

テーパーのついているアーチの弾性安定に 関する基礎的研究

——円弧の面内中心方向等分布荷重が満載作用した場合の弾性座屈について——

THE FUNDAMENTAL ANALYSIS OF ELASTIC STABILITY FOR CONSTANTLY TAPERED ARCHES

——The Buckling of Tapered Circular Arches——

奥村 敏 恵*・松 浦 聖**
By Toshie Okumura and Sei Matuura

要 旨 図-1 に示すようなテーパーの著しくついたアーチについての、弾性安定の力学に関連した基礎的考察として、弾性座屈や振動の解析などの考察のうちで、ここでは、円弧アーチに、面内中心方向に等分布荷重が満載作用する場合の弾性座屈値を、アーチの各種座屈変形状態を考慮して、解析的に求めたものである。

その解析に当っては、アーチ・テーパーの角度の影響をとくに吟味の対象とし、また問題とすべき変形モードを数値計算から考察したものである。

1. 緒 言

アーチに関する弾性安定の研究において、たとえばアーチの面内および面外における弾性座屈に関する研究成果は、すでに以前より数多く発表されており、また振動や極限崩壊荷重などについてのこの種研究論文も数多くある。しかしここで解析の対象としたアーチは、テーパーがついているため、たとえば座屈変形をする場合にも、スパン中央での拘束によって、常にアーチの面内および面外への挙動が同時にひき起こされ、その弾性座屈に、テーパー ϕ が影響を与える。そこでこの ϕ の変化による影響にとくに着目して、弾性座屈の考察を行なったものである。

なお解析に当っては、その座屈基本式の誘導にはエネルギー法を用いて考察を進めた。

さてここで解析の対象としたいいわゆるバスケット ハンドル形式のアーチは、図-1, 2, 3 に示すように2本の主構が円弧アーチで、テーパー ϕ (図-1, 3 参照) がついたアーチは、スパン中央クラウンの C 点で剛結されている。またアーチの両端支点 (A, B, \bar{A} , \bar{B}) はヒンジ構造をここでは一応考えている。すなわち支点では、アーチは面 I, II に垂直な軸のまわりの回転のみ自由で、そのほかの移動、回転は拘束されているものとする。

なお以下の計算では、曲げねじりに関する量は考慮

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 名古屋工業大学助教授 土木工学科

図-1 アーチ見取図

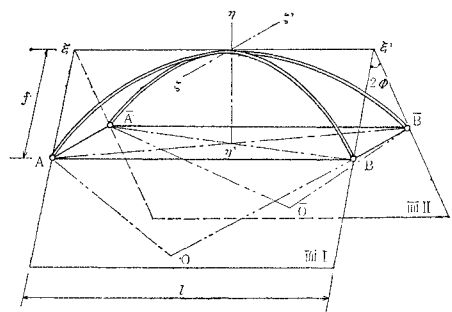
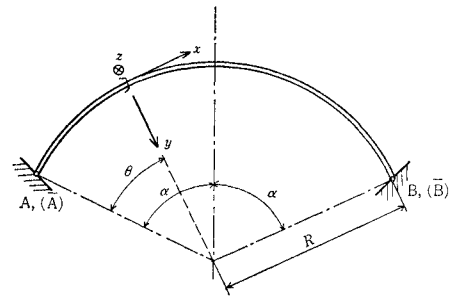
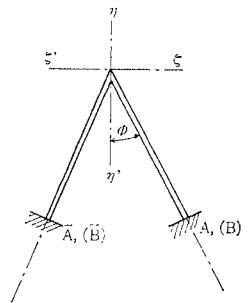


図-2 アーチ実形図



に入れていない。また部材断面は一定として考えている。

図-3 アーチ横断面図



2. 理論的考察

(1) 記号および計算の基礎

アーチの座標系および変位・断面力の記号や符号は、図-2, 4, 5 のようにとることとする。すなわち、座標の中心は、アーチ部材断面に座標系を固定して、その原点はせん断中心にとり、 x 軸は接線方向に、 y 軸は曲率中心方向に、 z 軸は xy 面に垂直方向にとり、その正の方向は図-2 に示すように定めることとする。

図-4 変位の符号

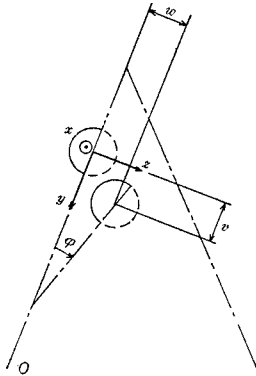
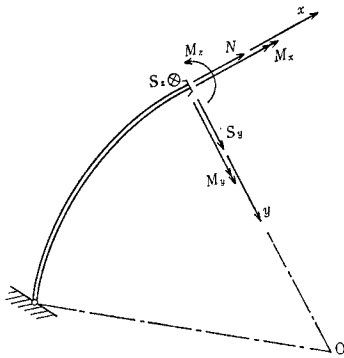


図-5 断面力の符号



変位の符号として、せん断中心の x, y, z 方向への変位を、それぞれ u, v, w とし、さらにねじり回転角 ϕ を考える。この ϕ の符号は、ねじりモーメント M_x の正の方向と一致させてとる (図-4, 5 参照)。

また断面力の符号は図-5 のように規定することとする。

つぎに計算の基礎的条件として、つぎのような仮定や制約を設けることとする。

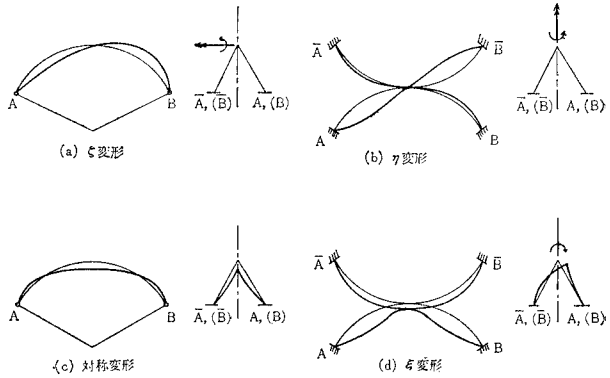
荷重は最も基本的単純な載荷状態として、アーチ断面のせん断中心を通り、座屈変形前ではアーチ面内曲率中心方向に等分布荷重 p が満載され、アーチの座屈変形後も大きさは変わらず方向も変わらない場合を取扱うこととする。

なおアーチのせん断中心を連ねた軸長は変形後も一定同じ長さに保たれているものとする。

また座屈変形様式としては、対称形構造物に對称の荷重を加えるのだから、一般に起こりやすい座屈変形は対称かまたは逆対称が考えられよう。したがってここでは、アーチ \widehat{AB} と $\widehat{A\bar{B}}$ とは同一の座屈変形が生じる場合を主として論ずることとし、なお一部 \widehat{AB} と $\widehat{A\bar{B}}$ とが同一変形でない場合も考えている。そこで、つぎの最も基本的な場合が考えられよう。

すなわち、頂点 C は平面 $\xi-\eta$ 上にあり、アーチ \widehat{AB}

図-6 座屈変形状態



(または $\widehat{A\bar{B}}$) は C 点に関して対称か逆対称に変形を生ずる。さらに頂点 C が全く回転しない場合と、 η 軸、 ζ 軸のまわりだけに、それぞれ回転する場合とを考慮する。一方頂点 C は平面 $\xi-\eta$ 上ではなく、平面 $\eta-\zeta$ 上にある、 ξ 軸まわりに回転する場合をも考える。結局 4 つの変形状態に対応した考察検討をしている。その状態は図-6 に示しており、それぞれの座屈変形に対応して、 ζ 座屈、 η 座屈、対称座屈そして ξ 座屈と名づけておくこととする。

さて以上の考察から、中央剛節点 C での拘束条件を特に考慮することにすれば、解析はまずアーチ 1 本に着目して進めて行けばよい。

(2) 座屈基本式の誘導

a) 断面力の変位による表示関係式

さきに定めたような変位や断面力などの間には、幾何学的な関係を考慮し、フックの法則を適用すれば、つぎのような関係がある。すなわち、まずアーチのねじれ率を ρ_ϕ 、アーチの y 軸、 z 軸まわりの曲率を ρ_y, ρ_z 、さらにアーチの軸方向の伸びひずみを ϵ_x とすると、

$$\rho_\phi = \left(\frac{d\phi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dw}{ds} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{d\phi}{d\theta} + \frac{d\psi}{d\theta} \right) \dots\dots\dots(1.1)$$

$$\rho_y = \left(\frac{d^2w}{ds^2} - \frac{\phi}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \phi \right) \dots\dots(1.2)$$

$$\rho_z = \left(\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + v \right) \dots\dots(1.3)$$

$$\epsilon_x = \left(\frac{du}{ds} - \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\theta} - v \right) \dots\dots(1.4)$$

.....(1)

である。ここに $w \equiv R\psi$ 、 ds は材軸に沿った線素である。したがって、 M_x, M_y, M_z 、そして N をそれぞれ、ねじりモーメント、 y 軸と x 軸に関する曲げモーメントおよび軸力とすれば、

$$M_x = -\frac{GJ_T}{R} \left(\frac{d\phi}{d\theta} + \frac{d\psi}{d\theta} \right) \dots\dots(2.1)$$

$$M_y = -\frac{EI_y}{R} \left(\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \phi \right) \dots\dots(2.2)$$

.....(2)

$$M_z = -\frac{EI_z}{R^2} \left(\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v \right) \dots\dots(2.3)$$

$$N = \frac{EA}{R} \left(\frac{du}{d\theta} - v \right) \dots\dots\dots(2.4)$$

となる。ここに GJ_T はアーチの x 軸まわりのねじり剛性, EI_y, EI_z および A はアーチの y 軸および z 軸まわりの曲げ剛性および横断面積である。

b) 座屈直前状態における応力の算定

いまアーチの座屈直前の状態における断面力および変位を, それぞれ記号に 0 の添字を付けて, $M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0}, N_0, S_{y_0}, S_{z_0}, u_0, v_0, w_0$ そして φ_0 とすれば, すでにつきのように求められている²⁾。

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= \frac{GJ_T}{R} \left(\frac{d\varphi_0}{d\theta} + \frac{d\psi_0}{d\theta} \right) \\ &= \frac{2F_3F_4}{F_3+F_4} (C_2' \cos\theta + C_4' \sin\theta) + F_3C_5' \\ M_{y_0} &= -\frac{EI_y}{R} \left(\frac{d^2\psi_0}{d\theta^2} - \varphi_0 \right) \\ &= \frac{2F_3F_4}{F_3+F_4} (-C_2' \sin\theta + C_4' \cos\theta) \\ M_{z_0} &= -\frac{EI_z}{R^2} \left(\frac{d^2v_0}{d\theta^2} + v_0 \right) \\ &= -RF_2(-2C_2 \sin\theta + 2C_4 \cos\theta + C_5) \\ N_0 &= \frac{EA}{R} \left(\frac{du_0}{d\theta} - v_0 \right) \\ &= -pR - 2F_2(-C_2 \sin\theta + C_4 \cos\theta) \\ S_{y_0} &= F_2(2C_2 \cos\theta + 2C_4 \sin\theta) \\ S_{z_0} &= \frac{F_3}{R} C_5' \end{aligned} \dots\dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned} u_0 &= C_1 \sin\theta + C_2(\cos\theta + \theta \sin\theta) \\ &\quad - C_3 \cos\theta + C_4(\sin\theta - \theta \cos\theta) + C_5\theta \\ &\quad + C_6 + \frac{2F_2}{F_1} (-C_2 \cos\theta - C_4 \sin\theta) - \frac{pR}{F_1} \theta \\ v_0 &= (C_1 + C_2\theta) \cos\theta + (C_3 + C_4\theta) \sin\theta + C_5 \\ \psi_0 &= \frac{w_0}{R} = -C_1' \cos\theta + C_2'(-\theta \cos\theta \\ &\quad + \frac{2F_4}{F_3+F_4} \sin\theta) - C_3' \sin\theta \\ &\quad - C_4'(\theta \sin\theta + \frac{2F_4}{F_3+F_4} \cos\theta) \\ &\quad + C_5'\theta + C_6' \\ \varphi_0 &= (C_1' + C_2'\theta) \cos\theta + (C_3' + C_4'\theta) \sin\theta \end{aligned} \dots\dots\dots(4)$$

ここに,

$$F_1 \equiv \frac{EA}{R}, F_2 \equiv \frac{EI_z}{R^3}, F_3 \equiv \frac{GJ_T}{R}, F_4 \equiv \frac{EI_y}{R}$$

であり, また $C_1, \dots, C_6, C_1', \dots, C_6'$ は積分定数である。

c) 座屈変形を起こしたとき, アーチに蓄えられるポテンシャル・エネルギー

図-7, 8 はアーチの面外変形と面内変形とに区分して考察した変形図である。すなわち 図-8 において, 座

図-7 座屈時の変位

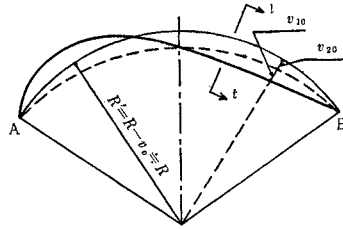
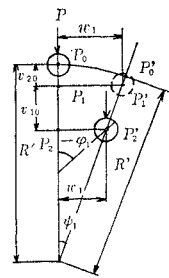


図-8 t-t 視



屈直前のせん断中心 (この場合重心) の位置を P_0 とし, 座屈後の位置は P_2' として, この座屈変形の過程をまず面外変形によって P_0 から P_1' に移り, 続いて面内変形によって P_1' から P_2' に変位するものと考ええる。さて座屈直前から座屈変形までの変位を $\overline{P_0P_2'} = v_{10} + v_{20}$, $\overline{P_2'P_2'} = w_{10} \div R\psi_{10}$ および φ_{10} とする。ここで v_{20} はアーチのせん断中心が P_0 から $P_{1'}$ に変位したとき, せん断中心 ($P_{1'}$) を連ねた, いわゆる材軸の長さを一定に保つために生じた y 方向の変位である。

つぎに座屈直前の平衡状態より, ごく近傍の座屈変形状態に移る間に, アーチに蓄えられるポテンシャル・エネルギーの増加 W を求めてみる。

① ひずみエネルギーの増加

式 (2) によって, ひずみエネルギーの増加は, つぎのように算定される。

② ねじれによるひずみエネルギー

$$W_1 = \int_{(L)} \frac{1}{2} F_3 \left(\frac{d\varphi_{10}}{d\theta} + \frac{d\psi_{10}}{d\theta} \right)^2 d\theta$$

③ 面外たわみによるひずみエネルギー

図-8 において $\overline{P_2'P_2'} \div \overline{P_1P_1'} = w_{10} \div R\psi_{10}$ であるから,

$$W_2 = \int_{(L)} \frac{1}{2} F_4 \left(\frac{d^2\psi_{10}}{d\theta^2} - \varphi_{10} \right)^2 d\theta$$

④ 面内たわみによるひずみエネルギー

面内たわみによるひずみエネルギーは, 近似的に $\overline{P_0'P_2'}$ の変位によって表わすことができるが, $\overline{P_0'P_2'}$ はきわめて小さく (場合によっては 0), これがひずみエネルギーに与える影響は小さいから無視すると

$$\overline{P_1'P_2'} \div \overline{P_1P_2'} = v_{10}$$

より,

$$W_3 = \int_{(L)} \frac{1}{2} F_2 \left(\frac{d^2v_{10}}{d\theta^2} + v_{10} \right)^2 d\theta$$

⑤ 座屈直前に働いていた応力のなす仕事

① ④ と同様にして, 座屈直前に働いていた応力 ($M_{x_0}, M_{y_0}, M_{z_0}$) のなす仕事は, 式 (1), (3) から, つぎのようになる。

$$W_4 = \int_{(L)} M_{x_0} \left(\frac{d\varphi_{10}}{d\theta} + \frac{d\psi_{10}}{d\theta} \right) d\theta$$

$$W_5 = \int_{(L)} -M_{y_0} \left(\frac{d^2\psi_{10}}{d\theta^2} - \varphi_{10} \right) d\theta$$

$$W_6 = \int_{(L)} -\frac{M_{z0}}{R} \left(\frac{d^2 v_{10}}{d\theta^2} + v_{10} \right) d\theta$$

⑥ 軸力 N_0 のなす仕事

アーチ軸の伸びおよびねじれによる N_0 のなす仕事は省略すると、 N_0 のなす仕事は曲げ変形のとくに生じるもので、

$$W_7 = \int_{(L)} -\frac{N_0}{2R} \left(\frac{d^2 v_{10}}{d\theta^2} + v_{10} \right) v_{10} d\theta$$

となる³⁾。

③ 荷重 p のする仕事

荷重 p のなす仕事は

$$W_8 = \int_{(L)} -(v_{10} + v_{20}) p \cdot R d\theta$$

である。しかるに座屈のときにも材軸の長さは、一定に保たれると仮定しているから、いまこの長さを

$$L = \int_{(L)} (R - v_0) d\theta$$

とおくと、 P_1' および P_2' の軌跡長も L とならなければならないことになる。したがって、まず P_1' の軌跡長 L は、

$$\begin{aligned} L &= \int_{(L)} P_1' ds \\ &= \int_{(L)} \sqrt{(OP_1')^2 + \left(\frac{d}{d\theta} OP_1'\right)^2 + \left(\frac{d}{d\theta} P_1 P_1'\right)^2} d\theta \\ &= \int_{(L)} \sqrt{(R' - v_{20}')^2 + (v_{20}')^2 + (w_{10}')^2} d\theta \end{aligned}$$

$$\doteq L - \frac{1}{2} \int_{(L)} \frac{1}{R'} \left\{ \frac{2v_{20}'}{R'} - \left(\frac{w_{10}'}{R'}\right)^2 \right\} d\theta$$

$$\therefore \int_{(L)} v_{20} d\theta = \int_{(L)} \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_{10}}{d\theta} \right)^2 R^2 d\theta$$

($\because R' = R - v_0 \doteq R$)

つぎに P_2' の軌跡長 L は、

$$L = \int_{(L)} P_2' ds \doteq \int_{(L)} (OP_2' - v_{10}) d\theta = L - \int_{(L)} v_{10} d\theta$$

したがって

$$\int_{(L)} v_{10} d\theta = 0$$

よって、荷重 p のなす仕事は

$$W_8 = \int_{(L)} -\frac{1}{2} p \left(\frac{d\psi_{10}}{d\theta} \right)^2 R^2 d\theta$$

④ 頂点における仕事の考察

頂点においてアーチ $\widehat{A\bar{C}\bar{B}}$ がアーチ \widehat{ACB} に与える反力は仕事をしない。

⑥ 全ポテンシャル・エネルギー

座屈のとき、アーチに生じる全ポテンシャル・エネルギーの増加 W は、以上を合計して、つぎの式(5)のように書ける。ただしここで、 W_1, W_2, W_4, W_5, W_8 においては φ_0, ψ_0 の弾性変形は無視して、 $\varphi_{10} \doteq \varphi, \psi_{10} \doteq \psi$ ととり、さらに W_3, W_6, W_7 においても、 $v_{10} \doteq v$ としてもほとんど近似的には差しつかえないと考えられ

るから、おきかえて考えて行くこととする。なお式(5)において v, w, φ などに付けた添字 1, 2 は、アーチ \widehat{AC} 部分には1を、アーチ \widehat{CB} 部分には2を付けることとする。

$$\begin{aligned} W &= W_{1,1} + W_{1,2} + \dots + W_{1,\alpha} + W_{2,1} + W_{2,2} + \dots + W_{2,\alpha} \\ &= \int_0^\alpha \left[\frac{1}{2} F_3 \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_1} + \frac{d\psi_1}{d\theta_1} \right)^2 + \frac{1}{2} F_4 \left(\frac{d^2\psi_1}{d\theta_1^2} - \varphi_1 \right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} F_2 \left(\frac{d^2v_1}{d\theta_1^2} + v_1 \right)^2 + M_{x0} \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_1} + \frac{d\psi_1}{d\theta_1} \right) \\ &\quad - M_{y0} \left(\frac{d^2\psi_1}{d\theta_1^2} - \varphi_1 \right) - \frac{M_{z0}}{R} \left(\frac{d^2v_1}{d\theta_1^2} + v_1 \right) \\ &\quad \left. - \frac{N_0}{2R} \left(\frac{d^2v_1}{d\theta_1^2} + v_1 \right) v_1 - \frac{1}{2} p R^2 \left(\frac{d\psi_1}{d\theta_1} \right)^2 \right] d\theta_1 \\ &\quad + \int_0^\alpha \left[\frac{1}{2} F_3 \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} + \frac{d\psi_2}{d\theta_2} \right)^2 + \frac{1}{2} F_4 \left(\frac{d^2\psi_2}{d\theta_2^2} - \varphi_2 \right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} F_2 \left(\frac{d^2v_2}{d\theta_2^2} + v_2 \right)^2 + M_{x0} \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} + \frac{d\psi_2}{d\theta_2} \right) \\ &\quad - M_{y0} \left(\frac{d^2\psi_2}{d\theta_2^2} - \varphi_2 \right) - \frac{M_{z0}}{R} \left(\frac{d^2v_2}{d\theta_2^2} + v_2 \right) \\ &\quad \left. - \frac{N_0}{2R} \left(\frac{d^2v_2}{d\theta_2^2} + v_2 \right) v_2 - \frac{1}{2} p R^2 \left(\frac{d\psi_2}{d\theta_2} \right)^2 \right] d\theta_2 \\ &\quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

d) 座屈の基本方程式

座屈変形した時の境界条件を求め、変分法により、式(5)からオイラーの微分方程式を導くと、つぎのようになる。

ここでなお η 座屈の場合、アーチ・クラウンが不動とした場合を η_1 座屈とし、この C 点の鉛直方向への動きを考慮した場合を η_2 座屈と考えて区別する。

なお対称座屈の場合は、アーチにおいて $v_1, \varphi_1, \dots, v_2, \varphi_2, \dots$ などと区分する必要はなく、たとえば v_2, φ_2, \dots だけで考えればよい。

① 境界条件

支点すなわち $\theta_1=0, \theta_2=\alpha$ における条件式は、各座屈形に共通で、つぎのように考えられる。

$$\begin{aligned} \theta_1=0; \psi_1=0 \dots\dots\dots(6.1), \quad d\psi_1/d\theta_1=0 \dots\dots(6.2), \\ \varphi_1=0 \dots\dots\dots(6.3), \quad \xi_1=0 \dots\dots\dots(6.4), \\ d^2\xi_1/d\theta_1^2=0 \dots\dots(6.5) \\ \theta_2=\alpha; \psi_2=0 \dots\dots\dots(6.6), \quad d\psi_2/d\theta_2=0 \dots\dots(6.7), \\ \varphi_2=0 \dots\dots\dots(6.8), \quad \xi_2=0 \dots\dots\dots(6.9), \\ d^2\xi_2/d\theta_2^2=0 \dots\dots(6.10) \end{aligned}$$

ここで、 $\xi \equiv v/R$ である。

なお支承条件としては、固定支承の場合は、式(6.5)、(6.10) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} (d\xi_1/d\theta_1)_{\theta_1=0} &= 0 \dots\dots(6.5)', \\ (d\xi_2/d\theta_2)_{\theta_2=\alpha} &= 0 \dots\dots(6.10)' \end{aligned}$$

つぎにスパン中央 C 点におけ条件式は、つぎのように考えられる。

(i) ζ 座屈の場合

$$\theta_1=\alpha; \psi_1=0 \dots\dots(6.11.\zeta), \quad \varphi_1=0 \dots\dots(6.12.\zeta),$$

$$\xi_1=0 \cdots (6.13 \cdot \zeta),$$

$$d\xi_1/d\theta_1 = \cot \Phi \cdot d\psi_1/d\theta_1 \cdots (6.14 \cdot \zeta)$$

$$\theta_2=0; \psi_2=0 \cdots (6.15 \cdot \zeta), \quad \varphi_2=0 \cdots (6.16 \cdot \zeta),$$

$$\xi_2=0 \cdots (6.17 \cdot \zeta),$$

$$d\xi_2/d\theta_2 = \cot \Phi \cdot d\psi_2/d\theta_2 \cdots (6.18 \cdot \zeta)$$

さらに,

$$(d\xi_1/d\theta_1)_{\theta_1=\alpha} - (d\xi_2/d\theta_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.19 \cdot \zeta)$$

$$-\frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \cot \Phi (d^2\xi_1/d\theta_1^2)_{\theta_1=\alpha} - (d^2\psi_1/d\theta_1^2)_{\theta_1=\alpha}$$

$$+ \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \cot \Phi (d^2\xi_2/d\theta_2^2)_{\theta_2=0} + (d^2\psi_2/d\theta_2^2)_{\theta_2=0}$$

$$= 0 \cdots (6.20 \cdot \zeta)$$

ここで, 式 (6.20・ζ) はアーチ・クラウンにおける曲げモーメントの水平方向成分の連続条件すなわち,

$$[M_{y_1} \cdot \tan \Phi + M_{z_1}]_{\theta_1=\alpha} = [M_{y_2} \cdot \tan \Phi + M_{z_2}]_{\theta_2=0}$$

を表わしている。

(ii) η_1 座屈の場合

式 (6.11・ζ) ~ (6.20・ξ) のうち, つぎの3つの式だけ変えればよい。すなわち,

式 (6.14・ζ) を

$$d\xi_1/d\theta_1 = -\tan \Phi \cdot d\psi_1/d\theta_1,$$

式 (6.18・ζ) を

$$d\xi_2/d\theta_2 = -\tan \Phi \cdot d\psi_2/d\theta_2,$$

式 (6.20・ζ) を

$$\frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \cdot \tan \Phi (d^2\xi_1/d\theta_1^2)_{\theta_1=\alpha} - (d^2\psi_1/d\theta_1^2)_{\theta_1=\alpha}$$

$$- \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \tan \Phi (d^2\xi_2/d\theta_2^2)_{\theta_2=0} + (d^2\psi_2/d\theta_2^2)_{\theta_2=0}$$

$$= 0$$

とする。

(iii) η_2 座屈の場合

$$\theta_1=\alpha; \varphi_1=0 \cdots (6.11 \cdot \eta_2), \quad \psi_1=\xi_1 \tan \Phi \cdots (6.12 \cdot \eta_2),$$

$$\frac{d\xi_1}{d\theta_1} = -\tan \Phi \cdot d\psi_1/d\theta_1 \cdots (6.13 \cdot \eta_2)$$

$$\theta_2=0; \varphi_2=0 \cdots (6.14 \cdot \eta_2),$$

$$\psi_2=\xi_2 \tan \Phi,$$

$$\text{あるいは } (\psi_1)_{\theta_1=\alpha} - (\psi_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.15 \cdot \eta_2)$$

$$d\xi_2/d\theta_2 = -\tan \Phi \cdot d\psi_2/d\theta_2,$$

$$\text{あるいは } (d\psi_1/d\theta_1)_{\theta_1=\alpha} - (d\psi_2/d\theta_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.16 \cdot \eta_2)$$

さらに,

$$(\xi_1)_{\theta_1=\alpha} - (\xi_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.17 \cdot \eta_2),$$

$$(d\xi_1/d\theta_1)_{\theta_1=\alpha} - (d\xi_2/d\theta_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.18 \cdot \eta_2)$$

$$\frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \tan \Phi \left(\frac{d^2\xi_1}{d\theta_1^2} \right)_{\theta_1=\alpha} - \left(\frac{d^2\psi_1}{d\theta_1^2} \right)_{\theta_1=\alpha}$$

$$- \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \tan \Phi \left(\frac{d^2\xi_2}{d\theta_2^2} \right)_{\theta_2=0} + \left(\frac{d^2\psi_2}{d\theta_2^2} \right)_{\theta_2=0}$$

$$= 0 \cdots (6.19 \cdot \eta_2)$$

$$- \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_1}{d\theta_1^3} \right)_{\theta_1=\alpha} - \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d\xi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha}$$

$$+ \tan \Phi \left\{ - \left(\frac{d^3\psi_1}{d\theta_1^3} \right)_{\theta_1=\alpha} + \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} \right.$$

$$\left. + \frac{F_3}{F_4} \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} + \frac{F_3}{F_4} \left(\frac{d\psi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} \right\}$$

$$+ \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} + \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d\xi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0}$$

$$- \tan \Phi \left\{ - \left(\frac{d^3\psi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} + \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} \right.$$

$$\left. + \frac{F_3}{F_4} \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} + \frac{F_3}{F_4} \left(\frac{d\psi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} \right\}$$

$$= 0 \cdots (6.20 \cdot \eta_2)$$

ここで, 式 (6.19・η₂) はアーチ・クラウンにおける曲げモーメントの鉛直面内におけるつり合い, すなわち,

$$[M_{y_1} - M_{z_1} \cdot \tan \Phi]_{\theta_1=\alpha} + [-M_{y_2} + \tan \Phi \cdot M_{z_2}]_{\theta_2=0} = 0$$

より, また式 (6.20・η₂) はせん断力の鉛直成分のつり合い, すなわち,

$$[S_{y_1} + S_{z_1} \cdot \tan \Phi]_{\theta_1=\alpha} + [-S_{y_2} - S_{z_2} \cdot \tan \Phi]_{\theta_2=0} = 0$$

から導かれる。

(iv) 対称座屈の場合

$$\theta_2=0; d\psi_2/d\theta_2=0, \quad \varphi_2=0, \quad \psi_2 - \tan \Phi \cdot \xi_2=0,$$

$$d\xi_2/d\theta_2=0,$$

また,

$$- \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} + \frac{F_3}{F_4} \tan \Phi \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0}$$

$$+ \tan \Phi \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} - \tan \Phi \left(\frac{d^3\psi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} = 0.$$

ここで, 最後の条件式は,

$$(S_{y_2})_{\theta_2=0} + (S_{z_2})_{\theta_2=0} \cdot \tan \Phi = 0$$

から見出される。

なおまた, さきにも述べたように, 以上5つの式のほかに, 式 (6.6) ~ (6.10) のみを用いればよい。

(v) ξ 座屈の場合

$$\theta_1=\alpha; d\xi_1/d\theta_1=0 \cdots (6.11 \cdot \xi),$$

$$d\psi_1/d\theta_1=0 \cdots (6.12 \cdot \xi)$$

$$\theta_2=0; d\xi_2/d\theta_2=0 \cdots (6.13 \cdot \xi),$$

$$d\psi_2/d\theta_2=0 \cdots (6.14 \cdot \xi)$$

また,

$$(\varphi_1)_{\theta_1=\alpha} + (\varphi_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.15 \cdot \xi)$$

アーチ・クラウンで,

$$\xi_1 = \psi_2 \cdot \sin 2\Phi + \xi_2 \cdot \cos 2\Phi \cdots (6.16 \cdot \xi),$$

$$\psi_1 = -\psi_2 \cos 2\Phi + \xi_2 \cdot \sin 2\Phi \cdots (6.17 \cdot \xi)$$

さらに,

$$(d\varphi_1/d\theta_1)_{\theta_1=\alpha} + (d\varphi_2/d\theta_2)_{\theta_2=0} = 0 \cdots (6.18 \cdot \xi)$$

$$- \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_1}{d\theta_1^3} \right)_{\theta_1=\alpha} + \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0}$$

$$+ \tan \Phi \left[- \left(\frac{d^3\psi_1}{d\theta_1^3} \right)_{\theta_1=\alpha} + \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} \right.$$

$$\left. + \frac{F_3}{F_4} \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta_1} \right)_{\theta_1=\alpha} + \left(\frac{d^3\psi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} - \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{F_3}{F_4} \left(\frac{d\varphi_2}{d\theta_2} \right)_{\theta_2=0} = 0 \dots (6.19 \cdot \xi) \\
 & -\left(\frac{d^3\psi_1}{d\theta_1^3} \right)_{\theta_1=\alpha} - \left(\frac{d^3\psi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} \\
 & + \tan \phi \left[\frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_1}{d\theta_1^3} \right)_{\theta_1=\alpha} + \frac{R^2 \cdot F_2}{F_4} \left(\frac{d^3\xi_2}{d\theta_2^3} \right)_{\theta_2=0} \right] \\
 & = 0 \dots (6.20 \cdot \xi)
 \end{aligned}$$

ここで、とくに最後の式 (6.19・ξ), (6.20・ξ) については、アーチ・クラウンでの、つぎのつり合いを考えて見いだされる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 (S_{y1})_{\theta_1=\alpha} - (S_{y2})_{\theta_2=0} + \tan \phi \{ (S_{z1})_{\theta_1=\alpha} - (S_{z2})_{\theta_2=0} \} &= 0 \\
 (S_{z1})_{\theta_1=\alpha} + (S_{z2})_{\theta_2=0} - \tan \phi \{ (S_{y1})_{\theta_1=\alpha} + (S_{y2})_{\theta_2=0} \} &= 0
 \end{aligned}$$

また、さらに式 (6.18・ξ) は、アーチ・クラウンでの

$$(M_{x1})_{\theta_1=\alpha} + (M_{x2})_{\theta_2=0} = 0$$

から見いだされる。

② 座屈の基本式

荷重が P_{cr} に達した状態すなわちアーチが座屈変形を起こした状態で、アーチが平衡を保っている条件を吟味してみる。すなわち c) において、座屈変形を考えて求めた式 (5) のポテンシャル・エネルギー W が最小であるべきこと、いいかえれば変分 $\delta W = 0$ なる条件式より座屈変形の満足すべき基本式が、つぎのように導かれる。まず変分法より、

$$-\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi'} \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \psi''} \right) = 0 \dots (7.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi'} \right) = 0 \dots (7.2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial v''} \right) = 0 \dots (7.3)$$

.....(7)

ただし添字 1, 2 は省略してある。ところで N_0 は式 (3) において与えられているが、近似的に $N_0 \approx -pR$ とすることにする。したがって、式 (5), (7) よりつぎの式 (8) のような微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & F_4 \frac{d^4\psi}{d\theta^4} - (F_3 + N_{cr}R) \frac{d^2\psi}{d\theta^2} - (F_3 + F_4) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \\
 & = \frac{d}{d\theta} M_{x0} + \frac{d^2}{d\theta^2} M_{y0} = 0 \dots (8.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (F_3 + F_4) \frac{d^2\psi}{d\theta^2} + F_3 \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - F_4\varphi \\
 & = -\frac{d}{d\theta} M_{x0} + M_{y0} = 0 \dots (8.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_2 \frac{d^4v}{d\theta^4} + \left(2F_2 - \frac{N_{cr}}{R} \right) \frac{d^2v}{d\theta^2} + \left(F_2 - \frac{N_{cr}}{R} \right) \cdot v \\
 & = \frac{1}{R} \left(M_{z0} + \frac{d^2}{d\theta^2} M_{z0} \right) = -C_5 F_2 \dots (8.3)
 \end{aligned}$$

.....(8)

ここで、アーチの座屈の特性を知るため、また解に一般性を与えるために、つぎのような断面の剛性に関する無次元量をパラメーターとして導入することとする。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{F_3}{F_4} = \frac{GJ_T}{EI_y} \equiv h, \quad \frac{N_{cr}R}{F_4} = \frac{N_{cr}R^2}{EI_y} \equiv F, \\
 \frac{R^2 F_2}{F_4} = \frac{EI_z}{EI_y} \equiv g
 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

したがって座屈荷重

$$N_{cr} (\equiv -P_{cr}R) = F \frac{EI_y}{R^2}$$

となり、式 (9) および既述の $v/R \equiv \xi$ を用いれば、式 (8) はつぎようになる。

$$\frac{d^4\psi}{d\theta^4} - (h+F) \frac{d^2\psi}{d\theta^2} - (h+1) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = 0 \dots (10.1)$$

$$(h+1) \frac{d^2\psi}{d\theta^2} + h \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \varphi = 0 \dots (10.2)$$

$$g \frac{d^4\xi}{d\theta^4} + (2g-F) \frac{d^2\xi}{d\theta^2} + (g-F)\xi = -C_5 \frac{g}{R}$$

.....(10.3)

.....(10)

つぎに式 (10) を解くのに、まず式 (10.1), (10.2) から φ のみの微分方程式を求めると、

$$\beta_1 \frac{d^4\varphi}{d\theta^4} + \beta_2 \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + \beta_3\varphi = 0$$

となり、したがって、特性方程式は

$$\beta_1\lambda^4 + \beta_2\lambda^2 + \beta_3 = 0$$

となる。ここで、 h, F, g の工学上の数値を考慮すれば、 φ の式および、ひき続いて求められる ψ の値はそれぞれつぎの式 (11.1), (11.2) のようになる。

$$\varphi = A_1 e^{\lambda_1\theta} + A_2 e^{\lambda_2\theta} + A_3 \sin \lambda_3\theta + A_4 \cos \lambda_3\theta \dots (11.1)$$

$$\psi = r_1 A_1 e^{\lambda_1\theta} + r_2 A_2 e^{\lambda_2\theta} + r_3 A_3 \sin \lambda_3\theta + r_4 A_4 \cos \lambda_3\theta + A_5\theta + A_6 \dots (11.2)$$

ここに、 A_1, A_2, \dots, A_6 は積分定数で、 $\beta_1, \dots, \lambda_1, \dots, r_1, \dots$ などは、つぎのとおりである。

$$\beta_1 = h, \quad \beta_2 = 2h - hF, \quad \beta_3 = h + F,$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3}}{2\beta_1}},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3}}{2\beta_1}},$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{+\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3}}{2\beta_1}},$$

$$r_1 = \frac{-h\lambda_1^2 + 1}{(h+1)\lambda_1^2}, \quad r_2 = \frac{-h\lambda_2^2 + 1}{(h+1)\lambda_2^2}$$

$$r_3 = \frac{-h\lambda_3^2 - 1}{(h+1)\lambda_3^2}$$

また式 (10.3) から ξ を求めると、

$$\xi = B_1 \sin K_3\theta + B_2 \cos K_3\theta + B_3 \sin \theta + B_4 \cos \theta + B_5 \dots (11.3)$$

ここに、 B_1, B_2, B_3, B_4 は積分定数で、また $K_3 = \sqrt{1-F/g}$ である。また B_5 は式 (10.3) の特解であり、座屈前の応力状態から定まる定数である。

なおうえで述べてきた微分方程式の解は数式のうえか

らは $h < |F|$ でなければ虚根となつて解は求められないが、工学上の h, F の値から考察するに、かかる考慮は実用上払ふ必要はない (h の値については、たとえば文献 1)-5. が参考となる)。

なお積分定数の記号として、 φ_1, ψ_1, ξ_1 に対しては、 $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_4$ ととり、 φ_2, ψ_2, ξ_2 に対しては $A_1', \dots, A_6', B_1', \dots, B_4'$ ととることとする。

さてここで $\xi_1, \psi_1, \varphi_1, \xi_2, \psi_2, \varphi_2$ の解、式 (11.1) ~ (11.3) を、さきに **d**)-④ で述べた境界条件に代入すれば、20 元連立 1 次式 (対称座屈の場合は 10 元 1 次)

が得られる (式 (12) 参照)。しかし、この場合方程式右辺が 0 でない場合が現われる。そこでいま、その方程式系の分母行列式 d が 0 でない場合には、積分定数 $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_4, A_1', \dots, A_6', B_1', \dots, B_4'$ がある確定した値を取ることになる。しかるに座屈時の変形は任意の大きさを取ることができるということを考慮すれば、すなわち積分定数 A_1, \dots, B_4' が任意の値を取るべきだから、 d は 0 でなければならない⁴⁾。したがって、つぎのような座屈条件式が得られる。

ここでは座屈の場合のみ列挙するにとどめる。

方程式の番号	方程式左辺の係数																					
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B_1	B_2	B_3	B_4	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'	A_5'	A_6'	B_1'	B_2'	B_3'	B_4'		
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	$a_{1,4}$	0	$a_{1,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	$a_{2,5}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	0	$a_{3,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	$a_{4,8}$	0	$a_{4,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	0	$a_{5,8}$	0	$a_{5,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{6,11}$	$a_{6,12}$	$a_{6,13}$	$a_{6,14}$	$a_{6,15}$	$a_{6,16}$	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{7,11}$	$a_{7,12}$	$a_{7,12}$	$a_{7,14}$	$a_{7,15}$	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{8,11}$	$a_{8,12}$	$a_{8,13}$	$a_{8,14}$	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{9,17}$	$a_{9,18}$	$a_{9,19}$	$a_{9,20}$	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{10,17}$	$a_{10,18}$	$a_{10,19}$	$a_{10,20}$	0	0
11	$a_{11,1}$	$a_{11,2}$	$a_{11,3}$	$a_{11,4}$	$a_{11,5}$	$a_{11,6}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	$a_{12,1}$	$a_{12,2}$	$a_{12,3}$	$a_{12,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	$a_{13,7}$	$a_{13,8}$	$a_{13,9}$	$a_{13,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	$a_{14,1}$	$a_{14,2}$	$a_{14,3}$	$a_{14,4}$	$a_{14,5}$	0	$a_{14,7}$	$a_{14,8}$	$a_{14,9}$	$a_{14,10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{15,11}$	$a_{15,12}$	0	$a_{15,14}$	0	$a_{15,16}$	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{16,11}$	$a_{16,12}$	0	$a_{16,14}$	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{17,18}$	0	$a_{17,20}$	
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$a_{18,11}$	$a_{18,12}$	$a_{18,13}$	0	$a_{18,15}$	0	$a_{18,17}$	0	$a_{18,19}$	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	$a_{19,7}$	$a_{19,8}$	$a_{19,9}$	$a_{19,10}$	0	0	0	0	0	0	$a_{19,17}$	0	$a_{19,19}$	0	0	0
20	$a_{20,1}$	$a_{20,2}$	$a_{20,3}$	$a_{20,4}$	0	0	$a_{20,7}$	$a_{20,8}$	$a_{20,9}$	$a_{20,10}$	$a_{20,11}$	$a_{20,12}$	0	$a_{20,14}$	0	0	0	$a_{20,18}$	0	$a_{20,20}$	0	0

= 0

.....(12)

ここで、

$$\begin{aligned}
 &a_{1,1} = r_1, \quad a_{1,2} = r_2, \quad a_{1,4} = r_3, \quad a_{1,6} = 1, \\
 &a_{2,1} = r_1 \cdot \lambda_1, \quad a_{2,2} = r_2 \cdot \lambda_2, \quad a_{2,3} = r_3 \cdot \lambda_3, \quad a_{2,5} = 1, \\
 &a_{3,1} = 1, \quad a_{3,2} = 1, \quad a_{3,4} = 1, \\
 &a_{4,8} = 1, \quad a_{4,10} = 1, \\
 &a_{5,8} = 1, \quad a_{5,10} = 1, \\
 &a_{6,11} = r_1 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{6,12} = r_2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{6,13} = r_3 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, \quad a_{6,14} = r_3 \cdot \cos \lambda_3 \alpha, \quad a_{6,15} = \alpha, \quad a_{6,16} = 1, \\
 &a_{7,11} = r_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{7,12} = r_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{7,13} = r_3 \cdot \lambda_3 \cdot \cos \lambda_3 \alpha, \quad a_{7,14} = -r_3 \cdot \lambda_3 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, \quad a_{7,15} = 1, \\
 &a_{8,11} = e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{8,12} = e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{8,13} = \sin \lambda_3 \alpha, \quad a_{8,14} = \cos \lambda_3 \alpha, \\
 &a_{9,17} = \sin K_3 \alpha, \quad a_{9,18} = \cos K_3 \alpha, \quad a_{9,19} = \sin \alpha, \quad a_{9,20} = \cos \alpha, \\
 &a_{10,17} = -K_3^2 \cdot \sin K_3 \alpha, \quad a_{10,18} = -K_3^2 \cdot \cos K_3 \alpha, \quad a_{10,19} = -\sin \alpha, \quad a_{10,20} = -\cos \alpha, \\
 &a_{11,1} = r_1 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{11,2} = r_2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{11,3} = r_3 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, \quad a_{11,4} = r_3 \cdot \cos \lambda_3 \alpha, \quad a_{11,5} = \alpha, \quad a_{11,6} = 1, \\
 &a_{12,1} = e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{12,2} = e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{12,3} = \sin \lambda_3 \alpha, \quad a_{12,4} = \cos \lambda_3 \alpha, \\
 &a_{13,7} = \sin K_3 \alpha, \quad a_{13,8} = \cos K_3 \alpha, \quad a_{13,9} = \sin \alpha, \quad a_{13,10} = \cos \alpha, \\
 &a_{14,1} = -\cot \Phi \cdot r_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{14,2} = -\cot \Phi \cdot r_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{14,3} = -\cot \Phi \cdot r_3 \cdot \lambda_3 \cdot \cos \lambda_3 \alpha, \quad a_{14,4} = \cot \Phi \cdot r_3 \cdot \lambda_3 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, \\
 &\quad a_{14,5} = -\cot \Phi, \quad a_{14,7} = K_3 \cdot \cos K_3 \alpha, \quad a_{14,8} = -K_3 \cdot \sin K_3 \alpha, \quad a_{14,9} = \cos \alpha, \quad a_{14,10} = -\sin \alpha, \\
 &a_{15,11} = r_1, \quad a_{15,12} = r_2, \quad a_{15,14} = r_3, \quad a_{15,16} = 1, \\
 &a_{16,11} = 1, \quad a_{16,12} = 1, \quad a_{16,14} = 1, \\
 &a_{17,18} = 1, \quad a_{17,20} = 1, \\
 &a_{18,11} = -\cot \Phi \cdot r_1 \cdot \lambda_1, \quad a_{18,12} = -\cot \Phi \cdot r_2 \cdot \lambda_2, \quad a_{18,13} = -\cot \Phi \cdot r_3 \cdot \lambda_3, \quad a_{18,15} = -\cot \Phi, \quad a_{18,17} = K_3, \quad a_{18,19} = 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{19,7} &= K_3 \cdot \cos K_3 \alpha, & a_{19,8} &= -K_3 \cdot \sin K_3 \alpha, & a_{19,9} &= \cos \alpha, & a_{19,10} &= -\sin \alpha, & a_{19,17} &= -K_3, & a_{19,19} &= -1, \\
 a_{20,1} &= -r_1 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, & a_{20,2} &= -r_2 \cdot \lambda_2^2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, & a_{20,3} &= r_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, & a_{20,4} &= r_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot \cos \lambda_3 \alpha, \\
 a_{20,7} &= g \cdot \cot \Phi \cdot K_3^2 \cdot \sin K_3 \alpha, & a_{20,8} &= g \cdot \cot \Phi \cdot K_3^2 \cdot \cos K_3 \alpha, & a_{20,9} &= g \cdot \cot \Phi \cdot \sin \alpha, & a_{20,10} &= g \cdot \cot \Phi \cdot \cos \alpha, \\
 a_{20,11} &= r_1 \cdot \lambda_1^2, & a_{20,12} &= r_2 \cdot \lambda_2^2, & a_{20,14} &= -r_3 \cdot \lambda_3^2, & a_{20,18} &= -g \cdot \cot \Phi \cdot K_3^2, & a_{2,20} &= -g \cdot \cot \Phi
 \end{aligned}$$

結局座屈条件式(12)を満足する F の値を見出せば、 ζ 座屈値が求められることになる。対称座屈, η 座屈, ξ 座屈についても同様にして求められるので、それらについては、最後の計算結果のみ 3. において若干述べることにする。

3. 数値計算による座屈値の検討

2. の(2)で求めた式(12)のごとき座屈条件式より、座屈値を算定するに当っては、まずどの座屈形が、最も支配的座屈荷重を与えるかに注目してみる。さらに各座屈形の座屈値 $F \equiv N_{cr} R^2 / EI_y$ 、あるいは $F' = N_{cr} l^2 / EI_y$ 、($F' = 4 F \cdot \sin^2 \alpha$)に影響するパラメーターは、テーパー Φ , $g = EI_z / EI_y$, $h = GJ_T / EI_y$, f/l の4つであるが、このうちでは、とくに Φ の影響に着目し、また $g=1.0$, $h=2/2.6$ (ポアソン比 0.3 とする) すなわちパイプ断面の場合をまず主体として考察する。電子計算機で数値計算をさせた結果は、およそつぎのようである。

1) パイプ断面の場合座屈形 ζ, η , 対称, ξ に対応した座屈値を図-9 に示している。図からとくにわかることは、 ζ, ξ 座屈を、最も注目すべきであること、またとくに ζ 座屈は Φ の増加に伴って座屈値・耐荷力も増大すること、また対称座屈は、ここで考えた荷重の載荷状態では、テーパー Φ による影響は見られないことである。

2) いま 図-9 に示す ζ 座屈値を外径 $D=50$ cm, 肉厚 $t=1$ cm の鋼パイプ断面で、支間 $l=60$ m, ライズ $f=10$ m, アーチ半径 50 m の場合に適用してみると、座屈荷重 N_{cr} はつぎの表-1 のような値をとることになる。

図-9 各座屈変形に対応した座屈値 ($g=1, h=2/2.6, f/l=1/6$)

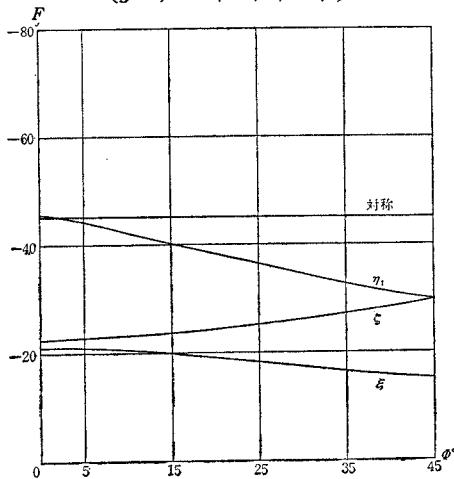


表-1 ζ 座屈荷重

Φ°	0	1	5	10	20	30	40	45
N_{cr} (ton)	88.63	88.64	89.03	90.02	94.03	100.71	109.80	115.15

3) 図-10 には、パイプ断面の場合の ζ 座屈値が f/l および Φ による変化が示されている。

4) 図-11 は対称座屈値をパイプ断面の場合、 f/l の変化で示したものである。1) でも述べたように、テーパー Φ には関係しない。このことはつぎの 4. で u の項を考慮しても、同じことがいえる。

つぎにパイプ ($g=1.0, h=2/2.6$) 以外の断形面にも関連して若干の考察をしてみる。

図-10 ζ 座屈値 ($g=1, h=2/2.6$)

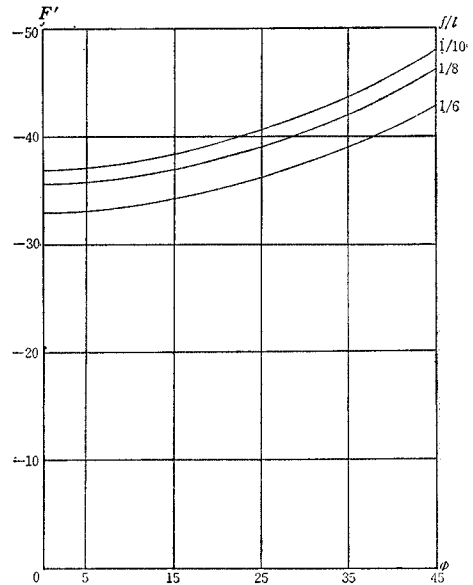


図-11 対称座屈値 ($g=1, h=2/2.6$)

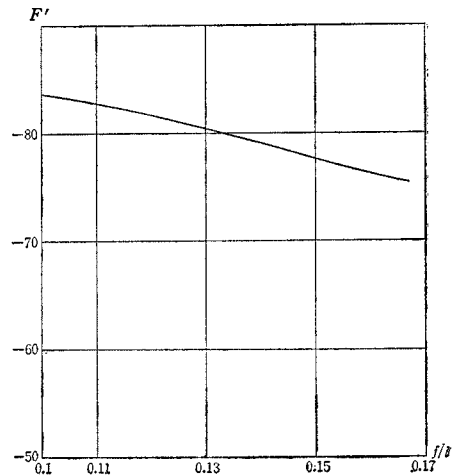


図-12 対称座屈値

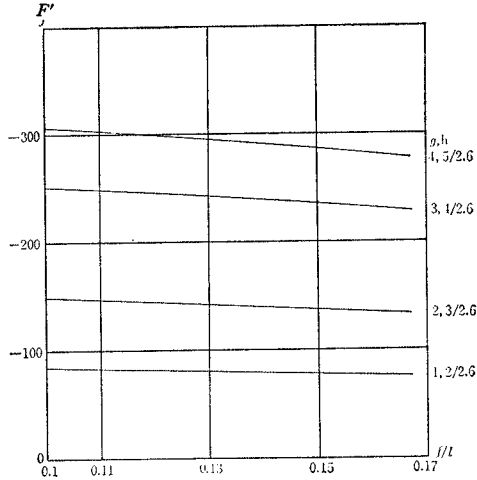


図-13 ζ 座屈値 ($\phi=10^\circ$)

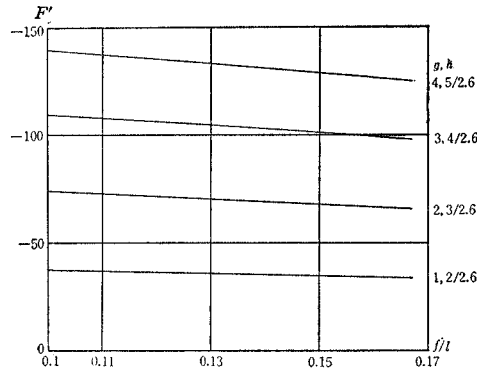
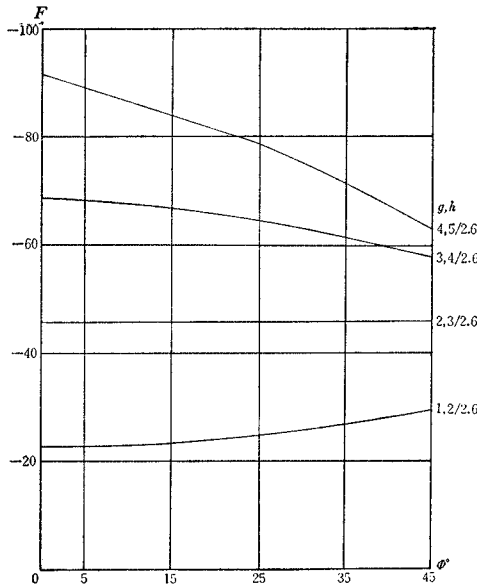


図-14 ζ 座屈値 ($f/l=1/6$)



えて示したものであるが、 g, h のとり方によっては、 ϕ の増加は F の増加する場合あるいは減少、またほとんど変わらない場合を与えることを明らかにしている。

7) 表-2, 3 はとくに g に対応して h を変化させた場合に注目して (ここでは h の小さい場合を考えてみる)、 ζ 座屈値を考察したものである。表から明らかのように、 h の影響は ϕ が小さければ影響は小さいが、 ϕ の増加に伴って影響がみられる。また 6) でも述べたように、 g, h の値によっては ϕ の増加は、 F の増加、減少、ほぼ一定の値をとることも明らかに示している。また表-4 は ξ 座屈値を示している。

表-2 ζ 座屈値 (F' 値)

g	h	f/l	ϕ°				
			0	10	20	30	45
1	2/2.6	1/6	-22.83	-23.19	-24.22	-25.94	-29.66
	0.01	1/6	-22.83	-22.80	-22.66	-21.41	-21.88
	0.001	1/6	-22.83	-22.89	-23.11	-23.32	-23.71
2	3/2.6	1/6	-45.60	-45.68	-45.70	-45.73	-45.81
	0.01	1/6	-45.65	-44.75	-42.38	-39.13	-33.37

表-3 ζ 座屈値 (F' 値) ($\phi=10^\circ$)

g	h	f/l				
		1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
1	2/2.6	-33.39	-35.02	-36.10	-36.84	-37.44
	0.01	-32.83	-34.46	-35.64	-36.52	-37.08
	0.001	-32.96	-30.89	-34.20	-35.47	-36.21
2	3/2.6	-65.78	-68.93	-71.09	-72.64	-73.78
	0.01	-64.44	-67.81	-70.69	-71.83	-73.08

表-4 ζ 座屈値 (F' 値)

g	h	f/l	ϕ°			
			1	10	30	45
1	2/2.6	1/6	-21.08	-20.67	-17.30	-15.30
2	3/2.6	1/6	-21.38	-21.04	-18.84	-16.13

以上から考察して総合すれば、面内中心方向荷重が載荷した場合、テーパのついたアーチの座屈値の支配的変形モードは、解析的には、図-9 からみても、 ξ 座屈形が支配的であることを示してはいる。しかし通常のアーチ構造の場合は、スラットなどで横方向の安定は増強されているから、一般的にみて、まず面外の不安定性の卓越する ξ 変形より、むしろ面内変形の卓越する ζ 変形の方が起こりやすい条件が満足されやすいと考えられるから、 ξ 座屈より ζ 座屈に着目し、実際の通常スパンの構造設計においては問題とすべきであると考えられよう。なおテーパ ϕ をつければ、問題とすべき ζ 座屈値は大きくなる。すなわち耐荷力は増大して、よい結果をもたらすが、部材断面寸法によっては ϕ をつけることにより耐荷力が減少することもあることは注意を要するだろう。

5) 図-12, 図-13 は f/l による座屈値の推移を、 g, h の変化をも合わせて考察したものである。

6) 図-14 は ζ 座屈値を ϕ の変化と、 g, h をも変

4. 若干の修正を試みた座屈値について

2. における (2) の e) でのポテンシャル・エネルギーの算定の際、一応省略して考えておいた、材軸方向の変形によるひずみエネルギーの増加および軸力 N_0 の材軸方向のひずみの考慮によりなす仕事をつけ加え、さらに式 (1.3) の ρ_z はアーチの軸方向の伸びひずみ ϵ_x を微小として無視した式であるが、これを修正して、

$$\rho_z = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta} \right) \dots\dots\dots(1.3)'$$

として計算をしてみることにする。

かくして、式 (5) のかわりに、つぎの式 (5)' がえられる。

$$\begin{aligned} W = & \int_0^\alpha \left\{ \frac{1}{2} F_3 \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} F_4 \left(\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \varphi \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} F_2 \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} F_1 \left(\frac{du}{d\theta} - v \right)^2 \\ & + M_{x0} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\psi}{d\theta} \right) - M_{y0} \left(\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - \varphi \right) \\ & - \frac{M_{z0}}{R} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta} \right) + N_0 \left(\frac{du}{d\theta} - v \right) \\ & \left. - \frac{N_0}{2R} \left(\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{du}{d\theta} \right) \cdot v - \frac{1}{2} \rho R^2 \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 \right\} d\theta \end{aligned} \dots\dots\dots(5)'$$

添字 1, 2 は省略してある。

つぎに座屈基本式を誘導してみる。まず境界条件としては、最も重視すべき座屈の場合にのみ言及すれば、その場合は、

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0; \eta_1 = 0 \dots (6.21 \cdot \zeta), \\ \theta_1 &= \alpha; d\eta_1/d\theta_1 = 0 \dots (6.22 \cdot \zeta), \\ \theta_2 &= 0; d\eta_2/d\theta_2 = 0 \dots (6.23 \cdot \zeta), \\ \theta_2 &= \alpha; \eta_2 = 0 \dots (6.24 \cdot \zeta) \end{aligned}$$

の4つの式をつけ加えなければならない。ここで、

$$\eta \equiv u/R$$

式 (7) においては

$$d/d\theta \cdot \theta \cdot W/\theta u' = 0 \dots\dots\dots(7.4)$$

をつけ加えて考えればよい。なお、面外変形に関連する φ, ψ には全然変化がなく、面内変形 u, v の関連のみ計算の修正をして行けばよい。

さて、式 (5)' と式 (7.3) より式 (8.3)' が、また式 (5)' と式 (7.4) から式 (8.4) が得られる。

$$\begin{aligned} F_2 \frac{d^4v}{d\theta^4} - \frac{N_{cr}}{R} \frac{d^2v}{d\theta^2} + F_1 v + F_2 \frac{d^3u}{d\theta^3} \\ - \left(F_1 + \frac{N_{cr}}{2R} \right) \frac{du}{d\theta} - \frac{d^2 N_{cr}}{d\theta^2} \frac{v}{2R} \\ = N_0 + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{M_{z0}}{R} = -\rho R \dots\dots\dots(8.3)' \\ F_2 \frac{d^3v}{d\theta^3} - \left(F_1 + \frac{N_{cr}}{2R} \right) \frac{dv}{d\theta} + (F_1 + F_2) \frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned}$$

$$- \frac{dN_{cr}}{d\theta} \frac{v}{2R} = \frac{dM_{z0}}{d\theta} \frac{1}{R} - \frac{dN_0}{d\theta} = 0 \dots\dots(8.4)$$

ここで、また式 (9) で表わす無次元量に $R^2 EA/EI_y \equiv m$ なる量を導入すれば、式 (8.3)', (8.4) から ξ に関するつぎのような方程式が得られる。

$$\begin{aligned} m \cdot g \frac{d^5\xi}{d\theta^5} + (-F \cdot m + 2m \cdot g) \frac{d^3\xi}{d\theta^3} \\ + \left(m \cdot g - F \cdot m - \frac{1}{4} F^2 \right) \frac{d\xi}{d\theta} = 0 \end{aligned}$$

これを工学上の数値を考慮して解けば、

$$\begin{aligned} \xi = B_1 \cos \lambda_1 \theta + B_2 \sin \lambda_1 \theta + B_3 \cos \lambda_2 \theta \\ + B_4 \sin \lambda_2 \theta + B_5 \dots\dots\dots(11.3) \end{aligned}$$

となり、結局 η もつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} \eta = B_1 \cdot \sin \lambda_1 \theta \left(b_1 \lambda_1^3 + b_2 \lambda_1 + \frac{b_3}{\lambda_1} \right) \\ - B_2 \cdot \cos \lambda_1 \theta \left(b_1 \lambda_1^3 + b_2 \lambda_1 + \frac{b_3}{\lambda_1} \right) \\ + B_3 \cdot \sin \lambda_2 \theta \left(b_1 \lambda_2^3 + b_2 \lambda_2 + \frac{b_3}{\lambda_2} \right) \\ - B_4 \cdot \cos \lambda_2 \theta \left(b_1 \lambda_2^3 + b_2 \lambda_2 + \frac{b_3}{\lambda_2} \right) \\ + B_5 \cdot b_3 \cdot \theta + B_6 + (F_1 + F_2) \rho \cdot \theta \dots\dots\dots(11.4) \end{aligned}$$

ここで B_1, \dots, B_6 は積分定数で、 λ_1, \dots, b_3 などはつぎのとおりである。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1}}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1}}, \end{aligned}$$

で、

$$\begin{aligned} a_1 &= mg, \quad a_2 = -Fm + 2mg, \\ a_3 &= mg - Fm - \frac{1}{4} F^2 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{mg}{m^2 + \frac{Fm}{2} + mg + \frac{Fg}{2}}, \\ b_2 &= \frac{Fm + \frac{Fg}{2} - mg}{m^2 + \frac{Fm}{2} + mg + \frac{Fg}{2}}, \\ b_3 &= \frac{1}{1 + \frac{F}{2m}} \end{aligned}$$

なお、この場合も式 (11.4) の最形の項は 2. における (2) の d) のときと同じように座屈条件式には関係してこない。

つぎに座屈条件式 (12) のうち変更すべき値のみ列挙しておくことにする。なお式 (12) で、 a_{ij} の記号は、 $j=11$ 以上は $j=n+2$, ($11 \leq n \leq 20$) と変更を要する。

方程式の番号	座屈条件式 (修正分のみ)																								
	方程式左辺の係数																								
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	B ₆	A' ₁	A' ₂	A' ₃	A' ₄	A' ₅	A' ₆	B' ₁	B' ₂	B' ₃	B' ₄	B' ₅	B' ₆	
4	0	0	0	0	0	0	a _{4,7}	0	a _{4,9}	0	a _{4,11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	a _{5,7}	0	a _{5,9}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{9,19}	a _{9,20}	a _{9,21}	a _{9,22}	a _{9,23}	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{10,19}	a _{10,20}	a _{10,21}	a _{10,22}	0	0
13	0	0	0	0	0	0	a _{13,7}	a _{13,8}	a _{13,9}	a _{13,10}	a _{13,11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	a _{14,1}	a _{14,2}	a _{14,3}	a _{14,4}	a _{14,5}	0	a _{14,7}	a _{14,8}	a _{14,9}	a _{14,10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{17,19}	0	a _{17,21}	0	a _{17,23}	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{18,13}	a _{18,14}	a _{18,15}	0	a _{18,17}	0	0	a _{18,20}	0	a _{18,22}	0	0	
19	0	0	0	0	0	0	a _{19,7}	a _{19,8}	a _{19,9}	a _{19,10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{19,20}	0	a _{19,22}	0	0
20	a _{20,1}	a _{20,2}	a _{20,3}	a _{20,4}	0	0	a _{20,7}	a _{20,8}	a _{20,9}	a _{20,10}	0	0	a _{20,13}	a _{20,14}	0	a _{20,16}	0	0	a _{20,19}	0	a _{20,21}	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	a _{21,8}	0	a _{21,10}	0	0	a _{21,12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	a _{22,7}	a _{22,8}	a _{22,9}	a _{22,10}	a _{22,11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{23,19}	0	a _{23,21}	0	a _{23,23}	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a _{24,19}	a _{24,20}	a _{24,21}	a _{24,22}	a _{24,23}	a _{24,24}

ここで、

$$\begin{aligned}
 &a_{4,7}=1, \quad a_{4,9}=1, \quad a_{4,11}=1, \\
 &a_{5,7}=-\lambda_1^2, \quad a_{5,9}=-\lambda_2^2, \\
 &a_{9,19}=\cos \lambda_1 \alpha, \quad a_{9,20}=\sin \lambda_1 \alpha, \quad a_{9,21}=\cos \lambda_2 \alpha, \quad a_{9,22}=\sin \lambda_2 \alpha, \quad a_{9,23}=1, \\
 &a_{10,19}=-\lambda_1^2 \cdot \cos \lambda_1 \alpha, \quad a_{10,20}=-\lambda_1^2 \cdot \sin \lambda_1 \alpha, \quad a_{10,21}=-\lambda_2^2 \cdot \cos \lambda_2 \alpha, \quad a_{10,22}=-\lambda_2^2 \cdot \sin \lambda_2 \alpha, \\
 &a_{13,7}=\cos \lambda_1 \alpha, \quad a_{13,8}=\sin \lambda_1 \alpha, \quad a_{13,9}=\cos \lambda_2 \alpha, \quad a_{13,10}=\sin \lambda_2 \alpha, \quad a_{13,11}=1, \\
 &a_{14,1}=-\cot \Phi \cdot \tau_1 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{14,2}=-\cot \Phi \cdot \tau_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{14,3}=-\cot \Phi \cdot \tau_3 \cdot \lambda_3 \cos \lambda_3 \alpha, \quad a_{14,4}=\cot \Phi \cdot \tau_3 \cdot \lambda_3 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, \\
 &a_{14,5}=-\cot \Phi, \quad a_{14,7}=-\lambda_1 \cdot \sin \lambda_1 \alpha, \quad a_{14,8}=\lambda_1 \cdot \cos \lambda_1 \alpha, \quad a_{14,9}=-\lambda_2 \cdot \sin \lambda_2 \alpha, \quad a_{14,10}=\lambda_2 \cdot \cos \lambda_2 \alpha, \\
 &a_{17,19}=1, \quad a_{17,21}=1, \quad a_{17,23}=1, \\
 &a_{18,13}=-\cot \Phi \cdot \tau_1 \cdot \lambda_1, \quad a_{18,14}=-\cot \Phi \cdot \tau_2 \cdot \lambda_2, \quad a_{18,15}=-\cot \Phi \cdot \tau_3 \cdot \lambda_3, \quad a_{18,17}=-\cot \Phi, \quad a_{18,20}=\lambda_1, \quad a_{18,22}=\lambda_2, \\
 &a_{19,7}=-\lambda_1 \cdot \sin \lambda_1 \alpha, \quad a_{19,8}=\lambda_1 \cdot \cos \lambda_1 \alpha, \quad a_{19,9}=-\lambda_2 \cdot \sin \lambda_2 \alpha, \quad a_{19,10}=\lambda_2 \cdot \cos \lambda_2 \alpha, \quad a_{19,20}=-\lambda_1, \quad a_{19,22}=-\lambda_2, \\
 &a_{20,1}=-\tau_1 \cdot \lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 \alpha}, \quad a_{20,2}=-\tau_2 \cdot \lambda_2^2 \cdot e^{\lambda_2 \alpha}, \quad a_{20,3}=\tau_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot \sin \lambda_3 \alpha, \quad a_{20,4}=\tau_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot \cos \lambda_3 \alpha, \\
 &a_{20,7}=g \cdot \cot \Phi \cdot \lambda_1^2 \cdot \cos \lambda_1 \alpha, \quad a_{20,8}=g \cdot \cot \Phi \cdot \lambda_1^2 \cdot \sin \lambda_1 \alpha, \quad a_{20,9}=g \cdot \cot \Phi \cdot \lambda_2^2 \cdot \cos \lambda_2 \alpha, \\
 &a_{20,10}=g \cdot \cot \Phi \cdot \lambda_2^2 \cdot \sin \lambda_2 \alpha, \quad a_{20,13}=\tau_1 \cdot \lambda_1^2, \quad a_{20,14}=\tau_2 \cdot \lambda_2^2, \quad a_{20,16}=-\tau_3 \cdot \lambda_3^2, \quad a_{20,19}=-g \cdot \cot \Phi \cdot \lambda_1^2, \\
 &a_{20,21}=-g \cdot \cot \Phi \cdot \lambda_2^2, \\
 &a_{21,8}=-b_1 \cdot \lambda_1^3 - b_2 \cdot \lambda_1 - b_3 / \lambda_1, \quad a_{21,10}=-b_1 \cdot \lambda_2^3 - b_2 \cdot \lambda_2 - b_3 / \lambda_2, \quad a_{21,12}=1, \\
 &a_{22,7}=\cos \lambda_1 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_1^4 + b_2 \cdot \lambda_2^2 + b_3), \quad a_{22,8}=\sin \lambda_1 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_1^4 + b_2 \cdot \lambda_1^2 + b_3), \quad a_{22,9}=\cos \lambda_2 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_2^4 + b_2 \cdot \lambda_2^2 + b_3), \\
 &a_{22,10}=\sin \lambda_2 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_2^4 + b_2 \cdot \lambda_2^2 + b_3), \quad a_{22,11}=b_3, \\
 &a_{23,19}=b_1 \cdot \lambda_1^4 + b_2 \cdot \lambda_1^2 + b_3, \quad a_{23,21}=b_1 \cdot \lambda_2^4 + b_2 \cdot \lambda_2^2 + b_3, \quad a_{23,23}=b_3, \\
 &a_{24,19}=\sin \lambda_1 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_1^3 + b_2 \cdot \lambda_1 + b_3 / \lambda_1), \quad a_{24,20}=-\cos \lambda_1 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_1^3 + b_2 \cdot \lambda_1 + b_3 / \lambda_1), \\
 &a_{24,21}=\sin \lambda_2 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_2^3 + b_2 \cdot \lambda_2 + b_3 / \lambda_2), \quad a_{24,22}=-\cos \lambda_2 \alpha \cdot (b_1 \cdot \lambda_2^3 + b_2 \cdot \lambda_2 + b_3 / \lambda_2), \quad a_{24,23}=b_3, \quad a_{24,24}=1
 \end{aligned}$$

さて、修正した座屈値 \bar{F} の若干の数値計算結果を、3. で求めた F 値と列記すれば表-5, 6 のようである。

表-5 修正座屈値 ($g=1, h=2/2.6, m=8.3 \times 10^4$)

f/l	1/6				1/8	1/10
ϕ°	5	10	30	45	10	10
F	-22.93	-23.185	-25.94	-29.66	-40.75	-63.275
\bar{F}	-22.92	-23.16	-25.72	-29.21	-40.70	-63.25

表-6 修正対称座屈値 ($g=1, h=2/2.6, m=8.3 \times 10^4$)

f/l	1/6	1/6.5	1/7	1/8	1/9	1/10
F	-52.63	-60.76	-70.66	-91.51	-115.11	-141.49
\bar{F}	-52.15	-60.72	-69.99	-90.58	-113.92	-139.99

ここで、 $m=R^2 A/I_y=8.3 \times 10^4$ は、たとえば $R=50$ cm, パイプ外径 50 cm, 肉厚 1 cm の場合に相当している。修正座屈値 \bar{F} はもちろんこのパラメーター m により変化するわけであるが、この m の影響も含めて、概略的にみて、座屈値修正の計算は、2. の (1), (2) の計算に対する影響が小さいので、通常はまずやる必要はほとんどないと考えられよう。

5. 結 語

以上テーパのついているアーチの弾等性安定の基礎的考察として、円弧アーチ面内中心方向に分布荷重が満載された場合の弾性座屈値を見つけ、また座屈変形モードの検討をして若干の考察結果をも述べてきた。そうし

てかかる弾性座屈に対する考察としては、解析上は面外変形の卓越する δ 変形も問題とはなるが、まず通常は逆対称 δ 変形に対する検討が最も必要と考えられること、またテーパ ϕ の効果は確かにアーチに対して安定性を増加させるように役立つことなどがわかった。とくにパイプアーチの場合はテーパをつけることが有効であることを明示できるが、しかし断面、寸法によってはその効果がよくない場合もあること、さらにさきに触れたように、面外変形に対する考慮を払うことが必要なことなどの注意は大切であろう。

なお、ここで得られた結果とほぼ同じようなことを、かかるアーチの固有振動性状の考察においてもいいうるが、それはまた別の機会にすることとする。

参考文献

- 1) ① Timoshenko & Gere : "Theory of Elastic Stability",
- ② A. Hawranek & O. Steinhardt : "Theorie und Berechnung der Stahlbrücken", S. 297, Springer, (1958)
- ③ 平井 敦 : 「鋼橋 (Ⅲ)」, 技報堂
- ④ 倉西 茂 : 「アーチ橋のねじれ座屈について」, 土木学会論文集, 第75号 (1961)
- ⑤ 深沢泰晴 : 「軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究」, 土木学会論文集, 第96号 (1963)
- ⑥ P. Layrangués : "Stabilité Latérale des Arcs Circulaires", Annales des Ponts et Chaussées, November-Décembre 1963
- 2) 奥村敏恵・松浦 聖 : 「テーパのついているアーチに関する応力変形の解析」, 土木学会論文集, 第132号 (1966)
- 3) 既出 1)-① Chapter 7, 7.3,
- 4) 既出 1)-②

(1967.12.4・受付)