $H_A$  を求めれば、結局弾塑性時における  $H_A$  が次式のごとく誘導される。

$$H_A/N_y = H_A = (d_1 P - I_P)/d_2 \quad \dots \dots \dots (41)$$

式(41)の演算は  $I_P$  を Simpson 公式に基づく数値積分により試算で算定することとなり、ここでえた収斂値を式(26)に代入すれば  $\theta_A$  も求まり、これらを用いて式(15)より任意点 C の変形量が算出されることとなる。

いま、図-15(a)に示すフローチャートにしたがって数値計算を行なえば、表-5のごとくわずか3回の試算により収斂し、図-16(a), (b)に示すM, N-図がえられ、また任意点C(たとえば $\varphi_C = -35^{\circ}27'$ )の変形量が次値のごとく算出される。

$$\delta_e x = -3.57 \times 10^{-3} M_y l^2 / EI,$$

$$\delta_c y = -2.23 \times 10^{-3} M_r l^2 / EI,$$

$$\theta_C = -3.75 \times 10^{-2} M_y I / EI$$

表—5

	$H_A(XN_3)$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
第1次近似值	0.0686	5°58'	9°30'	12°07'	14°24'
第2次近似值	0.0687	6°03'	9°34'	12°04'	14°19'
第3次近似值	0.0687	6°02'	9°33'	12°03'	14°20'

#### (2) 中央集中荷重をうける固定アーチ

図-17 に示すとき固定アーチに単一中央集中荷重  $P$  が作用するとき、初期降伏時より最終崩壊時に至る全過程の  $M$ ,  $N$  および荷重点Cのたわみ  $\delta_C$  を以下に求める。

まず弾性解析を行ない最大応力点 A, D, C の応力を求めればつぎの諸値がえられる。

$$\begin{aligned} \sigma_A/\rho_y = n_A \pm m_A &= \left\{ \begin{array}{ll} 5.150 & P/N_y \\ -3.499 & \text{"} \end{array} \right. \\ \sigma_D/\sigma_y = n_D \pm m_D &= \left\{ \begin{array}{ll} 3.895 & \text{"} \\ -2.034 & \text{"} \end{array} \right. \\ \sigma_C/\sigma_y = n_C \pm m_C &= \left\{ \begin{array}{ll} 7.916 & \text{"} \\ -6.345 & \text{"} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (42)$$

式(42)より  $|\sigma_C| > |\sigma_A| > |\sigma_D|$  が成立することが認められ、まず  $\sigma_C = \sigma_y$  より求めた初期降伏荷重  $P_0 = 0.126 N_y$  が決定され、このときの  $M, N$ -図は 図-18(a)に示すごとくえられる。

ついで  $P > P_0$  と荷重値を増加すれば逐次 C, A, D 点の順序で弾塑性領域の発生および塑性ヒンジの形成が予想され、以下の 4 段階を想定すればすべての弾塑性解析を含むことになる。

a) C点に弾塑性領域が生ずる場合 (図-18 (b) 参照)

いま C 点近傍に  $2\alpha_1$ , および  $2\alpha_2$  の第 2 および第 1 強塑性領域のみ発生するものとすれば、式 (32) は対称

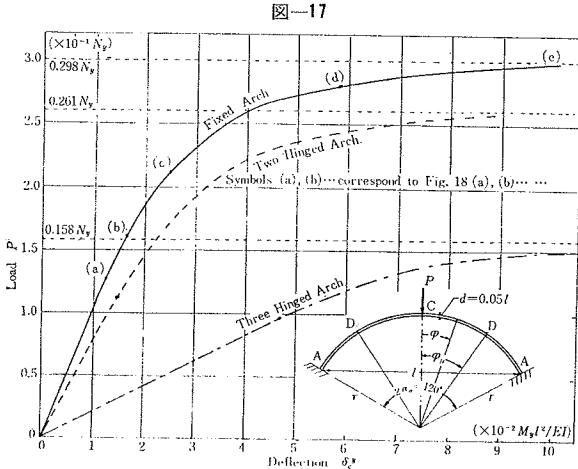
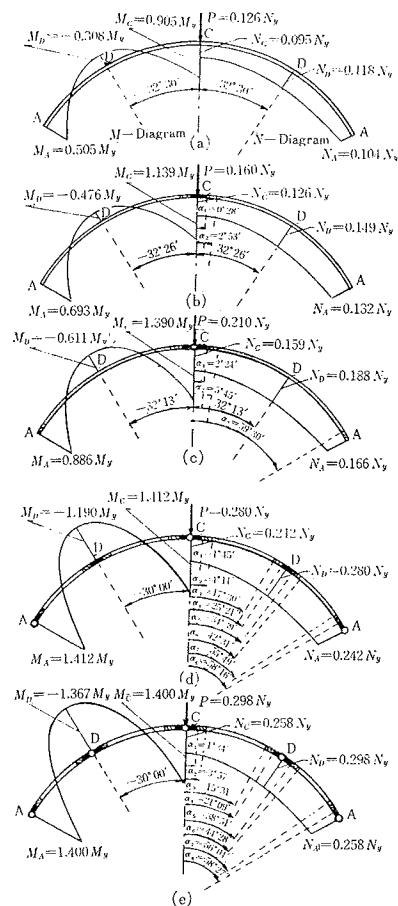


図-18  $M, N$ -Diagram.



条件を考慮して次式のごとき無次元化式で表わされる。

$$\int_0^{\alpha_0} \Phi_0 d\varphi + I_A = 0,$$

$$\int_0^{\alpha_0} \{ \Phi_0(1 - \cos \varphi) + R_d \bar{\epsilon}_0 \cos \varphi \} + I_B = 0 \quad (43)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} I_A &= \int_{P_1} (\Phi_1 - \Phi_0) d\varphi + \int_{P_2} (\Phi_2 - \Phi_0) d\varphi \\ I_B &= \int_{P_1} \{(\Phi_1 - \Phi_0)(1 - \cos \varphi) \\ &\quad + R_d(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \cos \varphi\} d\varphi \\ &\quad + \int_{P_2} \{(\Phi_2 - \Phi_0)(1 - \cos \varphi) \\ &\quad + R_d(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \cos \varphi\} d\varphi \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

ここに  $P_1$  および  $P_2$  はそれぞれ  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  および  $0 \sim \alpha_1$  の範囲をとることとなる。

式 (41) の誘導と同じく、式 (43) の第2項  $I_A, I_B$  をそれぞれ微小と見做して右辺に移項し、第1項より不静定力  $M_A$  および  $H_A$  を連立に解けばそれぞれ次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_A/M_y &= m_A = \kappa_0 V_{A g_2} / g_1 - 2(g_5 I_A - g_7 I_B) / g_1 \\ H_A/N_y &= H_A = V_{A g_3} / g_1 + 2(g_6 I_A - \alpha_0 I_B) / \kappa_0 g_5 \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

ただし

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_0^2 + \alpha_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2 \sin^2 \alpha_0 \\ &\quad + 3 \alpha_0 (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) / \kappa_0^2, \\ g_2 &= \alpha_0 - \alpha_0 \cos \alpha_0 - \alpha_0^2 \sin \alpha_0 + \sin \alpha_0 (1 - \cos \alpha_0) \\ &\quad - 3 (\alpha_0 \cos \alpha_0 - \alpha_0 + \alpha_0^2 \sin \alpha_0) \\ &\quad + \sin \alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) / \kappa_0^2, \\ g_3 &= 2 \sin \alpha_0 - \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 - 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ &\quad - 3 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 / \kappa_0^2, \\ g_4 &= \alpha_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0, \\ g_5 &= \alpha_0 \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 + (\alpha_0 - \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) / 2 \\ &\quad + 3 (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) / 2 \kappa_0^2 \\ g_6 &= \alpha_0 - \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

式 (45) の演算は、まず  $I_A = I_B = 0$  すなわち弾性時の  $M_A$  および  $H_A$  を第1次近似値として採用し、式 (16) より  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  を求めたうえで数値積分を用い、これをくり返す収斂計算を行なうこととなる。

また、中央点Cのたわみ  $\delta_C$  は支点固定の条件  $\delta_{A''} = \theta_A = 0$  を用いて式 (15 b) より次式となる。

$$\begin{aligned} \delta_C'' &= \left[ \int_0^{\alpha_0} \{(\Phi_0(\sin \alpha_0 - \sin \varphi) + R_d \bar{\epsilon}_0 \sin \varphi) d\varphi \right. \\ &\quad + \int_{P_1} \{(\Phi_1 - \Phi_0)(\sin \alpha_0 - \sin \varphi) \\ &\quad + R_d(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_0) \sin \varphi\} d\varphi \\ &\quad + \int_{P_2} \{(\Phi_2 - \Phi_0)(\sin \alpha_0 - \sin \varphi) \\ &\quad + R_d(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}_0) \sin \varphi\} d\varphi \left. \right] \frac{M_y r^2}{EI} \dots (46) \end{aligned}$$

ただし  $P_1$  および  $P_2$  は式 (44) に準ずる。

b) C点に塑性ヒンジが生じかつA端に弾塑性領域が生ずる場合(図-18(c) 参照)

6 (2)a) に引き続き荷重が増加して中央点Cに塑性ヒンジが形成される場合は、図-14(b)においてC点がアーチ中央にある場合に該当し、式 (27) と式 (33)

の第1式とより  $M_A$  および  $H_A$  がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_A/M_y &= m_A = 1.5(1 - H_A^2) \\ &\quad - \kappa_0 \{V_A \sin \alpha_0 - H_A(1 - \cos \alpha_0)\} \\ H_A/N_y &= H_A = -(g_6 m_A + g_7 V_A + I_B) / \kappa_0 g_5 \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

$$\text{ただし } g_7 = \kappa_0 (\alpha_0 \sin \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0 / 2 + \cos \alpha_0 - 1) \\ + 3 \sin^2 \alpha_0 / 2 \kappa_0$$

上式中の  $I_B$  は式 (44) の式表現と一致し、ただ  $P_1$  および  $P_2$  にA端近傍の第1弾塑性領域  $\alpha_7 \sim \alpha_8$  および第2弾塑性領域  $\alpha_8 \sim \alpha_0$  が加えられることとなる。

式 (47) の演算もまた  $I_B$  を含むゆえ、弾性値を第1次近似値とし式 (16) を用うるくり返し試算となる。

さらにC点のたわみ  $\delta_C''$  は式 (15 b) より求められ、式 (46) の表現と合致するが、 $\Phi$  および  $\bar{\epsilon}$  中の  $m$  および  $n$  が式 (47) および式 (10) より決定されるゆえ、内容的に異なることとなる。

ここで式 (46) の  $\Phi_2, \bar{\epsilon}_2$  および式 (47) の  $I_B$  中の  $\Phi_2, \bar{\epsilon}_2$  は式 (5) に示す式型で表わされるが、これらは式 (47) の第1式ひいては式 (27) が成立するとき、 $\varphi = 0$  でいずれも無限大となり、式 (46) および式 (47) の第2式に対する Simpson 公式による数値積分が不可能となるゆえ、特異積分を用いて以下のとく演算可能ならしめる。

すなわち、 $\varphi = 0 + e$  ( $e$ : 微小量) とおけば、 $\sin \varphi = \sin e \approx e - e^3 / 6$ ,  $\cos \varphi = \cos e \approx 1 - e^2 / 2$  となり、これらを式 (10) の  $M, N$  に代入のうえ式 (27) を考慮して式 (5) の  $\Phi_2, \bar{\epsilon}_2$  をべき級数に展開すれば、それぞれ次式のごとき内容となる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}} (e^{-1/2} + \bar{b}_1 e^{1/2} + \bar{b}_2 e^{3/2} + \bar{b}_3 e^{5/2} + \dots) \\ \bar{\epsilon}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}} (\bar{c}_0 e^{-1/2} + \bar{c}_1 e^{1/2} + \bar{c}_2 e^{3/2} + \bar{c}_3 e^{5/2} + \dots) \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= 2 V_A (\kappa_0 - 3 H_A), \\ \bar{a}_2 &= 3(H_A^2 - V_A^2) - \kappa_0 H_A, \\ \bar{a}_3 &= 4 H_A V_A - \kappa_0 V_A / 3, \\ \bar{a}_4 &= -3 H_A^2 / 4 + V_A, \\ \bar{b}_1 &= -\bar{a}_2 / 2 \bar{a}_1, \bar{b}_2 = -\bar{a}_3 / 2 \bar{a}_1 + 3(\bar{a}_2 / \bar{a}_1)^2 / 8, \\ \bar{b}_3 &= -\bar{a}_4 / 2 \bar{a}_1 + 3 \bar{a}_1 \bar{a}_3 / 4 \bar{a}_1^2 - 5(\bar{a}_2 / \bar{a}_1)^3 / 16, \\ \bar{c}_0 &= H_A, \bar{c}_1 = V_A + \bar{b}_1 H_A, \\ \bar{c}_2 &= \bar{b}_2 H_A + \bar{b}_1 V_A - H_A / 2, \\ \bar{c}_3 &= \bar{b}_3 H_A + \bar{b}_2 V_A - \bar{b}_1 H_A / 2 - V_A / 2 \end{aligned}$$

よって式 (46) の  $\Phi_2, \bar{\epsilon}_2$  および式 (47) の  $I_B$  中の  $\Phi_2, \bar{\epsilon}_2$  を含む該当項を抽出し、それぞれ  $I_1$  および  $I_2$  を表現して各積分値を算出すればつぎのごとく求められる。

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\alpha_1} \{ \Phi_2(\sin \alpha_0 - \sin \varphi) + R_d \bar{c}_2 \sin \varphi \} d\varphi \\
&= \frac{2}{\sqrt{\bar{a}_1}} \left[ \sin \alpha_0 - \alpha_1^{1/2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{3} (\bar{b}_1 \sin \alpha_0 - 1 + R_d \bar{c}_1) \alpha_1^{3/2} \\
&\quad + \frac{1}{5} (\bar{b}_2 \sin \alpha_0 - \bar{b}_1 + R_d \bar{c}_1) \alpha_1^{5/2} \\
&\quad + \frac{1}{7} \left. \left\{ \bar{b}_3 \sin \alpha_0 - \bar{b}_2 + \frac{1}{6} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + R_d \left( \bar{c}_2 - \frac{\bar{c}_0}{6} \right) \right\} \alpha_1^{7/2} + \dots \right] \\
I_2 &= \int_0^{\alpha_1} \{ \Phi_2(1 - \cos \varphi) + R_d \bar{c}_2 \cos \varphi \} d\varphi \\
&= \frac{2}{\sqrt{\bar{a}_1}} \left[ R_d \bar{c}_0 \alpha_1^{1/2} + \frac{\bar{c}_1}{3} R_d \alpha_1^{3/2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{5} \left\{ 1 + R_d \left( \bar{c}_2 - \frac{\bar{c}_0}{2} \right) \right\} \alpha_1^{5/2} \\
&\quad + \frac{1}{7} \left. \left\{ \bar{b}_1 + R_d \left( \bar{c}_3 - \frac{\bar{c}_1}{2} \right) \right\} \alpha_1^{7/2} + \dots \right]
\end{aligned} \tag{49}$$

e) C点に引き続きA端にも塑性ヒンジが生じ、かつ中間点Dに弾塑性領域が発生する場合(図-18(d)参照)

この場合は図-13(c)と図-14(d)とを併用すればよく、式(27)および式(34)より  $M_A$  を消去して水平反力  $H_A$  が次式のごとく求められる。

$$H_A/N_y = H_A = (K_1 - \sqrt{K_1^2 - K_2 \sin^2 \alpha_0}) / \sin^2 \alpha_0$$

.....(50)

ただし  $K_1 = V_A \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \kappa_0 (1 - \cos \alpha_0) / 3$ ,

$$K_2 = 2\kappa_0 V_A \sin \alpha_0 / 3 - V_A \sin^2 \alpha_0$$

よって式(50)の  $H_A$  を用いて式(47)の  $M_A$  を算出すれば任意断面の  $M, N$  が式(10)より求められ、ついで  $\delta_{C''}$  が式(15b)と式(29)より D 点近傍の弾塑性領域をも考慮して次式にて求められることとなる。

$$\begin{aligned} \delta C^y = & \left[ \int_0^{\alpha_0} \{ \Phi_0 f(\varphi) + R_d \tilde{\varepsilon}_0 g(\varphi) \} d\varphi \right. \\ & + \int_{P_1} \{ (\Phi_1 - \Phi_0) f(\varphi) + R_d (\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}_0) g(\varphi) \} d\varphi \\ & + \int_{P_2} \{ (\Phi_2 - \Phi_0) f(\varphi) + R_d (\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_0) g(\varphi) \} d\varphi \Big] \\ & \times \frac{M_y r^2}{EI} \dots \dots \dots \quad (51) \end{aligned}$$

上式中の  $f(\varphi), g(\varphi)$  は式 (17) と合致し、また  $P_1$  および  $P_2$  は 図-18 (d) を参照してそれぞれ  $\alpha_3 \sim \alpha_4$ ,  $\alpha_5 \sim \alpha_6$ ,  $\alpha_7 \sim \alpha_8$  および  $0 \sim \alpha_1$ ,  $\alpha_4 \sim \alpha_5$ ,  $\alpha_8 \sim \alpha_9$  の範囲をとり、ここで発生した  $\alpha_2 \sim \alpha_6$  も式 (16) を用いて求められる。

しかしに式(51)の算出に際して再び第3項中の  $\phi_2$ ,  $\bar{\epsilon}_2$  が式(50)ひいては式(34)の成立によって  $\varphi = \alpha_0$  で無限大となるが、式(48)および式(49)と同様に該

当項を特異積分することによって  $\delta C^y$  の算出を可能ならしめうる。

d) C点、A端に引き続きD点にも塑性ヒンジが生ずる場合(図-18(e)参照)

この場合アーチはリミットアナリシスにいう5点系となつて崩壊するが、崩壊荷重  $P_P$  は式(30)に式(10)および  $\varphi_D = \pi/2 - \psi$  (ただし  $\psi = \tan^{-1}(H_A/V_A)$ ) を代入してつぎのごとく算定される。

$$P_P/N_y = 2 \cos \psi (K_3 + \sqrt{K_3^2 + 3 K_4})/3 \dots \dots (52)$$

ただし  $K_3 = \kappa_0 \{ \sin(\alpha_0 - \psi) - 1 \}$ ,

$$K_4 = 2m_A + 3$$

式(52)の演算は右辺に  $P_P$  の関数たる  $m_A$  および  $H_A$  を含むゆえ、当然式(47)の  $m_A$  および式(50)の  $H_A$  を併用するくり返し試算となり、これらの収斂値を用いて  $M, N$  が式(10)より算出される。

なお、式(52)の崩壊荷重値  $P_P$  は式(8b)の完全塑性条件に基づいて誘導されているゆえ、当然リミットアナリシスの下界定理<sup>4),5)</sup> よりえられる値と合致する。

以上の誘導諸式を用い、図-15(b)に示すフローチャートにしたがって数値計算を行なえば、荷重-たわみ曲線が図-17の実線に示すごとく、また  $M$ ,  $N$ -図が図-18のごとくえられる。

本例と同様の手法により、単一中央集中荷重をうける2ヒンジアーチ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.05$ )の中央点のたわみ $\delta_{C^y}$ を初期降伏時より最終崩壊時まで追跡し、結果のみ示せば図-17の点線のごとくなり、変形性能および崩壊荷重のいずれにおいても固定アーチより劣るという常識的推論が数値的に確認される。

### (3) 満載等分布荷重をうける 2 ヒンジ アーチ

図-19のごとく2ヒンジアーチ( $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.05$ )に満載等分布荷重  $w$  が作用する場合、6.(2)と同様の手法により式(15), (16), (21)~(24), (27), (30)を用いて初期降伏時より最終崩壊時に至る断面力  $M$ ,  $N$  および中央点Cのたわみ  $\delta_{C^y}$  を求めれば、 $M$ ,  $N$ -図は図-20のごとく、また  $\delta_{C^y}$  は図-19の点線に示すご

—19

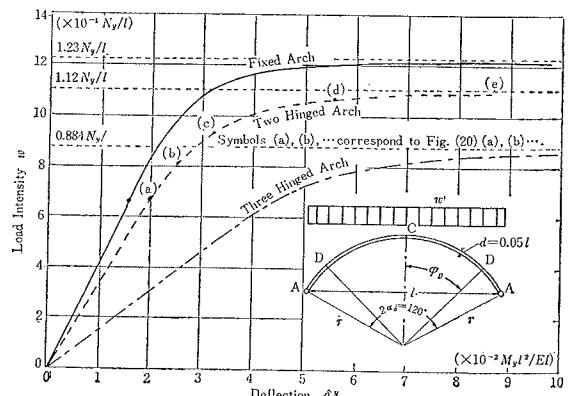
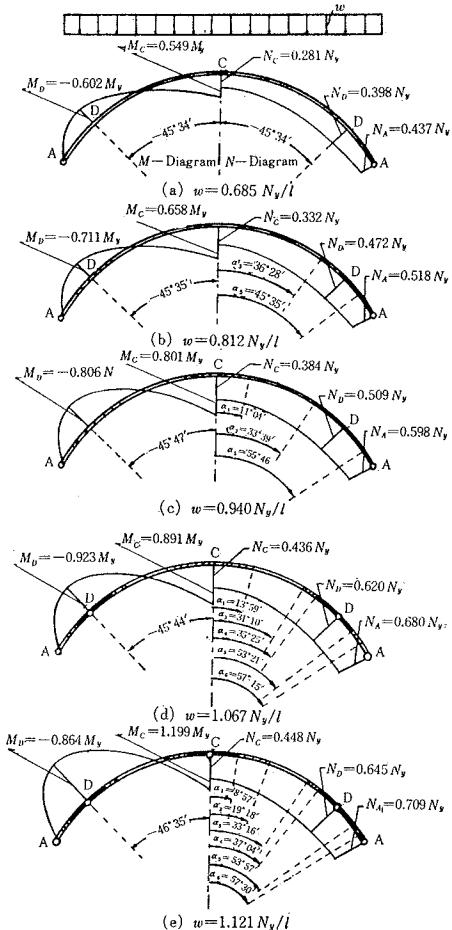


図-20  $M, N$ -Diagram.

とくえられる。

#### (4) 満載等分布荷重をうける固定アーチ

6. (2), (3)と同じ形状をもつ固定アーチについて解析した結果、弾塑性領域の発生および塑性ヒンジの形成が 6. (2)では中央点 C→A 端→中間点 D の順序で行なわれたのと異なり、本例では A 端→中間点 D→中央点 C の順序となり、また中央点 C のたわみ  $\delta_C$  と荷重  $w$  との関係を 6. (3)と比較しうるごとく図-19に実線で示した。

## 7. 結 語

本論文は曲げモーメントと軸力が同時に作用するアーチ構造物の弾塑性解析に関する研究の一部として、円弧アーチの弾塑性挙動を理論的に考察したもので、その研究成果を大約列記すれば以下のごとくである。すなわち  
 (1) 誘導された式(15)は直線材<sup>11)</sup>はもちろん円弧およびパラボラ材など曲線材に適用可能な  $\phi$ -法の一般公式を表わしており、これを用いることにより弾塑性領域を考慮した任意点のたわみおよびたわみ角の算定が可能となった。

(2) 断面積を一定とした場合の断面形状による比較を図-9, 10に図示したが、静定アーチに单一中央集中荷重または満載等分布荷重が載荷する場合には、対称箱型または  $A_F = A_W$  なる H 型 ( $\rho=1$ ) のごとき断面が変形性能および耐力の両面より総合して有効であることが判明した。

(3) 軸力のたわみにおよぼす影響は、弾塑性領域の発生が進行するとともに、またライズが扁平かつ断面が厚くなるとともに増加し、その傾向は等分布荷重の場合とくに顕著であることが明白となった。

(4) 軸線の伸縮による影響は、ライズが大きくかつ slender なアーチに対しては無視できるが、かかる場合以外は考慮しなければならないことが認められた。

(5) 不静定力の算出に際しては、弾塑性項の導入が起因して数値積分による収斂計算となるが、弾塑性領域の発生箇所が少なくかつ領域幅が狭い場合で 2~3 回、発生箇所が多く領域幅も広い場合でも 5~6 回程度で収斂値を得た。

(6) 塑性ヒンジの形成により同点のたわみ角が未知数として加わることになるが、たわみの連続条件を利用して未知数と同数の条件式がえられ、また不連続点における特異積分を用いて塑性ヒンジ形成以後の段階における変形量の算出を可能ならしめた。

(7) さらに式(15)よりアーチに対する弾塑性たわみ角式<sup>11)</sup>も誘導でき、弾塑性解析における変形法に準じて連続アーチ<sup>12)</sup>および曲線部材をもつラーメン<sup>13)</sup>の弾塑性解析も可能となるなど理論の多様性も本研究の成果としてあげることができる。

さて、本法のごとく弾塑性領域を考慮することによってはじめて崩壊荷重直前時におけるたわみ変形の急激な増加過程が明確となり、場合によっては許容変形量を越えて使用に耐え得なくなることも予想され、従来のたわみを考慮せず崩壊荷重の算定のみに論拠をおくアーチの塑性設計理論に対して、本研究は有力な資料を提供しうるものと確信する。

最後に、本研究には文部省科学研究所費の補助を受け、本学電子計算機 OKITAC-5090 H を使用したこと付記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- Knudsen, K.E., Yang, C.H. et al.: Plastic Strength and Deflections of Continuous Beams, Progress Report No. 9, The Welding Journal, Vol. 32, May, 1953.
- Gerstle, K.H.: Deflection of Structures in the Inelastic Range, Jour. of the Eng. Mech. Div., Proc. A.S.C.E., Vol. 83, July, 1957.
- Gerstle, K.H.: Elastic-Plastic Deformation of Steel Structures, Jour. of the St. Div., Proc. A.S.C.E., Vol. 89, Feb., 1963.
- Nagao, H.: Large Elasto-Plastic Deflection of a Circular-Arc Cantilever, Proc. of 14th Japan Na-

- tional Congress for Applied Mechanics, 1964.
- 4) Onat, E.T. & Prager, W : Limit Analysis of Arches, Jour. of Mech. and Phys. of Solids, 1963.
- 5) 横尾・山肩：建築構造物のリミットアーリシス，日本建築学会，第4章アーチ，技報堂，1963。
- 6) 福本・吉田：変動くり返し荷重によるアーチの崩壊，土木学会論文集，131号，昭和41年7月。
- 7) 奥村・前田・大久保：アーチの極限耐荷力に関する研究，第15回土木学会年次学術講演会講演概要，第II部，昭和35年5月。
- 8) Hauck, G.F. & Lee, S.L : Stability of Elasto-Plastic Wide-Flange Columns, Jour. of St. Div. Proc. A.S.C.E., Vol. 89, Dec. 1963.
- 9) 牧野 稔：弾塑性域における軸方向力を受けるH型断面部材の研究，日本建築学会論文報告集，第97号，昭和39年4月。
- 10) たとえば倉西正嗣：応用弾性学，共立全書71。
- 11) 山崎・太田・石川：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析，土木学会論文集，134号，昭和41年10月。
- 12) 山崎・石川：連続円弧アーチの弾塑性解析，九大工学集報，第40卷，第5号，昭和42年9月。
- 13) 山崎・石川：曲線部材をもつラーメンの弾塑性解析，第17回応用力学連合講演会論文抄録集，第I部，昭和42年10月。

(1987. 11. 20・受付)