

変断面部材をもつ直線骨組構造の解法*

ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES COMPOSED OF MEMBERS WITH VARYING CROSS SECTION

山崎 徳也**・樗木 武***

By Tokuya Yamasaki and Takeshi Chisyaki

1. 緒 言

鉄筋コンクリート構造におけるハンチや鋼桁におけるフランジ厚の変化、柱とはりなどが結合する節点近傍の剛域など断面二次モーメントが部材全長にわたって一定でない構造物が実際に多見せられることは周知のとおりである。

断面二次モーメントの変化および剛域を考慮した骨組構造の解法にはこれまで多くの研究^{1)~4)}があるが、それらの大部分は部材断面の変化と剛域の問題が別々の観点にたって処理されており、断面変化も特定の関数で表わされるものに限定されている。また、研究に用いられた関数は M. Hetényi²⁾を除いてはいずれも代数関数であり、したがって、平板との組合せが困難である。Hetényi は、本研究と同様にフーリエ級数を使用しているが、変断面区間がただ 1カ所の単純ばりを対象として変断面区間以外の点に集中荷重が作用する場合、および少なくとも変断面区間全域をおおう等分布荷重が作用する場合の二特例を述べているにすぎない。

以上に対し、本論文は先に著者らが文献5),6)で報告したフーリエ級数による骨組構造の解法を拡張応用し、任意垂直荷重が作用する場合について、剛域をも考慮した階段状変断面部材をもつ直線骨組構造の厳密解法ならびに任意形状変断面部材をもつ直線骨組構造の近似解法を提案し、かかる骨組構造の解法および変断面ばりと板とで構成される構造物の解法に資せんとするものである。

2. 基本理論

(1) 階段状変断面ばりの変位

図-1(a)に示すごとく階段状変断面ばりにおいて、はり中心軸に x 軸、これと直交して y 軸を設定する。また、はりには任意垂直荷重 $p(x)$ および端モーメント M_A, M_B が作用するものとし、以下これらの荷重を原荷重と称する。階段状に変化するはりの断面二次モーメントは全体で s 区間に分割され、各区間 1, 2, ..., i , ...,

s の断面二次モーメントをそれぞれ $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots, I_s$, これらと標準断面二次モーメント I_0 との比(以下断面二次モーメント比と称する)を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_s$ とする。すなわち、

$$\alpha_i = I_i / I_0 \quad (\text{ここに } i=1, 2, \dots, s) \dots\dots\dots(1)$$

はり上の i 区間の任意点 x におけるたわみ y と曲げモーメント M_x との関係は次式のごとく表わされる。

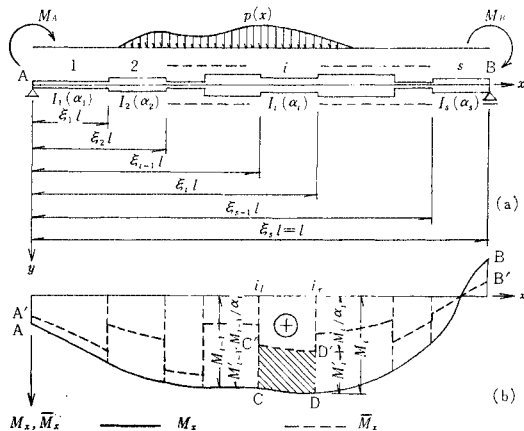
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI_i} = -\frac{\bar{M}_x}{EI_0} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $\bar{M}_x = M_x / \alpha_i$

すなわち、 \bar{M}_x (以下このモーメントを置換モーメントと称する)を改めて i 区間の任意点 x における曲げモーメントと考えれば、式(2)は断面二次モーメント I_0 なるはりに、曲げモーメント \bar{M}_x が作用する場合の i 区間のたわみ y の解を与えており、なお詳細に観察すればつぎのごとき取扱い手法が考案される。

図-1(b)に示すごとく、単純ばりに原荷重 $p(x)$, M_A および M_B が作用した場合の曲げモーメント図が曲線 ACDB で与えられるものとする。しかるとき、置換モーメント \bar{M}_x はその定義より M_x / α_i で与えられるから、曲折線 A'C'D'B' となる。換言すれば、 i 区間の \bar{M}_x -曲線 C'D' ははりの実際の曲げモーメント曲線 CD から図-1(b)の斜線部 CC'D'D を差し引いたものである。したがって、斜線部 CC'D'D を負の曲げモーメント図として与えるごとく適当な荷重状態(以下この荷

図-1



* 第 22 回土木学会年次学術講演会にて一部発表
 ** 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科
 *** 正会員 長崎大学助教授 工学部構造工学科

重を補正荷重と称する)を求めれば、図-1 (a) の階段状変断面ばりを解くことは原荷重と補正荷重が同時に作用する断面二次モーメント I_0 の等断面ばり (以下このばりを置換ばりと称する) を解く問題に帰着せられることとなる。

a) 補正荷重の決定

原荷重のうち、任意垂直荷重 $p(x)$ を正弦フーリエ級数に展開すれば次式のごとく表わされる。

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \dots\dots\dots(3)$$

ここに $p_m = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx$

したがって、 $p(x)$ により引き起こされる任意点 x の曲げモーメントを M_{x_0} とすれば、 M_{x_0} はつぎのごとく算出される。

$$M_{x_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \dots\dots\dots(4)$$

また、両端の端モーメント M_A, M_B により引き起こされる同じ点 x の曲げモーメント M_{x_1} は次式で与えられる。

$$M_{x_1} = M_A - (M_A + M_B) \frac{x}{l} \dots\dots\dots(5)$$

式(4)および式(5)を加えれば、はりに原荷重 $p(x)$, M_A および M_B が同時に作用する場合の任意点 x における曲げモーメント M_x が求まり、次式のごとく得られる。

$$M_x = M_A - (M_A + M_B) \frac{x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \dots\dots\dots(6)$$

置換モーメント \bar{M}_x はその定義より次式となる。

$$\bar{M}_x = \frac{1}{\alpha_i} \left\{ M_A - (M_A + M_B) \frac{x}{l} \right\} + \frac{1}{\alpha_i} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \dots\dots\dots(7)$$

さて、 i 区間においてのみ斜線部 CC'D'D を負のモーメント図として与えるごとき補正荷重を考察すれば、図-2 (a) に示すごとき荷重状態が得られる。すなわち、 M_{i-1}' および M_i' は支点 i_l および i_r に働く端モーメントであり、図-1 (b) の CC' および DD' で与えられ

る。また、 $p_i'(x)$ は 図-1 (b) の斜線部 CC'D'D から上記 M_{i-1}', M_i' の影響を差し引いた部分 (図-2 (b) の斜線部) の曲げモーメントに関与するものである。さらに、 R_{i-1}' および R_i' は i 区間を一つの単純ばりとみなした場合の支点 i_l および i_r に作用する支点反力であり、 $p_i'(x)$, M_{i-1}' および M_i' が i 区間以外の諸断面力および諸変位におよぼす影響を打ち消すものである。

① M_{i-1}' および M_i' について

図-1 (b) において、 i_l 点および i_r 点のモーメントをそれぞれ M_{i-1} および M_i とすれば、これらと M_{i-1}', M_i' との間には、図より明らかなごとく、つぎの関係が成立する。

$$M_{i-1} - M_{i-1}' = M_{i-1}/\alpha_i$$

$$M_i - M_i' = M_i/\alpha_i$$

上式より、 M_{i-1}', M_i' を求めれば次式を得る。

$$M_{i-1}' = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) M_{i-1}, \quad M_i' = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) M_i \dots\dots(8)$$

ここで、 M_{i-1} および M_i は、式(6)に i_l 点および i_r 点の座標値 $x = \xi_{i-1}l, \xi_i l$ を代入することによりただちに求まり、結果を式(8)に代入すれば補正荷重モーメント M_{i-1}' および M_i' がつぎのごとく得られる。

$$M_{i-1}' = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \left\{ M_A(1 - \xi_{i-1}) - M_B \xi_{i-1} \right\} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 p_m \sin m\pi \xi_{i-1}$$

$$M_i' = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \left\{ M_A(1 - \xi_i) - M_B \xi_i \right\} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 p_m \sin m\pi \xi_i \dots\dots\dots(9)$$

② $p_i'(x)$ について

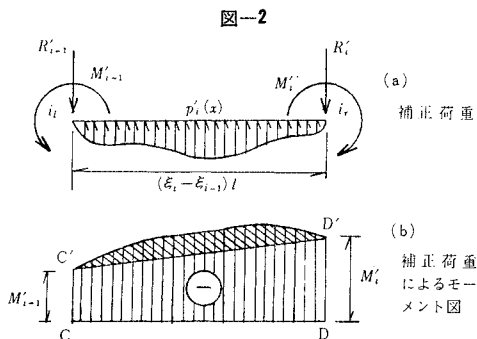
一般にはり上の任意点 x における垂直荷重 $p(x)$ と曲げモーメント M_x は一次の関係にあるから、図-1 (b) の曲線 C'D' を与える M_x/α_i は $p(x)/\alpha_i$ と同じ一次の関係にある。よって、図-1 (b) の斜線部のモーメントは曲線 CD のモーメントを与える荷重 $p(x)$ と曲線 C'D' のモーメントを与える荷重 $p(x)/\alpha_i$ との差 $\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) p(x)$ とまた同じ一次の関係にあるといえる。他方、 M_{i-1}' および M_i' を除去すれば、図-2 (a) に示すはりは両端 i_l, i_r においてモーメントが 0 となる。以上の所論から、図-2 (b) の斜線部は i 区間を単純ばりとみなし、荷重 $\left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) p(x)$ が作用する場合のモーメント図であり、 $p_i'(x)$ は次式で与えられることが推論できる。

$$p_i'(x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) p(x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i} \right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \dots\dots\dots(10)$$

ここに $\xi_{i-1}l \leq x \leq \xi_i l$

③ R_{i-1}' および R_i' について

R_{i-1}' および R_i' は式(9),(10)で与えられるモーメン



トおよび荷重による支点反力である。

i_r 点のモーメントのつりあい条件式は

$$R_{i-1}'(\xi_i - \xi_{i-1})l + M_{i-1}' - M_i' - \int_{\xi_{i-1}l}^{\xi_i l} p_i'(x)(\xi_i l - x) dx = 0$$

上式に、式(9),(10)を代入して演算のうえ、 R_{i-1}' を求めれば次式のごとく得られる。

$$R_{i-1}' = -\frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) (M_A + M_B) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) p_m \cos m\pi\xi_{i-1} \dots\dots\dots(11)$$

同様に、 i_l 点におけるモーメントのつりあい条件より R_i' を求めれば次式を得る。

$$R_i' = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) (M_A + M_B) - \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) p_m \cos m\pi\xi_i \dots(12)$$

以上をまとめて再記すれば、結局、 i 区間の補正荷重がつぎのごとく決定されることとなる。

$$\left. \begin{aligned} & \text{区間 } (\xi_{i-1}l, \xi_i l) \text{ について} \\ & p_i'(x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \\ & i_l \text{ 点 } (x = \xi_{i-1}l) \text{ について} \\ & R_{i-1}' = -\frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) (M_A + M_B) \\ & \quad + \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) p_m \cos m\pi\xi_{i-1} \\ & M_{i-1}' = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \{M_A(1 - \xi_{i-1}) - M_B\xi_{i-1}\} \\ & \quad + \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 p_m \sin m\pi\xi_{i-1} \\ & i_r \text{ 点 } (x = \xi_i l) \text{ について} \\ & R_i' = \frac{1}{l} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) (M_A + M_B) \\ & \quad - \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) p_m \cos m\pi\xi_i \\ & M_i' = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \{M_A(1 - \xi_i) - M_B\xi_i\} \\ & \quad + \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 p_m \sin m\pi\xi_i \\ & \text{ここに, } i=1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

式(13)の補正荷重と原荷重 $p(x)$, M_A および M_B が同時に作用する場合、はり上の i 区間における任意点 x における曲げモーメント \bar{M}_x は

$$\begin{aligned} \bar{M}_x &= M_x - R_{i-1}'(x - \xi_{i-1}l) - M_{i-1}' \\ & \quad + \int_{\xi_{i-1}l}^x p_i'(x')(x - x') dx' \\ &= \frac{1}{\alpha_i} \left\{ M_A - (M_A + M_B) \frac{x}{l} \right\} \\ & \quad + \frac{1}{\alpha_i} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 p_m \sin \frac{m\pi}{l} x \end{aligned}$$

となり、式(7)と合致するゆえ、式(13)に求めた補正

荷重が正しいことを知る。

b) はりの変位

階段状変断面ばりのたわみおよびたわみ角は原荷重とすべての区間に対する式(13)の補正荷重と同時に作用する置換ばりのたわみおよびたわみ角で与えられる(図-3参照)。

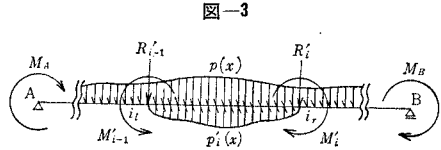


図-3

垂直荷重 $p(x)$ と同様に、原荷重 M_A, M_B および各補正荷重を正弦フーリエ級数で展開しつぎのごとく表す。

$$\left. \begin{aligned} \{M_A\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{An} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{M_B\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} M_{Bn} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{p_i'(x)\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{R_{i-1}'\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{(i-1)n} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{R_i'\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{M_{i-1}'\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{(i-1)n} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \{M_i'\}_{SF} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{in} \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

(ここに、 $i=1, 2, \dots, s$ であり、また $\{ \}_{SF}$ は各力およびモーメントの正弦フーリエ級数展開式であることを意味し、いずれも $[FL^{-1}]$ の次元をもつ) 展開係数 M_{An}, M_{Bn} は文献5)よりつぎのごとく得られる。

$$M_{An} = -\frac{2n\pi}{l^2} M_A, \quad M_{Bn} = -(-1)^n \frac{2n\pi}{l^2} M_B \dots\dots\dots(15)$$

また、 p_{in} はつぎの内容となる。

$$p_{in} = \frac{2}{l} \int_{\xi_{i-1}l}^{\xi_i l} p_i'(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m I(m, n, i) \dots\dots\dots(16)$$

ただし

$$I(m, n, i) = \frac{2}{l} \int_{\xi_{i-1}l}^{\xi_i l} \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx \text{ は}$$

$m \neq n$ の場合

$$I(m, n, i) = \frac{2}{(n^2 - m^2)\pi} \{ m(\cos m\pi\xi_i \sin n\pi\xi_i - \cos m\pi\xi_{i-1} \sin n\pi\xi_{i-1}) - n(\sin m\pi\xi_i \cos n\pi\xi_i - \sin m\pi\xi_{i-1} \cos n\pi\xi_{i-1}) \}$$

$m = n$ の場合

$$I(m, n, i) = \xi_i - \xi_{i-1} - \frac{1}{2n\pi} \times (\sin 2n\pi\xi_i - \sin 2n\pi\xi_{i-1})$$

展開係数 $A_{(i-1)n}$, A_{in} , $B_{(i-1)n}$ および B_{in} と R_{i-1}' , R_i' , M_{i-1}' および M_i' との関係はつぎのとおりである (文献 5) 参照)。

$$A_{(i-1)n} = \frac{2}{l} R_{i-1}' \sin n\pi\xi_{i-1},$$

$$A_{in} = \frac{2}{l} R_i' \sin n\pi\xi_i,$$

$$B_{(i-1)n} = \frac{2n\pi}{l^2} M_{i-1}' \cos n\pi\xi_{i-1},$$

$$B_{in} = \frac{2n\pi}{l^2} M_i' \cos n\pi\xi_i$$

上式に式 (13) を代入すれば, $A_{(i-1)n}$, A_{in} , $B_{(i-1)n}$ および B_{in} が次式のごとく算定される。

$$A_{(i-1)n} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \frac{2}{l} \sin n\pi\xi_{i-1} \times \left\{ -\frac{1}{l} (M_A + M_B) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) p_m \cos m\pi\xi_{i-1} \right\}$$

$$A_{in} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \frac{2}{l} \sin n\pi\xi_i \left\{ \frac{1}{l} (M_A + M_B) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right) p_m \cos m\pi\xi_i \right\}$$

$$B_{(i-1)n} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \frac{2n\pi}{l^2} \cos n\pi\xi_{i-1} \times \left\{ M_A(1 - \xi_{i-1}) - M_B\xi_{i-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 p_m \sin m\pi\xi_{i-1} \right\}$$

$$B_{in} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \frac{2n\pi}{l^2} \cos n\pi\xi_i \left\{ M_A(1 - \xi_i) - M_B\xi_i + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2 p_m \sin m\pi\xi_i \right\}$$

.....(17)

置換ばりに作用する全荷重 $q(x)$ は, 式 (14) と式 (3) との総和で与えられるが, 式中の展開係数として式 (15), (16), (17) を代入し演算のうえ整理すれば, 結局次式のごとく得られることとなる。

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{.....(18)}$$

ここに,

$$q_n = p_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) + \frac{1}{l^2} (M_A H_{An} + M_B H_{Bn}) \quad \text{.....(19)}$$

$$F(m, n, i) = -I(m, n, i) + \frac{2}{m\pi} (\sin n\pi\xi_{i-1} \cos m\pi\xi_{i-1} - \sin n\pi\xi_i \times \cos m\pi\xi_i) - \frac{2n}{m^2\pi} (\cos n\pi\xi_{i-1} \sin m\pi\xi_{i-1} - \cos n\pi\xi_i \sin m\pi\xi_i)$$

$$H_{An} = 2n\pi - 2 \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) [\sin n\pi\xi_{i-1} - \sin n\pi\xi_i + n\pi(1 - \xi_{i-1}) \cos n\pi\xi_{i-1} - (1 - \xi_i) \cos n\pi\xi_i]$$

$$H_{Bn} = 2(-1)^n n\pi - 2 \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) [\sin n\pi\xi_{i-1} - \sin n\pi\xi_i - n\pi(\xi_{i-1} \cos n\pi\xi_{i-1} - \xi_i \cos n\pi\xi_i)]$$

両端単純支持の置換ばりに式 (18) の荷重 $q(x)$ が作用する場合のはりのたわみ曲線 y は文献 5) に示すごとく次式で与えられる。

$$y = \frac{l^4}{EI_0\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{.....(20)}$$

すなわち, 式 (20) は 図-1 (a) に示す階段状変断面ばりのたわみ曲線式である。

また, 式 (20) の第一次微係数を求めれば, 階段状変断面ばりの任意点 x における接線角 τ が得られ次式となる。

$$\tau = dy/dx = \frac{l^3}{EI_0\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n^3} \cos \frac{n\pi}{l} x \quad \text{.....(21)}$$

なお, 式 (20), (21) に式 (19) を代入すれば, 形式的に二重級数の項が含まれることとなるが, これらは repeated series $\sum_n (\sum_m)$ で収束値を得る。

(2) 単純ばり

骨組構造として最も基本的な単純ばりについて, たわみおよび変位の影響線を求め, 式 (20), (21) の正当性を以下に確かめてみる。

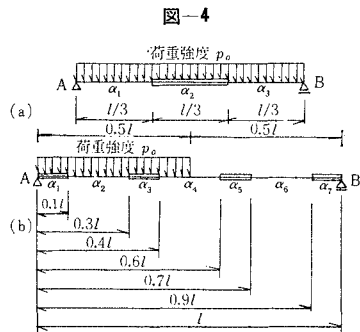


図-4

a) たわみ

図-4 (a) に示すごとく, 3変断面区間よりなる階段状変断面ばりにおいて, 区間 1, 3 の断面二次モーメント比 α_1 , α_3 がいずれも 1 で, 区間 2 の断面二次モーメント比 α_2 が種々の値をとるものとする。しかるとき, 式 (20) はつぎの内容となる。

$$y = \frac{l^4}{EI_0\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ p_n + \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) \times \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, 2) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{.....(22)}$$

ここに,

$$F(m, n, 2) = -I(m, n, 2) + \frac{2}{m\pi} \times (\sin n\pi\xi_1 \cos m\pi\xi_1 - \sin n\pi\xi_2 \cos m\pi\xi_2) - \frac{2n}{m^2\pi} (\cos n\pi\xi_1 \sin m\pi\xi_1 - \cos n\pi\xi_2 \sin m\pi\xi_2)$$

算例として、図-4 (a)のごとく等分布荷重を満載しかつ変断面区間2がスパン中央から左右に $l/6$ の距離にわたって存在するものとすれば、 p_n, ξ_1, ξ_2 はつぎのごとく与えられる。

$$p_n = \frac{4p_0}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots(23) \\ \xi_1 = 1/3, \xi_2 = 2/3 \end{array} \right\}$$

式(23)を式(22)に代入し、かつ区間2の断面二次モーメント比 α_2 が 1.0 (Case 1), 1.5 (Case 2), ∞ (Case 3) の諸値をとる場合について、たわみ y を算出すれば図-5の結果を得る。なお、Case 2 は文献2) に例示されており、その結果と合致することは当然である。

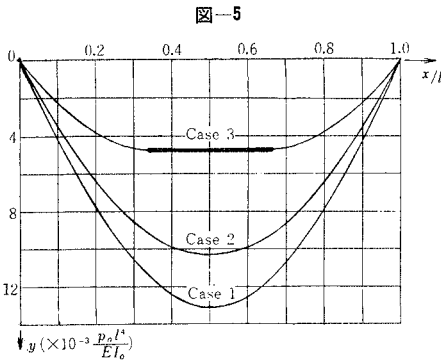


図-5

また、図-4 (b)のごとく等分布荷重半載の7変断面区間よりなるはりのたわみ y は式(20)より次式のごとく与えられる。

$$y = \frac{l^4}{EI_0\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ p_n + \sum_{i=1}^7 \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \times \sum_{m=1}^{\infty} p_m \cdot F(m, n, i) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots\dots(24)$$

ここに、

$$p_n = \frac{4p_0}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$$

変断面区間の始・終点を与える座標値 ξ_i および断面二

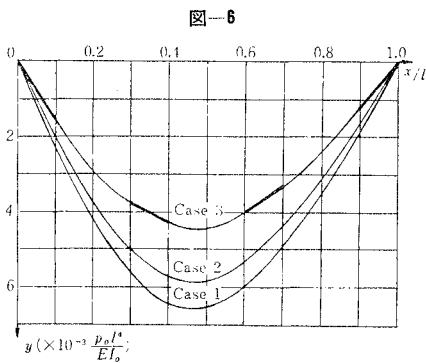
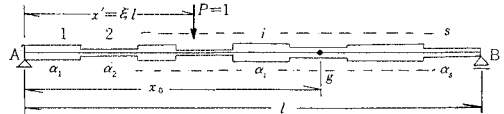


図-6

次モーメント比 α_i がつぎの諸値で与えられる場合について式(24)を計算すれば図-6のごときたわみ曲線が得られる。

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0, \xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = 0.4, \xi_4 = 0.6, \\ \xi_5 &= 0.7, \xi_6 = 0.9, \xi_7 = 1.0 \\ \alpha_2 &= \alpha_4 = \alpha_6 = 1.0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Case 1: } \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 1.0 \\ \text{Case 2: } \alpha_1 = \alpha_7 = 2.0, \alpha_3 = \alpha_5 = 1.5, \\ \text{Case 3: } \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \infty \end{array} \right. \end{aligned}$$

図-7



b) 変位の影響線

図-7に示すごとく、左支点 A より任意の距離 $x' = \xi l$ に単位集中荷重 $P=1$ が作用するものとする。しかるるとき、 $P=1$ の正弦フーリエ級数展開式における展開係数は次式で与えられる。

$$p_n = \frac{2}{l} \sin n\pi\xi$$

上式を式(19)に代入して得られる q_n を式(20), (21)に代入すれば、図-7の荷重状態に対するたわみ y およびたわみ角 θ が求められ、その結果に定点 g の座標値 $x = x_0$ を代入して演算のうえ整理すれば、結局次式のごとく定点 g のたわみおよびたわみ角が得られる。

$$\begin{aligned} y(x=x_0) &= \frac{2l^3}{EI_0\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} x_0 \left\{ \sin n\pi\xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} F(m, n, i) \sin m\pi\xi \right\} \\ \theta(x=x_0) &= \frac{2l^2}{EI_0\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi}{l} x_0 \left\{ \sin n\pi\xi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} F(m, n, i) \sin m\pi\xi \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(25)$$

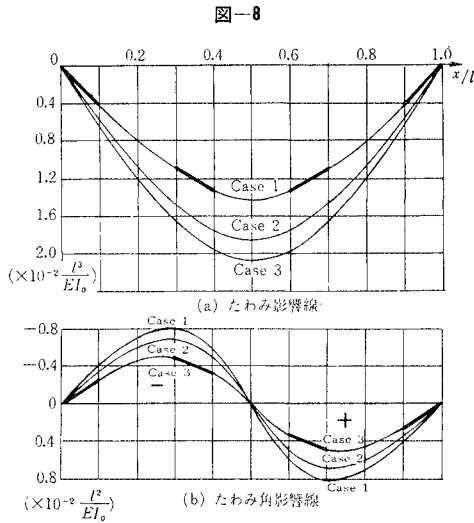
$P=1$ を移動荷重と考えれば、 ξ は 0~1 の値をとり、したがって、式(25)は定点 g のたわみおよびたわみ角の影響線式となる。なお、変位の影響線は相反作用の定理からも誘導可能であるが、結果は当然式(25)と一致する。

算例として、図-4 (b)の階段状変断面ばりのスパン中央点におけるたわみおよびたわみ角の影響線を図-8に示す。

3. たわみ角法

(1) たわみ角式の誘導

任意垂直荷重 $p(x)$ および端モーメント M_A, M_B が作用する階段状変断面ばりの両端 A, B における接線角を τ_A, τ_B とすれば、これらは式(21)に $x=0, l$ を代



入ることによりただちに次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_A &= \frac{1}{EI_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 q_n \\ \tau_B &= \frac{1}{EI_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 q_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式(26)に式(19)を代入し、演算のうえ整理すれば、 M_A, M_B に関するつぎの2式を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_A \sum_{n=1}^{\infty} H_{An}/n^3 + M_B \sum_{n=1}^{\infty} H_{Bn}/n^3 &= \pi^3 \frac{EI_0}{l} \tau_A - l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\ &\times \left\{ p_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \\ M_A \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{An}/n^3 + M_B \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{Bn}/n^3 &= \pi^3 \frac{EI_0}{l} \tau_B - l^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \\ &\times \left\{ p_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

階段状変断面ばりの部材回転角を R 、両端 A, B におけるたわみ角を θ_A, θ_B とすれば、周知のごとく $\tau_A = \theta_A - R$ 、 $\tau_B = \theta_B - R$ なる関係があるゆえ、このことを考慮して式(27)を連立に解き端モーメント M_A, M_B を求めれば、階段状変断面ばりのたわみ角式が次式のごとく誘導される。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \kappa EK_0 \{ D_{BB}\theta_A + D_{AB}\theta_B \\ &\quad - (D_{BB} + D_{AB})R \} + C_{AB} \\ M_{BA} &= \kappa EK_0 \{ D_{BA}\theta_A + D_{AA}\theta_B \\ &\quad - (D_{BA} + D_{AA})R \} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

(ただし、慣用のごとく、 $M_A = M_{AB}$ 、 $M_B = M_{BA}$ と改める)。

ここに、

$$D_{AA} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{An}/n^3$$

$$\left. \begin{aligned} D_{AB} &= - \sum_{n=1}^{\infty} H_{Bn}/n^3 (= D_{BA}) \\ D_{BA} &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{An}/n^3 (= D_{AB}) \\ D_{BB} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{Bn}/n^3 \\ \kappa &= \pi^3 / (D_{AA}D_{BB} - D_{AB}D_{BA}) \\ K_0 &= I_0/l \\ C_{AB} &= \frac{-l^2}{D_{AA}D_{BB} - D_{AB}D_{BA}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\ &\quad \times \{ D_{BB} + (-1)^n D_{AB} \} \\ &\quad \times \left\{ p_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \\ C_{BA} &= \frac{-l^2}{D_{AA}D_{BB} - D_{AB}D_{BA}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\ &\quad \times \{ D_{BA} + (-1)^n D_{AA} \} \\ &\quad \times \left\{ p_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

式(28)より一端ヒンジ材に対するたわみ角式を誘導すれば次式のごとく得られる。

A端ヒンジの場合

$$M_{BA} = \frac{\pi^3 EK_0}{D_{BB}} (\theta_B - R) + C_{BA} - \frac{D_{BA}}{D_{BB}} \cdot C_{AB}$$

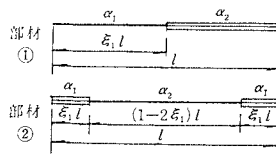
B端ヒンジの場合

$$M_{AB} = \frac{\pi^3 EK_0}{D_{AA}} (\theta_A - R) + C_{AB} - \frac{D_{AB}}{D_{AA}} \cdot C_{BA}$$

.....(30)

式(28)の係数 κ, D_{AA}, D_{BB} および $D_{AB} = D_{BA}$ は部材の形状により定まる定数で、形状定数と称すべきものである。式(29)より明らかなごとく、形状定数は無限級数の形で与えられるゆえ、これらをあらかじめ計算のうえ図表化しておけば、実際上きわめて便利である。本論文では図-9に示すごとき階段状変断面ばり2例について計算し、その結果を図-10, 11に示す。

図-9



式(28)の定数項 C_{AB} および C_{BA} は部材の形状および荷重状態により定まる定数で、既往のたわみ角式の荷重項に相当する。

(2) 計算例

a) 連続ばり

図-12(a)に示すごとき2スパン連続ばりに等分布荷重が満載されるものとする。部材①, ②に関する形状定

图-10(a) 部材① D_{AA}, D_{BB}

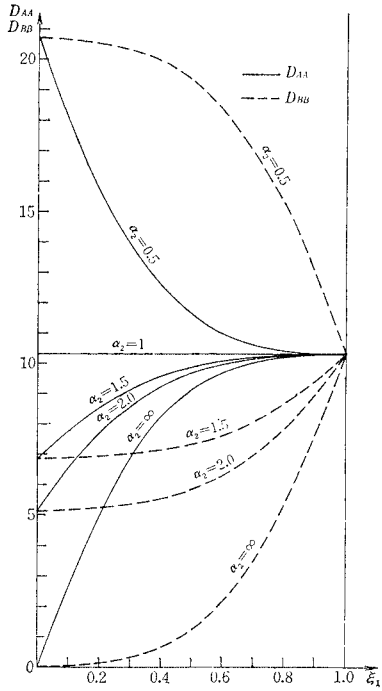


图-10(b) 部材① $D_{AB} = D_{BA}$

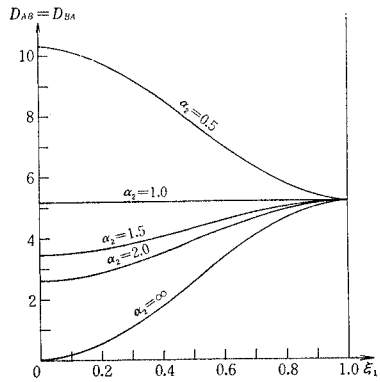


图-10(c) 部材① κ

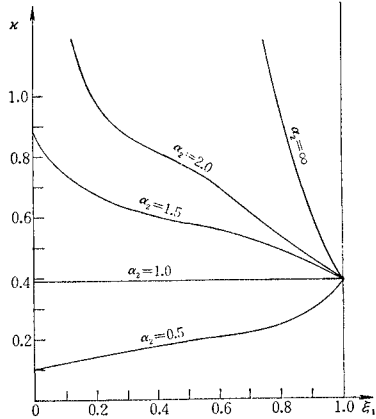


图-11(a) 部材② D_{AA}, D_{BB}

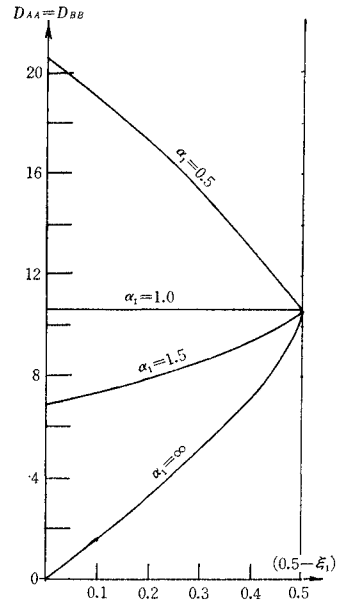


图-11(b) 部材② $D_{AB} = D_{BA}$

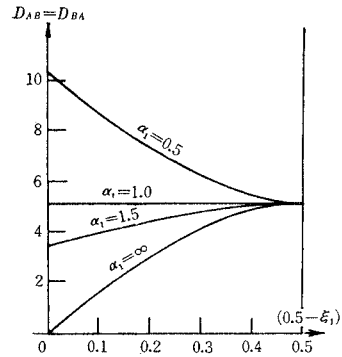


图-11(c) 部材② κ

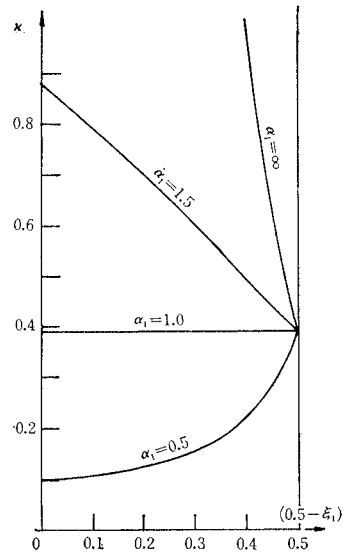


図-12

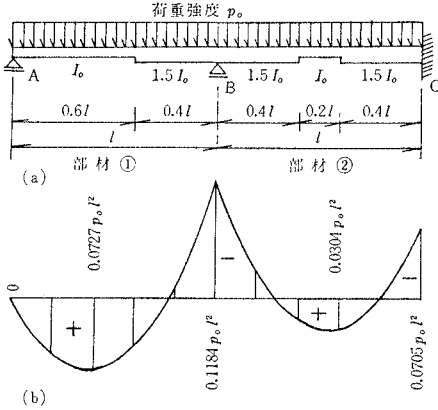


表-1

		部材 ①	部材 ②
形状定数	D_{AA}	10.0836	7.3931
	D_{AB}	4.5613	3.9550
	D_{BA}	4.5613	3.9550
	D_{BB}	7.6136	7.3931
	κ	0.5540	0.7947
荷重項	C_{AB}	$-0.07838 p_0 l^2$	—
	C_{BA}	$0.09306 p_0 l^2$	—

数(図-10.11 参照)および荷重項は表-1に示すごとく与えられ、これら諸値を式(30)および式(28)に代入のうえ各部材のたわみ角式を求めればそれぞれ次式のごとく得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= 4.0725 \varphi_B + 0.14002 p_0 l^2 \\ M_{BC} &= 5.8754 \varphi_B - 0.08716 p_0 l^2 \\ M_{CB} &= 3.1431 \varphi_B + 0.08716 p_0 l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

ここに、

$$\varphi_B = EK_0 \theta_B$$

節点 B における節点方程式に上式を代入して φ_B を求め、その結果を式(31)に代入すれば、 φ_B および各端モーメントが次値のごとく得られ、また、これら諸値を用いて各断面のモーメントを算出のうえプロットすれば

図-13

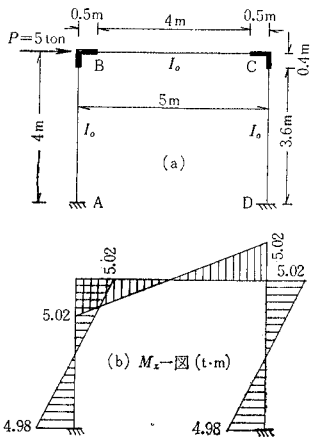


図-12 (b) に示す結果となる。

$$\begin{aligned} \varphi_B &= -0.005313 p_0 l^2 \\ M_{BA} &= 0.1184 p_0 l^2, \quad M_{BC} = -0.1184 p_0 l^2, \\ M_{CB} &= 0.0705 p_0 l^2 \end{aligned}$$

b) ラーメン

図-13 (a) に示すごとく、剛域を考慮した門型ラーメンの算例が文献 3) に示されているので、これを本論のたわみ角式を用いて解き、その正当性を確かめればつぎのとおりである。

表-2

	柱部材	はり部材
D_{AA}	10.2937	7.5224
D_{AB}	5.0230	4.8780
D_{BA}	5.0230	4.8780
D_{BB}	7.5346	7.5224
κ	0.5925	0.9456

各部材の形状定数(図-10.11 参照)および荷重項は式(29)より表-2に示すとき諸値となるゆえ、これらを式(28)に代入すれば各部材のたわみ角式が次式のごとく得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2.9762 \varphi_B + 7.4407 \psi \\ M_{BA} &= 6.0993 \varphi_B + 9.0755 \psi \\ M_{BC} &= 8.0019 \varphi_B + 5.1889 \varphi_C \\ M_{CB} &= 5.1889 \varphi_B + 8.0019 \varphi_C \\ M_{DC} &= 2.9762 \varphi_C + 7.4407 \psi \\ M_{CD} &= 6.0993 \varphi_C + 9.0755 \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

ここに、

$$\varphi_B = EK_0 \theta_B, \quad \varphi_C = EK_0 \theta_C, \quad \psi = -EK_0 R$$

式(32)を用いて節点 B, C における節点方程式および層方程式を求めれば次式のとおりである。

$$\begin{bmatrix} 13.2120 & 4.6124 & 9.0755 \\ 4.6124 & 13.2120 & 9.0755 \\ 9.0755 & 9.0755 & 33.0323 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

上式を連立に解けば、 φ_B, φ_C および ψ が次値のごとく求まる。

$$\varphi_B = \varphi_C = 0.4280 \text{ (t}\cdot\text{m)}, \quad \psi = -0.8407 \text{ (t}\cdot\text{m)}$$

上記結果を式(32)に代入し、各部材の端モーメントを算出のうえモーメント図を描けば図-13 (b) に示すとおりであり、当然ながら文献 3) と合致する。

4. 連続ばりの別解法

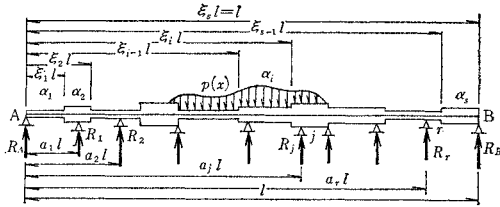
階段状変断面部材をもつ連続ばりは、前章 3. に示すごとく、たわみ角法により解析できるが、文献 5) および文献 6) に示す連続ばりおよびラーメンの解法を拡張応用することによっても解析可能で、かかる解法を本章では提示するものである。

(1) 解法

a) 連続ばりのたわみ曲線

図-14 (a) に示すごとく、連続ばりは両端 A, B のほ

図-14



かに中間支点 r 個 ($j=1, 2, \dots, r$) で支えられ、その全長を l 、端 A から各中間支点 $1, 2, \dots, j, \dots, r$ までの距離をそれぞれ $a_1 l, a_2 l, \dots, a_j l, \dots, a_r l$ とする。また、連続ばりに任意垂直荷重 $p(x)$ が作用し、かつ両端 A, B で垂直変位 d_A, d_B が起こるとき、各中間支点到に生ずる支点反力をそれぞれ $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_r$ とし、各力の符号は 図-14 に示す矢印の向きを正とする。連続ばりの断面変化に関しては 図-1 と同じ記号を用うることとし、図示のごとく表示する。

任意垂直荷重 $p(x)$ の正弦 フーリエ 級数展開式は式 (3) で与えられ、また、中間支点反力のそれは次式のごとく表わされる。

$$\{R_j\}_SF = \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (j=1, 2, \dots, r) \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここに、

$$C_{jn} = \frac{2}{l} R_j \sin n\pi a_j$$

$p(x)$ と同様に、各中間支点反力をいずれも荷重とみなせば、連続ばりは両端 A, B で単純支持された 1 径間ばりに置き換えられ、その原荷重 $\bar{p}(x)$ は式 (3) と式 (33) とを加え次式で与えられる。

$$\bar{p}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \dots\dots\dots(34)$$

ここに、

$$\bar{p}_n = p_n - \frac{2}{l} \sum_{j=1}^r R_j \sin n\pi a_j$$

両端 A, B の支点変位のない連続ばりのたわみは、式 (34) の原荷重とそれより得られる補正荷重とによる置換ばりのたわみで与えられるが、その結果は式 (19) において p_n の代わりに式 (34) の \bar{p}_n を用いて得られる $q_n (= \bar{q}_n)$ を式 (20) に代入することによりただちに算出され、任意垂直荷重 $p(x)$ がなく両端 A, B に支点変位 d_A, d_B を生ずる場合のたわみと重ね合わせれば、本題の連続ばりのたわみ $y(x)$ がつぎのごとく算定される。

$$y(x) = \frac{l^4}{EI_0 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{q}_n}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} x + (d_B - d_A) \frac{x}{l} + d_A \quad \dots\dots\dots(35)$$

ここに、

$$\bar{q}_n = \bar{p}_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \bar{p}_m \cdot F(m, n, i)$$

b) 基本連立方程式

連続ばりの中間支点 $1, 2, \dots, k, \dots, r$ の垂直変位をそれぞれ $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_r$ とすれば、式 (35) から得られる各支点位置における連続ばりのたわみ y が、これら垂直変位に等しくなければならないことからつぎのごとき一連の変形条件式を得る。

$$y(x=a_k l) = d_k \quad \dots\dots\dots(36)$$

(ここに、 $k=1, 2, \dots, r$)

式 (36) に式 (35) を代入のうへ整理すれば、本題の連続ばりに関する基本連立方程式が次式のごとく求められる。

$$\sum_{j=1}^r R_j D_{kj} = \frac{l}{2} D_k + F \{a_k d_B + (1-a_k) d_A - d_k\} \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここに、 $k=1, 2, \dots, r$ 、 $F = EI_0 \pi^4 / 2l^3$

$$D_{kj} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ \sin n\pi a_j + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \times \sum_{m=1}^{\infty} F(m, n, i) \sin m\pi a_j \right\} \sin n\pi a_k$$

$$D_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ p_n + \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \times \sum_{m=1}^{\infty} p_m F(m, n, i) \right\} \sin n\pi a_k$$

式 (37) は中間支点と同数の方程式となるゆえ、連立に解けば未知不静定反力 R_j が求まり、したがって、本題の連続ばりの解が得られることとなる。

なお、式 (37) において、係数 D_{kj} は連続ばりの断面形状および中間支点の位置により定まる定数で、連立方程式の形状定数と称すべきものであり、また、定数 D_k は連続ばりに作用する荷重により定まる基本連立方程式の荷重項であり、その内容は式 (37) の考察から定義でき、結果のみ示せばつぎのとおりである(文献6)参照)。

D_{kj} = 基本構 (連続ばりから中間支点を取り除いて得られる単純ばり) の点 j に単位集中荷重 $P=1$ が働くとき、点 k が下向きに起こす垂直変位 d_k を F 倍したものである。

D_k = 求めんとする D_k の荷重状態と同じ荷重が基本構に働くとき、点 k が下向きに起こす垂直変位 d_k を $2/l F$ 倍したものである。

(2) 計算例

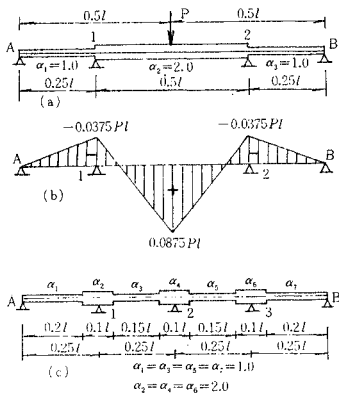
図-15 に示す連続ばり 2 例についてその算例を示せばつぎのとおりである。

a) 3 スパン連続ばり

図-15 (a) に示すごとき連続ばりの各部材はいずれも等断面であるが、これを階段状に変化する断面の始点および終点がたまたま中間支点と合致した階段状変断面部材をもつ連続ばりの一特例とみなし、本法による解と既往理論による結果とを対比すればつぎのとおりである。

部材 12 の中央に集中荷重 P が作用し、各中間支点

図-15



の垂直変位がないものとするれば、式(37)は本例に対しつぎの内容となる。

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = l/2 \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(38)$$

ここに、

$$D_{11}=D_{22}=0.3649 \quad D_{12}=D_{21}=0.2694$$

$$D_1=D_2=0.8245 Pl/l$$

式(38)から、中間支点反力 $R_1=R_2=0.650P$ が求まり、また、図-15(b)のモーメント図が得られ、当然ながら、既往理論の結果と合致する。

b) 4 スパン連続ばりの反力影響線

図-15(c)に示すごとく、支点近傍で断面が変化する4スパン連続ばりに関して、両端および各中間支点反力 R_A, R_B, R_1, R_2, R_3 の影響線を求めればつぎのとおりである。

Müller-Breslau の原理から、 R_1 の影響線は支点1に単位変位量1を与え、その弾性曲線を描くことにより得られるが、かかる場合の基本連立方程式は式(37)に $d_1=1, d_A=d_B=d_2=d_3=0, D_k=0$ を代入することにより次式のごとく求められる。

$$D \cdot \{R_1, R_2, R_3\}^T = F\{-1, 0, 0\}^T \dots\dots\dots(39)$$

ここに、

$$D = \begin{pmatrix} 0.50702 & 0.62328 & 0.39737 \\ 0.62328 & 0.90420 & 0.62328 \\ 0.39737 & 0.62328 & 0.50702 \end{pmatrix}$$

式(39)より R_1, R_2, R_3 が得られ、それぞれ次値となる。

$$R_1 = -15.6426 F, \quad R_2 = 15.2789 F,$$

$$R_3 = -6.5226 F$$

上記諸値を式(35)に代入すれば、本例の連続ばりの弾性曲線、したがって R_1 の影響線式が求められ、次式のごとく得られる。

$$y = - \sum_{k=1}^3 R_k / F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left\{ \sin n\pi a_k + \sum_{j=1}^7 \left(1 - \frac{1}{\alpha_j}\right) \times \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\pi a_k \cdot F(m, n, j) \right\} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (40)$$

ここに、

$$a_1=0.25, a_2=0.5, a_3=0.75$$

$$\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\alpha_7=1.0, \alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=2.0$$

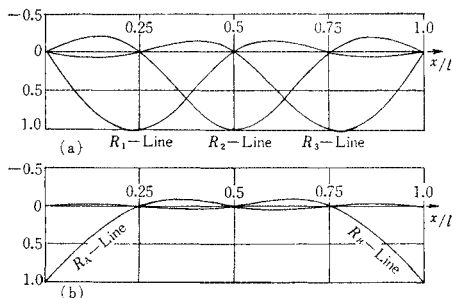
$$\xi_0=0, \xi_1=0.225, \xi_2=0.275, \xi_3=0.475,$$

$$\xi_4=0.525, \xi_5=0.725, \xi_6=0.775, \xi_7=1.0$$

x の各値について式(40)を計算すれば図-16(a)に示すとき R_1 -line が得られる。

同様にして、 R_2, R_3, R_A および R_B の影響線を算出すれば、図-16(a),(b)に示すとき結果を得る。

図-16

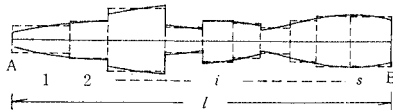


5. 任意形状変断面部材をもつ骨組構造の近似解法

(1) 解法

図-17に示すごとく、部材断面が任意形状に変化する場合は、これを厳密に解くことは一般に不可能である。しかし、はりを適当に分割し、各分割区間の断面二次モーメントとしてその区間の平均断面に関する断面二次モーメント(または平均断面二次モーメント)を用うれば、階段状変断面部材に置き換えられることとなり、任意形状変断面部材の近似解を得ることができる。

図-17

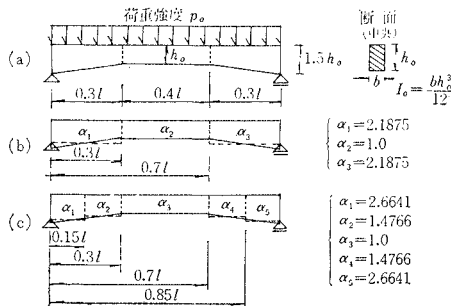


(2) 計算例

a) 単純ばり

図-18(a)に示すごとく、両端にハンチを有する変断

図-18



面ばりに等分布荷重が満載されるものとする。しかるとき、変断面ばりを図-18 (b), (c)のごとく2様の階段状変断面ばりに置換し、各区間の始端および終端の断面二次モーメントを求め、その平均値をその区間の断面二次モーメントとして断面二次モーメント比を計算すれば、それぞれ図中に示す諸値となり、これらを用いてそれぞれのはりのたわみ y を計算すれば表-3 (2), (3) 欄に示す結果を得る。表-3 (1) 欄は図-18 (a) の y に関する厳密解で、本例は厳密解が容易に求められる特例を精度の吟味のためにとくに選んだが、これと(2), (3) 欄の結果を比較すれば図-18 (b) の場合で平均約8.9%, 図-18 (c) の場合で約2.4%の誤差となり、本題に関する限り実用的には図-18 (c) の近似計算で十分間に合うことがわかる。

表-3 ハンチを有する単純ばりのたわみ y ($\times 10^{-2} p_0 l^4 / EI_0$)

x/l	(1) 厳密解 y	図-18 (b) の場合		図-18 (c) の場合	
		(2) y	(1)-(2) $\times 100$ (%)	(3) y	(1)-(3) $\times 100$ (%)
0 or 1.0	0	0	0	0	0
0.1 or 0.9	0.3492	0.3153	9.7	0.3403	2.5
0.2 or 0.8	0.6784	0.6105	10.0	0.6614	2.5
0.3 or 0.7	0.9555	0.8694	9.0	0.9311	2.6
0.4 or 0.6	1.1368	1.0507	7.6	1.1124	2.2
0.5	1.1988	1.1128	7.2	1.1745	2.1

b) ラーメン

図-19 に示すごとく、ラーメン中の柱はいずれも柱頭部に長さ $0.2l$ の剛域をもち、また、はりはその両端に $0.1l$ の剛域につづいてハンチを有するものとする。はり BC を図-20 のごとく3様の階段状変断面ばりに置換する。すなわち、図-20 (a) は第1近似としてハンチ部を1つのく形断面区間に、(b) は第2近似として2つのく形断面区間に、(c) は第3近似として5つのく形断面区間にそれぞれ置き換えたもので、とくに第3近似の精度はきわめて高く、実用上厳密解とみなして差し支えないものと推察される。各 Case のはり部材のたわみ角式における形状定数および荷重項を式 (29) を用いて算出すれば表-4 の(1) 欄に示す諸値となり、また柱部材についても同様の計算を行えば表-4 の(2) 欄に示すごとく得られ、これらの各値を用いて各部材のたわみ角

図-19

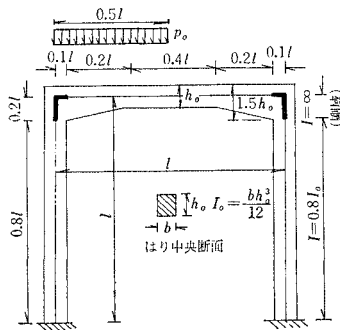


図-20

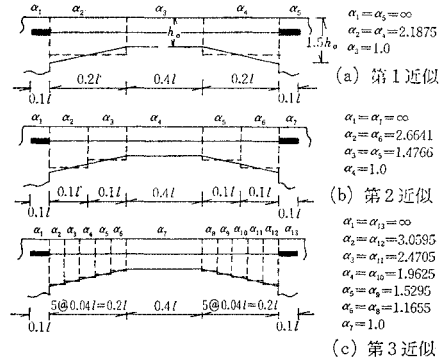


表-4

形状定数	(1) はり部材			(2) 柱部材
	第1近似	第2近似	第3近似	
D_{AA}	5.2115	5.4502	5.5328	10.2214
D_{AB}	3.8235	4.0140	4.0819	4.6302
D_{BA}	3.8235	4.0140	4.0819	4.6302
D_{BB}	5.2115	5.4502	5.5328	5.2918
κ	2.4726	2.2813	2.2227	0.9496
荷重項				
C_{AB}	$-0.08037 p_0 l^2$	$-0.08166 p_0 l^2$	$-0.08205 p_0 l^2$	—
C_{BA}	$0.02544 p_0 l^2$	$0.02438 p_0 l^2$	$0.02410 p_0 l^2$	—

表-5

角モメント	第1近似の場合		第2近似の場合		第3近似の場合
	(1) $\times p_0 l^2$	(3)-(1) $\times 100$ (%)	(2) $\times p_0 l^2$	(3)-(2) $\times 100$ (%)	
φ_B	0.005902	3.6	0.006070	0.9	0.006125
$-\varphi_C$	0.003548	-0.4	0.003534	0	0.003534
$-\psi$	0.000705	9.3	0.000760	2.2	0.000777
端モーメント					
M_{AB}	0.01544	1.6	0.01562	0.4	0.01569
$M_{BA}, -M_{BC}$	0.03787	2.4	0.03856	0.6	0.03880
$M_{CB}, -M_{CD}$	0.03551	1.9	0.03602	0.5	0.03620
$-M_{DC}$	0.01780	2.7	0.01816	0.7	0.01829

ここに $\varphi_B = EK\theta_B$, $\varphi_C = EK\theta_C$, $\psi = -EK_0R$

式を算出のうえラーメンの節点方程式および層方程式に代入し、各節点のたわみ角および部材回転角を求め、さらに、各部材の端モーメントを求めれば表-5 のごとく結果となり、第3近似値と第1および第2近似値とを比較対照すれば、最も誤差の大きい第1近似における ψ の場合でたかだか9.3%にすぎず、本例に関する限り実用的には図-20 (a) の第1近似でも十分間に合うことがわかる。

6. 結 語

階段状変断面部材をもつ連続はりおよびラーメンの解法として、たわみ角法と基本連立方程式に基づく方法との2法を提案したが、前者は既往のはり理論におけるたわみ角法と全く同じ手法であり、したがって、たわみ角式以外に何ら新知識を必要とすることなく実際上の解析に用いることができ、また、連続はり、ラーメンのいずれの解析にも適用可能である。他方、後者は級数の発散

のためラーメン解析に拡張することは不可能で、連続ばりのみに限定される。しかし、本法は未知数を直接不静定力とする応力法であり、前者におけるごとく、変位を媒介として応力を求めるわずらわしさが無い。また、文献 5) とともに、連続ばりと板とからなる一体構造の解析に欠くべからざる基礎理論となりうる点が前者に優る。以上のごとく、いずれの方法もそれぞれの特色をもつもので、一概には優劣をつけがたい。

本論文は、フーリエ級数を用いて剛域をも考慮した階段状変断面部材をもつ骨組構造の厳密解法および任意形状変断面部材をもつ骨組構造の近似解法を提示したものであるが、なお、本法の特色を列記すればつぎのとおりである。

(1) 本法では、いかなる階段状変断面部材についても任意垂直荷重に対するたわみおよびたわみ角が式 (20), (21) の形で与えられ、往々にしてこの種論文に見受けられるごとく式が複雑でなく簡明である。また、たわみ角式および基本連立方程式における形状定数および荷重項をあらかじめ計算のうえ図表化しておけば、代数関数による既往の他解法となんら変わらない計算労力ですむ。

(2) 算例にも示すように、剛域の問題は本法の一特例となり、したがって、既往研究のごとく剛域の問題と断面変化の問題とを別々の観点からとらえる必要はなく、かかる構造物の解析をきわめて単純化する。

(3) 5. に示すごとく、本法は任意形状変断面部材の

近似解析を行なうことができるが、近似値の精度をあげるには単に断面の分割を小さくすることにより機械的に行ないうる。

(4) 板は一般に級数を用いて解かれる。したがって、板とはりとからなる一体構造物の解析において、両構造の連続条件を考慮する際、はりの解も同じ級数を用いて示す必要があるが本法はかかる意味において、板・はり一体構造物の解法における基本理論となりうる。

最後に、本研究にあたり、級数の収束問題に関して適切なご助言をいただいた九州大学工学部応用理学教室の金原誠教授に謝意を表するとともに、数値計算には九州大学中央計数施設の電子計算機 OKITAC-5090 H を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) O. Ondra : Deflection and Slope of Beams with Varying I, Proc. A.S.C.E., ST. 1, Feb. 1963
- 2) M. Hetényi : Deflection of Beams of Varying Cross Section, Journal of Applied Mechanics, Vol. 4, No. 2, June, 1937
- 3) 小野 薫 : 材端に剛な部分をもつ材から成る ラーメンの解法について, 建築学会論文集, 第 24 号, 昭和 17 年 3 月
- 4) 大石健次 : 剛域を含む不規則 ラーメンの固定法による解法, 建築学会論文集, 第 58 号, 昭和 33 年 2 月
- 5) 山崎・樗木 : フーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法, 九州大学工学集報, 第 39 巻第 3 号, 昭和 41 年 10 月
- 6) 山崎・樗木・今岡 : 両端が任意の境界条件をもつ連続ばりおよびラーメンの一解法, 九州大学工学集報, 第 40 巻第 2 号, 昭和 42 年 3 月

(1967.12.26・受付)