

有限変形法による吊橋の解法*

FINITE DEFORMATION METHOD FOR SUSPENSION BRIDGES

後 藤 茂 夫**

By Shigeo Goto

1. 結 言

本理論は、吊橋の静力学的な解析に、有限変形法を応用したもので、垂直荷重の作用する、あらゆる形式の吊橋、横荷重を受ける連続あるいは不連続吊橋、および橋軸方向へ変形を生ずる主塔の解析法について説明したものである。

一般に、垂直荷重載荷の場合には、主ケーブルの垂直変位のみを考慮した、微分方程式による撓度理論¹⁾が用いられていた。しかし、この方法では、補剛げたや主ケーブル節点の水平変位は計算できず、本当の意味での厳密解とはいえない。また、斜吊材など不規則吊材を有する吊橋に対しては、特別の考慮が必要であり、計算不可能となる場合が多い。また、通常の微小変形理論による変形法を用いて解析することも考えられるが、この場合には不規則吊材の有無、外的不静定次数の増加などによる難易はなくなるが、各節点の変位量を逐次修正して、くり返し計算を必要とし、線型化することはできない。

これらの難点は、筆者の提唱する有限変形法によればすべて解決されることになる。

すなわち、変形法の利点はそのままだ、厳密解は仮定張力を修正することで与えられ、またこれを一定とすることで線型化された撓度理論と対応し、影響線を求めることもできる。

これは、通常の変形法では、死荷重による主ケーブル張力が、活荷重張力よりはるかに大きい長大吊橋の場合でさえ、くり返し計算が必要であるのに対し、もっともいちじらしい特徴である。

つぎに、横荷重を受ける吊橋については、従来、補剛げたと主ケーブルのそれぞれの分担荷重をくり返し計算で求める方法²⁾、差分方程式による方法³⁾、多元連立方程式による方法などが用いられている。

ここで、筆者が述べる方法は、主塔の場合も同様であるが、有限変形法の最も単純な応用の行列による解法である。

本法によれば、解法が簡単明解で、連続吊橋など適用範囲が広く、線型計算で簡単に影響線を求めることができる。

* 第11回橋梁、構造工学研究発表会にて一部発表

** 正会員 (株)宮地鉄工所設計部

なお、本理論の一部はすでに、文献⁴⁾で発表したのが、その中で、第二変形法と称していたものを有限変形法とあらため、吊材の変形の影響もとりいれ、横荷重を受ける場合と主塔への応用とともに、ここにあらためて発表するものである。

2. 垂直荷重を受ける任意形式の吊橋

(1) 軸力部材における有限変形法の基本式

軸力部材 ij の両端の座標を (u_i, v_i) , (u_j, v_j) とする \bar{N}_{ij} は、死荷重などによる初期張力で、変形前の状態では、すでにつり合っているものである。これに活荷重が加わり、温度変化 $(+t^{\circ}\text{C})$ が生じて、 ij は、図のように $i'j'$ と変位し、張力が \bar{N}_{ij} から $\bar{N}_{ij} + N_{ij}$ と変化した場合を考える。

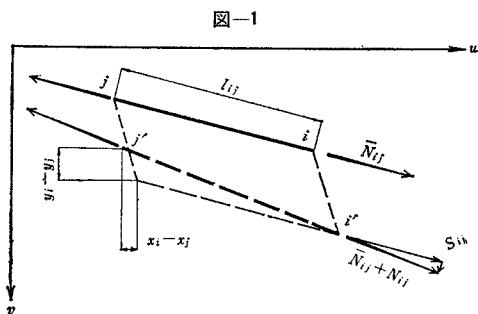


図-1

原材軸 \bar{ij} の u および v 軸に対する方向余弦は、

$$\alpha_{ij} = \frac{u_i - u_j}{l_{ij}}, \quad \beta_{ij} = \frac{v_i - v_j}{l_{ij}}$$

と表わされる。また変形後の材軸の方向余弦を

$$\alpha_{ij} + \Delta\alpha_{ij}, \quad \beta_{ij} + \Delta\beta_{ij}$$

とおき、 $\Delta\alpha_{ij}$ および $\Delta\beta_{ij}$ を α_{ij} , β_{ij} の微分と考えて求めれば、変位の2次以上の項を省略した値が得られる。

すなわち、 i, j 点の変位を x_i, y_i および x_j, y_j とすれば、

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{ij} &= \Delta\left(\frac{u_i - u_j}{l_{ij}}\right) = \frac{l_{ij} \cdot \Delta(u_i - u_j) - (u_i - u_j) \cdot \Delta l_{ij}}{l_{ij}^2} \\ \Delta l_{ij} &= \Delta\sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(u_i - u_j)(x_i - x_j) + 2(v_i - v_j)(y_i - y_j)}{\sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2}} \\ &= \alpha_{ij}(x_i - x_j) + \beta_{ij}(y_i - y_j) \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta\alpha_{ij} = \beta^2_{ij} \frac{x_i - x_j}{l_{ij}} - \alpha_{ij}\beta_{ij} \frac{y_i - y_j}{l_{ij}}$$

同様に

$$\Delta\beta_{ij} = -\alpha_{ij}\beta_{ij} \frac{x_i - x_j}{l_{ij}} + \alpha^2_{ij} \frac{y_i - y_j}{l_{ij}}$$

したがって、変形後において、つり合いを考えなければならぬ軸力の u, v 成分は、

$$\begin{aligned} X_{ij} &= (\alpha_{ij} + \Delta\alpha_{ij})(\bar{N}_{ij} + N_{ij}) - \alpha_{ij}\bar{N}_{ij} \\ &= \alpha_{ij}N_{ij} + \Delta\alpha_{ij}(\bar{N}_{ij} + N_{ij}) \\ Y_{ij} &= (\beta_{ij} + \Delta\beta_{ij})(\bar{N}_{ij} + N_{ij}) - \beta_{ij}\bar{N}_{ij} \\ &= \beta_{ij}N_{ij} + \Delta\beta_{ij}(\bar{N}_{ij} + N_{ij}) \end{aligned}$$

また増加軸力 N_{ij} は、伸び剛性を EA_{ij} 、線膨張係数を ϵ とすれば、

$$N_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \{ \alpha_{ij}(x_i - x_j) + \beta_{ij}(y_i - y_j) - \epsilon t l_{ij} \} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$k_{ij} = \frac{\bar{N}_{ij} + N_{ij}}{EA_{ij}}, \quad F_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}}$$

において、 X_{ij}, Y_{ij} を表わせば、

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \alpha_{ij}N_{ij} + k_{ij}F_{ij}\beta^2_{ij}(x_i - x_j) \\ &\quad - k_{ij}F_{ij}\alpha_{ij}\beta_{ij}(y_i - y_j) \\ Y_{ij} &= \beta_{ij}N_{ij} - k_{ij}F_{ij}\alpha_{ij}\beta_{ij}(x_i - x_j) \\ &\quad + k_{ij}F_{ij}\alpha^2_{ij}(y_i - y_j) \end{aligned}$$

となる。この式の第2項以下が、 $-\beta_{ij}S_{ij}, \alpha_{ij}S_{ij}$ となるものである。これに式(1)を代入し、

$$a_{ij} = F_{ij}\alpha^2_{ij}, \quad b_{ij} = F_{ij}\beta^2_{ij}, \quad c_{ij} = F_{ij}\alpha_{ij}\beta_{ij}$$

とおけば、

$$X_{ij} = (\alpha_{ij} + k_{ij}b_{ij})(x_i - x_j) + c_{ij}(1 - k_{ij})(y_i - y_j) - EA_{ij}\alpha_{ij}\epsilon t \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$Y_{ij} = c_{ij}(1 - k_{ij})(x_i - x_j) + (b_{ij} + k_{ij}a_{ij})(y_i - y_j) - EA_{ij}\beta_{ij}\epsilon t \quad \dots\dots\dots(4)$$

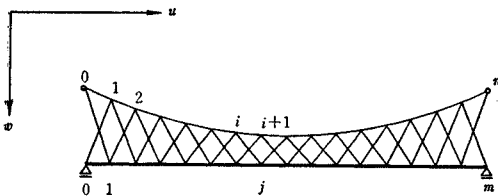
を得る。これが、軸力部材における有限変形法の基本式であり、 $k_{ij} = 0$ とすれば、一般の微小変形理論による変形法の式に一致することになる。

(2) 基礎方程式の誘導

図のように、主ケーブル節点を $i=0, 1, 2, \dots, n$ 、補剛げた節点を $j=0, 1, 2, \dots, m$ とする。式(3)、(4)を主ケーブルについて適用し、

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_{i, i-1}, & \beta_i &= \beta_{i, i-1}, & a_i &= a_{i, i-1} \\ b_i &= b_{i, i-1}, & c_i &= c_{i, i-1}, & k_i &= k_{i, i-1} \end{aligned}$$

図-2



とおけば、 i 点のまわりの力のつりあいより、

$$\begin{aligned} &-(a_i + k_i b_i)x_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + k_i b_i + k_{i+1} b_{i+1}) \\ &+ \sum_j a_{ij} + \sum_j k_{ij} b_{ij} x_i - (a_{i+1} + k_{i+1} b_{i+1})x_{i+1} \\ &- c_i(1 - k_i)y_{i-1} + \{c_i + c_{i+1} - k_i c_i - k_{i+1} c_{i+1} \\ &+ \sum_j c_{ij}(1 - k_{ij})\} y_i - c_{i+1}(1 - k_{i+1})y_{i+1} \\ &- \sum_j c_{ij}(1 - k_{ij})y'_j - \sum_j (a_{ij} + k_{ij} b_{ij})x'_j = U_{ti} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} &-c_i(1 - k_i)x_{i-1} + \{c_i + c_{i+1} - k_i c_i - k_{i+1} c_{i+1} \\ &+ \sum_j c_{ij}(1 - k_{ij})\} x_i - c_{i+1}(1 + k_{i+1})x_{i+1} \\ &- (b_i + k_i a_i)y_{i-1} + (b_i + b_{i+1} + k_i a_i + k_{i+1} a_{i+1}) \\ &+ \sum_j b_{ij} + \sum_j k_{ij} a_{ij} y_i - (b_{i+1} + k_{i+1} a_{i+1})y_{i+1} \\ &- \sum_j (b_{ij} + k_{ij} a_{ij})y'_j - \sum_j c_{ij}(1 - k_{ij})x'_j = V_{ti} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 x'_j, y'_j は補剛げた j 点の変位、

$$\begin{aligned} U_{ti} &= E \epsilon t (A_i \alpha_i - A_{i+1} \alpha_{i+1}) + E \epsilon t \sum_j A_{ij} \alpha_{ij} \\ V_{ti} &= E \epsilon t (A_i \beta_i - A_{i+1} \beta_{i+1}) + E \epsilon t \sum_j A_{ij} \beta_{ij} \end{aligned}$$

つぎに、補剛げた節点に集まる吊材張力の合力を X_j, Y_j とすれば、

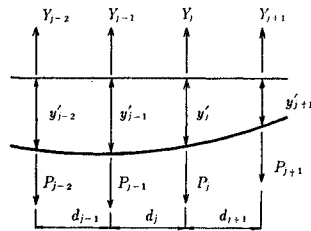
$$\begin{aligned} &-\sum_i c_{ji}(1 - k_{ji})x_i - \sum_i (b_{ji} + k_{ji} a_{ji})y_i \\ &+ y'_j \sum_i (b_{ji} + k_{ji} a_{ji}) + x'_j \sum_i c_{ji}(1 - k_{ji}) \\ &= V_{tj}' + Y_j \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\sum_i (a_{ji} + k_{ji} b_{ji})x_i - \sum_i c_{ji}(1 - k_{ji})y_i \\ &+ y'_j \sum_i c_{ji}(1 - k_{ji}) + x'_j \sum_i (a_{ji} + k_{ji} b_{ji}) \\ &= U_{tj}' + X_j \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

$$V_{tj}' = E \epsilon t \sum_i A_{ji} \beta_{ji}, \quad U_{tj}' = E \epsilon t \sum_i A_{ji} \alpha_{ji}$$

また、補剛げたにおける荷重と変位との関係は、垂直方向に対しては、

図-3



$$-r_j M_{j-1} + (r_j + r_{j+1})M_j - r_{j+1} M_{j+1} = P_j - Y_j \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\begin{aligned} &-r_j y'_{j-1} + (r_j + r_{j+1})y'_j - r_{j+1} y'_{j+1} \\ &= t_j M_{j-1} + 2(t_j + t_{j+1})M_j + t_{j+1} M_{j+1} \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

が成立する。ただし

$$r_j = \frac{1}{d_j}, \quad t_j = \frac{d_j}{6EI_j}$$

EI_j は、補剛げた $j-1 \sim j$ 区間の曲げ剛性ここで、

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \tau_1 + \tau_2, & -\tau_2 \\ & -\tau_2, \tau_2 + \tau_3, & -\tau_3 \\ & & \dots \\ & & & -\tau_{m-1}, \tau_{m-1} + \tau_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 2(t_1 + t_2), t_2 \\ t_2, 2(t_2 + t_3), t_3 \\ \dots \\ t_{m-1}, 2(t_{m-1} + t_m) \end{bmatrix}$$

とおいて行列で表わせば

$$\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{t} \boldsymbol{M}$$

したがって, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{t}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$ とおけば

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{h} \boldsymbol{y}' \dots \dots \dots (11)$$

を得る。水平方向に対しては,

$$-F_j' x'_{j-1} + (F_j' + F'_{j+1}) x_j' - F'_{j+1} x'_{j+1} = -X_j + U_j' \dots \dots \dots (12)$$

ただし,

$$F_j' = \frac{EA_j'}{d_j}, \quad U_j' = E \varepsilon t (A_j' - A'_{j+1})$$

EA_j' : 補剛げた $j-1 \sim j$ 区間の伸び剛性

$j=0, 1, 2, \dots, m$ として行列で表わせば,

$$\boldsymbol{F} \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}' \dots \dots \dots (12')$$

ただし,

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_1', & -F_1' \\ -F_1', & F_1' + F_2', & -F_2' \\ & -F_2', & F_2' + F_3', & -F_3' \\ & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & & -F_m', & F_m' \end{bmatrix}$$

さらに, 式 (5), (6), (7), (8) についてもつぎのように行列を用いて表示する。

$$(\boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}}) \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{c}}) \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}' \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{a}' \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{U}_t \dots (5)'$$

$$(\boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{c}}) \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{b}}) \boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}' \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{c}' \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{V}_t \dots (6)'$$

$$-\boldsymbol{c}'^* \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}'^* \boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{y}' + \tilde{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{V}_t' + \boldsymbol{Y} \dots \dots \dots (7)'$$

$$-\boldsymbol{a}'^* \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}'^* \boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{c}}^* \boldsymbol{y}' + \tilde{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{U}_t' + \boldsymbol{X} \dots \dots \dots (8)'$$

ただし,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_{m-1}' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ \dots \\ x_m' \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + k_1 b_1 + k_2 b_2, & -a_2 - k_2 b_2 \\ -a_2 - k_2 b_2, & a_2 + a_3 + k_2 b_2 + k_3 b_3, & -a_3 - k_3 b_3 \\ \dots \\ -a_{n-1} - k_{n-1} b_{n-1}, & a_{n-1} + a_n + k_{n-1} b_{n-1} + k_n b_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \Sigma(a_{1j} + k_{1j} b_{1j}) \\ \Sigma(a_{2j} + k_{2j} b_{2j}) \\ \dots \\ \Sigma(a_{n-1,j} + k_{n-1,j} b_{n-1,j}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \Sigma c_{1j}(1 - k_{1j}) \\ \Sigma c_{2j}(1 - k_{2j}) \\ \dots \\ \Sigma c_{n-1,j}(1 - k_{n-1,j}) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \Sigma(a_{0i} + k_{0i} b_{0i}) \\ \Sigma(a_{1i} + k_{1i} b_{1i}) \\ \dots \\ \Sigma(a_{mi} + k_{mi} b_{mi}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \Sigma(b_{1i} + k_{1i} a_{1i}) \\ \Sigma(b_{2i} + k_{2i} a_{2i}) \\ \dots \\ \Sigma(b_{m-1,i} + k_{m-1,i} a_{m-1,i}) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 0, \Sigma c_{1i}(1 - k_{1i}) \\ \Sigma c_{2i}(1 - k_{2i}) \\ \dots \\ \Sigma c_{m-1,i}(1 - k_{m-1,i}), 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{b}, \bar{\boldsymbol{b}}$ は, $\boldsymbol{a}, \bar{\boldsymbol{a}}$ において a と b を入れかえたもの, $\boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ はその ij 要素がそれぞれ $b_{ij} + k_{ij} a_{ij}, c_{ij}(1 - k_{ij})$ となる $n-1$ 行 $m-1$ 列の行列, $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{c}'$ は, その ij 要素がそれぞれ $a_{i,j-1} + k_{i,j-1} b_{i,j-1}, c_{i,j-1}(1 - k_{i,j-1})$ となる $n-1$ 行 $m+1$ 列の行列, \boldsymbol{a}'^* などは \boldsymbol{a}' の転置行列である。

式 (7)', (8)' に (11), (12)' を代入して, $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ を消去して整理すれば,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}} & \boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{c}} & -\boldsymbol{c}' & -\boldsymbol{a}' \\ \boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{c}} & \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{b}} & -\boldsymbol{b}' & -\boldsymbol{c}' \\ -\boldsymbol{c}'^* & -\boldsymbol{b}'^* & \tilde{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{h} & \tilde{\boldsymbol{c}} \\ -\boldsymbol{a}'^* & -\boldsymbol{c}'^* & \tilde{\boldsymbol{c}}^* & \tilde{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{V}' \\ \boldsymbol{U}' \end{bmatrix} \dots (13)$$

ただし

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{V}_t, \quad \boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U}_t' + \boldsymbol{U}_t''$$

ここで, $\tilde{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{F}$ は, \boldsymbol{t} などと同じく対角要素とその両側の要素のみのいわゆる tri-diagonal matrix であるので, その逆行列は, 後述のように簡単に求めることができる。このことを利用して \boldsymbol{x}' を消去し, 式 (13) の元数を引下げることにする。

すなわち, $\boldsymbol{D} = (\tilde{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{F})^{-1}$ において式 (13) を変形すれば,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}' \boldsymbol{D} \boldsymbol{a}'^*, & \boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{a}' \boldsymbol{D} \boldsymbol{c}'^*, & -\boldsymbol{c}' + \boldsymbol{a}' \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{c}}^* \\ \boldsymbol{c} + \bar{\boldsymbol{c}} - \boldsymbol{c}' \boldsymbol{D} \boldsymbol{a}'^*, & \boldsymbol{b} + \bar{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{c}' \boldsymbol{D} \boldsymbol{c}'^*, & -\boldsymbol{b}' + \boldsymbol{c}' \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{c}}^* \\ -\boldsymbol{c}'^* + \tilde{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{a}'^*, & -\boldsymbol{b}'^* + \tilde{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{c}'^*, & \tilde{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{h} - \tilde{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{c}}^* \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{a} \boldsymbol{D} \boldsymbol{U}' \\ \boldsymbol{V} + \boldsymbol{c}' \boldsymbol{D} \boldsymbol{U}' \\ \boldsymbol{V}' - \tilde{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{U}' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{D} \boldsymbol{a}'^* \boldsymbol{x} + \boldsymbol{D} \boldsymbol{c}'^* \boldsymbol{y} - \boldsymbol{D} \tilde{\boldsymbol{c}}^* \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{D} \boldsymbol{U}' \dots \dots \dots (15)$$

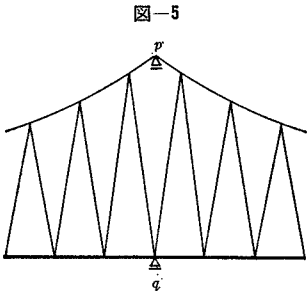
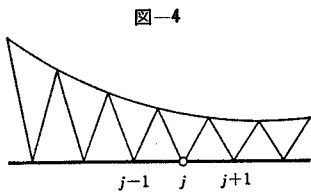
式 (14), (15) が, 任意形式の吊橋の変位に関する基礎方程式である。

(3) 各形式への適用

式 (14) をつぎのように略記する。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}' \\ \boldsymbol{C}^* & \boldsymbol{B} & \bar{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{C}'^* & \bar{\boldsymbol{B}}^* & \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}' \end{bmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

補剛げた, j 節点がヒンジの場合には, \boldsymbol{h} の計算において \boldsymbol{t} の jj 要素を 1, 他の j 行と j 列の要素をすべて 0 として逆行列を求め, その j 列要素を 0 とおきこれを \boldsymbol{t}^{-1} とする。



また塔頂の主ケーブル節点を p 、補剛げたの中間支点を q で代表させ、

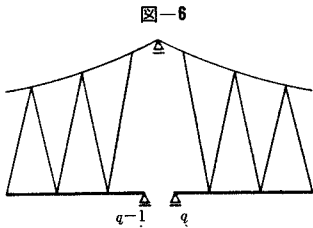
$i=n-1$ 次の単位行列の第 p 行を 0 としたもの
 $j=m-1$ 次の単位行列の第 q 行を 0 としたもの
 $i', j' : i, j$ の補数行列

とすれば、塔頂、中間支点の条件を加味した基礎方程式は、

$$\begin{pmatrix} A & Ci & C'J \\ iC^* & i'+iBi & iBj \\ jC'^* & jB^*i & j'+jB'j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ iv \\ jv' \end{pmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

となる。

図のように補剛げたが中間支点で不連続な場合には、 $q-1, q$ に支点条件とヒンジの条件を入れ、 $A_q'=0$ として、 $q-1 \sim q$ 区間の伸び剛度を 0 にしてやればよい。



こうして、各節点の変位が求まれば、ケーブル張力、けたの曲げモーメントなどは、前述の式で簡単に求まる。

また補剛げたのたわみ角 θ_j を求めるには、

$$K_j = \frac{2EI_j}{d_j}, \quad K_j' = \frac{6EI_j}{d_j^2}$$

として、

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2K_1, K_1 \\ K_1, 2(K_1+K_2), K_2 \\ K_2, 2(K_2+K_3), K_3 \\ \dots \\ K_m, 2K_m \end{pmatrix}^{-1}$$

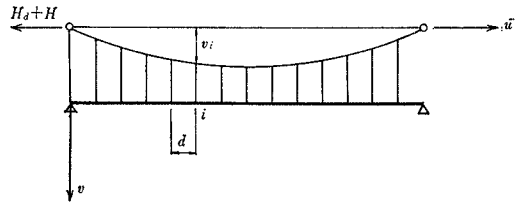
$$\begin{pmatrix} K_1' \\ K_1'-K_2', K_2' \\ -K_2', K_2'-K_3' \\ \dots \\ -K_3' \\ \dots \\ K_{m-1}' \\ K_{m-1}'-K_m' \\ -K_m' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(18)$$

より求めればよい。

(4) 微分方程式 (Melan) との関連

いま、主ケーブル、補剛げたの断面は一様、吊材は垂直方向のみとし、吊材の伸びを無視すれば、式 (13) はつぎのように簡単になる。

図-7



$$ax + cy = 0 \dots\dots\dots(19)$$

$$cx + (b+h)y = P \dots\dots\dots(20)$$

a, b, c を k を含む部分とそうでない部分の二つの行列にわける。たとえば

$$a = \begin{pmatrix} a_1+a_2, -a_2 \\ -a_2, a_2+a_3, -a_3 \\ \dots \\ -a_{n-1}, a_{n-1}+a_n \end{pmatrix}$$

$$k_b = \begin{pmatrix} k_1b_1+k_2b_2, -k_2b_2 \\ -k_2b_2, k_2b_2+k_3b_3, -k_3b_3 \\ \dots \\ -k_{n-1}b_{n-1}, k_{n-1}b_{n-1}+k_nb_n \end{pmatrix}$$

とおけば

$$(a+k_b)x + (c-k_c)y = 0 \dots\dots\dots(21)$$

$$(c-k_c)x + (b+k_a+h)y = P \dots\dots\dots(22)$$

式 (21) を変形して

$$(cx + by) + (-k_c x + k_a y) + \gamma M = P \dots\dots(23)$$

第 1 項の i 行要素は

$$\begin{aligned} (cx + by)_i &= -c_i x_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) x_i - c_{i+1} x_{i+1} \\ &\quad - b_i y_{i-1} + (b_i + b_{i+1}) y_i - b_{i+1} y_{i+1} \\ &= \beta_i N_i - \beta_{i+1} N_{i+1} = -\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{d} H^r \end{aligned}$$

また第 2 項は、

$$\begin{aligned} (-k_c x + k_a)_i &= k_i c_i x_{i-1} - (k_i c_i + k_{i+1} c_{i+1}) x_i \\ &\quad + k_{i+1} c_{i+1} x_{i+1} - k_i a_i y_{i-1} \\ &\quad + (k_i a_i + k_{i+1} a_{i+1}) y_i - k_{i+1} a_{i+1} y_{i+1} \end{aligned}$$

しかるに、

$$k_{ic_i} = \frac{H+H_d}{E_c A_c} \frac{1}{\alpha_i} \frac{E_c A_c}{l_i} \alpha_i \beta_i = \frac{H_d+H}{d} \alpha_i \beta_i$$

$$k_{ia_i} = \frac{H+H_d}{E_c A_c} \frac{1}{\alpha_i} \frac{E_c A_c}{l_i} \alpha_i^2 = \frac{H_d+H}{d} \alpha_i^2$$

したがって、

$$(-k_c \mathbf{x} + k_a \mathbf{y})_i = \frac{H_d+H}{d} \{ \alpha_i \beta_i x_{i-1} - (\alpha_i \beta_i + \alpha_{i+1} \beta_{i+1}) x_i + \alpha_{i+1} \beta_{i+1} x_{i+1} - \alpha_i^2 y_{i-1} + (\alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2) y_i - \alpha_{i+1}^2 y_{i+1} \} \dots\dots\dots(24)$$

一方、式(19)の*i*行は k_b, k_c を省略して

$$-\frac{\alpha_i^2}{l_i} x_{i-1} + \left(\frac{\alpha_i^2}{l_i} + \frac{\alpha_{i+1}^2}{l_{i+1}} \right) x_i - \frac{\alpha_{i+1}^2}{l_{i+1}} x_{i+1} - \frac{\alpha_i \beta_i}{l_i} y_{i-1} + \left(\frac{\alpha_i \beta_i}{l_i} + \frac{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}}{l_{i+1}} \right) y_i - \frac{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}}{l_{i+1}} y_{i+1} = 0$$

$\alpha_i \doteq \alpha_{i+1}, \beta_i \doteq \beta_{i+1}, l_i \doteq l_{i+1}$ であるので、

$$-\alpha_i \beta_i x_{i-1} + (\alpha_i \beta_i + \alpha_{i+1} \beta_{i+1}) x_i - \alpha_{i+1} \beta_{i+1} x_{i+1} - \beta_i^2 y_{i-1} + (\beta_i^2 + \beta_{i+1}^2) y_i - \beta_{i+1}^2 y_{i+1} = 0$$

これを式(24)に代入して*x*の項を消去すれば、

$$(-k_c \mathbf{x} + k_a \mathbf{y})_i = \frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{d} (H_d + H) \dots\dots\dots(25)$$

式(23),(24),(25)より

$$-\frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{d^2} - \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{d^2} H - \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{d^2} (H_d + H) = \frac{P_i}{d} \dots\dots(26)$$

すなわち、

$$-\frac{d^2 M}{d u^2} - H \frac{d^2 v}{d u^2} - (H_d + H) \frac{d^2 y}{d u^2} = \frac{P_i}{d}$$

微分方程式に直せば、

$$EI \frac{d^4 y}{du^4} - H \frac{d^2 v}{du^2} - (H_d + H) \frac{d^2 y}{du^2} = p \dots\dots(27)$$

となり Melan の基礎微分方程式が得られる。

(5) 補遺

式(17)を解くためには、主ケーブルにおける k_i , 吊材における k_{ij} を仮定しなければならない。これらをすべて0としてしまえば、弾性理論ということになる。

$$k_i = \frac{\bar{N}_i + N_i}{E_c A_c}, k_{ij} = \frac{\bar{N}_{ij} + N_{ij}}{E_c' A_{ij}}$$

ふつう、 \bar{N}_i, \bar{N}_{ij} は死荷重などによるもので、既知であり、 N_i, N_{ij} を省略して k_i, k_{ij} を決めてしまえば、線型化された撓度理論に対応する。

とくに厳密解を要求しない場合には、吊材の k_{ij} をすべて0とおき、

$$k' = \frac{H_d}{E_c A_c}$$

を定め、

$$k_i = \frac{k'}{\alpha_i}$$

として計算を進めたとしても、既往の解法にくらべれば、より厳密解に近い値が得られる。

式(17)は、あらゆる形式を包含するものであるが、とくに垂直吊材のみで、主ケーブル節点と補剛げたの節点が1対1の対応となる場合を考えてみよう。吊材の伸びを無視し、補剛げたの伸縮はないものとすれば、式(13)は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{K}, & \mathbf{c}, & -\boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{c}, & \mathbf{b} + \mathbf{h}, & \\ -\boldsymbol{\kappa}^* & & \Sigma \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_t \\ \mathbf{V}_t + \mathbf{P} \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(28)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\kappa}_i = \frac{\bar{N}_{ii} + N_{ii}}{l_{ii}} : \text{吊材張力を吊材長で割ったもの}$$

$\mathbf{K} : \boldsymbol{\kappa}_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ による対角行列

$\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}^* : \boldsymbol{\kappa}_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ による列および行ベクトル

\mathbf{x}' を消去すれば、

$$(\mathbf{a} + \mathbf{K} - \mu \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}^*) \mathbf{x} + \mathbf{c} \mathbf{y} = \mathbf{U}_t \dots\dots\dots(29)$$

$$\mathbf{c} \mathbf{x} + (\mathbf{b} + \mathbf{h}) \mathbf{y} = \mathbf{V}_t + \mathbf{P} \dots\dots\dots(30)$$

ただし、

$$\mu = \frac{1}{\Sigma \boldsymbol{\kappa}}$$

このとき、補剛げたの水平移動量 \mathbf{x}' は、

$$\mathbf{x}' = \mu \boldsymbol{\kappa}^* \mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\kappa}_1 x_1 + \boldsymbol{\kappa}_2 x_2 + \dots + \boldsymbol{\kappa}_{n-1} x_{n-1}}{\Sigma \boldsymbol{\kappa}} \dots\dots(31)$$

となり、主ケーブル節点変位の吊材の影響を考えた平均値となっている。

$$(\mathbf{a} + \mathbf{K} - \mu \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}^*)^{-1} = \mathfrak{A}$$

とおいて \mathbf{x} を消去すると

$$(\mathbf{b} + \mathbf{h} - \mathbf{c} \mathfrak{A} \mathbf{c}) \mathbf{y} = \mathbf{V}_t + \mathbf{P} - \mathbf{c} \mathfrak{A} \mathbf{U}_t \dots\dots\dots(32)$$

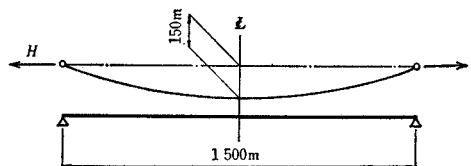
補剛げた曲げモーメントに関する方程式に直せば、

$$\{(\mathbf{b} - \mathbf{c} \mathfrak{A} \mathbf{c}) \mathbf{m} + \boldsymbol{\gamma}\} \mathbf{M} = \mathbf{V}_t + \mathbf{P} - \mathbf{c} \mathfrak{A} \mathbf{U}_t \dots\dots(33)$$

となる。ここで \mathbf{m} は、補剛げたを単純ばりとしたときの曲げモーメント影響線行列であり、 $\boldsymbol{\gamma}$ の逆行列でもある。

つぎに、以下のような諸元の垂直吊材吊橋を例にとり $k' = (H_d + H)/E_c A_c$ の変動による影響を調べてみることにする。

図-8



主ケーブル死荷重張力 $H_d = 29494 \text{ t}$

補剛トラス換算断面二次モーメント $I = 2.04 \text{ m}^4$

主ケーブル断面積 $A_c = 0.8017 \text{ m}^2$

主ケーブル弾性係数 $E_c = 20 \times 10^6 \text{ t/m}^2$

この場合の k' は、大体、つぎようになる。

$$k' \doteq \frac{H_d}{E_c A_c} = 0.0018$$

いま、 $H_d + H = 0 \sim 35\,000\text{ t}$ まで 8 段階に変化させたときの単價格点荷重（支間を 24 等分）による最大曲げモーメント図、その他を図示するとつぎようになる。

図-9 最大および最小曲げモーメント図

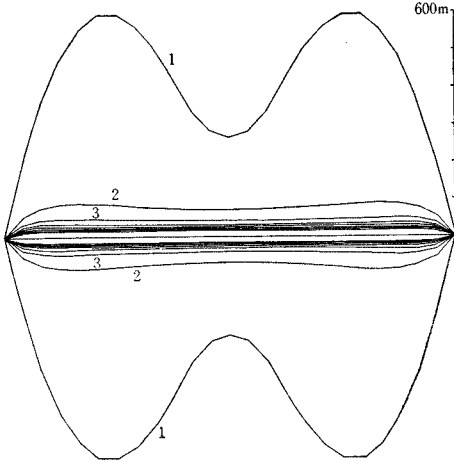


図-10 吊材張力影響線 (1/4 点)

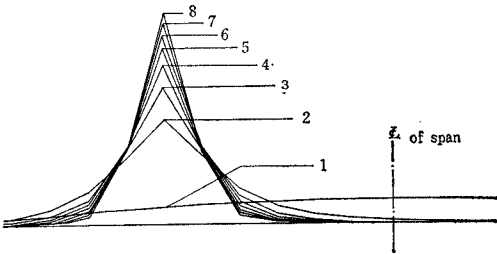
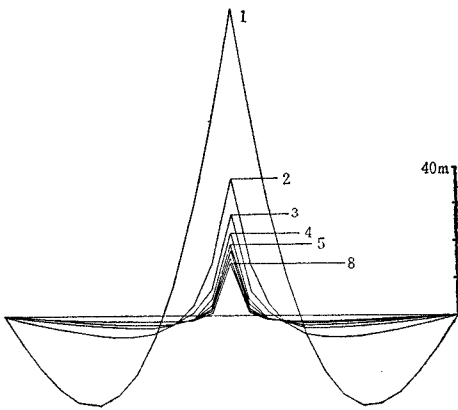


図-11 曲げモーメント影響線



	H	k'		H	k'
1	0	0	5	20 000	0.00125
2	5 000	0.00031	6	25 000	0.00156
3	10 000	0.00063	7	30 000	0.00188
4	15 000	0.00094	8	35 000	0.00219

3. 横荷重を受ける吊橋

(1) 基本式の誘導

横荷重の場合の吊橋の変形は、面外変形のみとし、主ケーブル、および吊材の伸縮は考えないものとする。

このような部材の材端面外力は、前章 図-1 の S_{ij} に相当するものとして、次式で与えられる。

$$S_{ij} = (y_i - y_j) \frac{\bar{N}_{ij} + N_{ij}}{l_{ij}} \dots \dots \dots (34)$$

主ケーブル i' 点のまわりの面外力のつりあいより
 $S_{i'i-1'} + S_{i'i+1'} + S_{i'i} = P_i'$

図-12

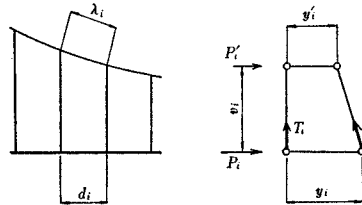
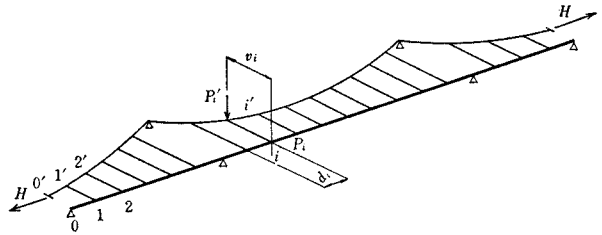
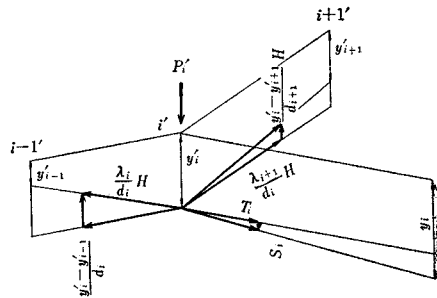


図-13



$$\frac{\bar{N}_i}{l_i} (y_i' - y_{i-1}') + \frac{\bar{N}_{i+1}}{l_{i+1}} (y_i' - y_{i+1}') + \frac{T_i}{v_i} (y_i' - y_i) = P_i'$$

すなわち

$$H \left\{ -\frac{1}{d_i} y_{i-1}' + \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) y_i' - \frac{1}{d_{i+1}} y_{i+1}' \right\} + \frac{T_i}{v_i} (y_i' - y_i) = P_i' \dots \dots \dots (35)$$

また、補剛げた節点については、

$$-\frac{1}{d_i} M_{i-1} + \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) M_i - \frac{1}{d_{i+1}} M_{i+1}$$

$$= P_i - \frac{T_i}{v_i} (y_i - y_i') \dots\dots\dots(36)$$

$$- \frac{1}{d_i} y_{i-1} + \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) y_i - \frac{1}{d_{i+1}} y_{i+1}$$

$$= t_i M_i + 2(t_i + t_{i+1}) M_i + t_{i+1} M_{i+1} \dots\dots\dots(37)$$

これらを行列で表わせば、

$$Hw\gamma y' + y' - y = wP'$$

$$w\gamma M = wP - y + y'$$

$$\gamma y = tM$$

ここで、

$$w = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{T_1} \\ \frac{v_2}{T_2} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{v_{n-1}}{T_{n-1}} \end{bmatrix}$$

y, y' : 補剛げたおよび主ケーブルのたわみベクトル

P, P' : 補剛げたおよび主ケーブルの横荷重ベクトル

M : 補剛げたの曲げモーメントベクトル

以上より M を消去すれば、主ケーブルおよび補剛げたの節点の変位に関する連立方程式と等価のつぎの行列方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} A & -I \\ -I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wP' \\ wP \end{bmatrix} \dots\dots\dots(38)$$

ただし、

I : $n-1$ 次の単位行列

$$A = I + Hw\gamma$$

$$B = I + w\gamma t^{-1}\gamma$$

中間点がある場合、中間支点的番号を j, k, \dots とし、

i : I の j 行, k 行, \dots を 0 とおいたもの

i' : i の補数行列 $I-i$

とすれば、式 (38) はつぎのように変換される。

$$\left(\begin{bmatrix} i' \\ i' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wP' \\ wP \end{bmatrix} \dots\dots\dots(39)$$

こうすれば、左辺係数行列の逆行列を計算することにより連続吊橋の解が得られる。

つぎに、式 (39) の元数を引下げるため、 y' を消去することを考えてみよう。

式 (39) は、 y, y' を求めるため直接係数行列の逆行列を求めるのでなければ

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -I \\ -I & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iwP' \\ iwP \end{bmatrix} \dots\dots\dots(40)$$

としてよい。すなわち、

$$(i + Hw\gamma i) y' - iy = iwP' \dots\dots\dots(41)$$

$$-iy' + (i + iwh) y = iwP \dots\dots\dots(42)$$

ただし、 $h = \gamma t^{-1} \gamma$ とする。

これより、式 (41), (42) を加えて

$$Hw\gamma iy' + iwhiy = iw(P' + P)$$

w は対角行列であるから

$$Hwi\gamma iy' + wihiy = wi(P' + P)$$

したがって、

$$Hi\gamma iy' + ihiy = i(P' + P) \dots\dots\dots(43)$$

式 (42) を (43) に代入して

$$i + H\gamma iw = \omega$$

とおけば、

$$i(H\gamma + \omega h)iy = iP' + \omega P$$

これで y に関する方程式が求まったわけであるが、 y の係数行列は正則ではなく、これを正則化するため再び i' を用いて y を表わせば

$$y = \{i' + i(H\gamma + \omega h)i\}^{-1}(iP' + \omega P) \dots\dots\dots(44)$$

となる。こうして y が求まれば、 y', M は

$$y' = (i + iwh)y - iwP \dots\dots\dots(45)$$

$$M = t^{-1}\gamma y \dots\dots\dots(46)$$

として計算すればよい。

なお、中間支点的ない形式では、曲げモーメント M を未知数にとりこともできる。結果のみを記せば、

$$k = \gamma + H\gamma w\gamma$$

$$M = (Ht + k)^{-1}(kM_0 + P') \dots\dots\dots(47)$$

M_0 : P による単純ばりとしての曲げモーメントベクトル

(2) 微分方程式との関連

式 (38) より

$$y' + Hw\gamma y - y = wP' \dots\dots\dots(48)$$

$$-y' + y + why = wP \dots\dots\dots(49)$$

式 (42) 第 i 行を展開すれば

$$y_i' + \frac{H}{T_i} v_i \left\{ -\frac{1}{d_i} y_{i-1}' + \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) y_i' - \frac{1}{d_{i+1}} y_{i+1}' \right\} - y_i = \frac{1}{T_i} v_i P_i'$$

d_i を一定とすれば、

$$-H \frac{y_{i-1}' - 2y_i' + y_{i+1}'}{d^2} - \frac{1}{v_i} \frac{T_i}{d} (y_i - y_i')$$

$$= \frac{P_i'}{d} \dots\dots\dots(50)$$

また式 (48) は、

$$-y_i' + y_i + \frac{v_i}{T_i} \left\{ -\frac{1}{d_i} M_{i-1} + \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_{i+1}} \right) M_i - \frac{1}{d_{i+1}} M_{i+1} \right\} = \frac{v_i}{T_i} P_i$$

$$\therefore \frac{1}{v_i} \frac{T_i}{d} (y_i - y_i') - \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{d^2} = \frac{P_i}{d} \dots\dots\dots(51)$$

$d \rightarrow 0$ として微分方程式に変換すれば、

$$-H \frac{d^2 y'}{dx^2} - \frac{t}{v} (y - y') = p' \dots\dots\dots(52)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{t}{v} (y - y') = p \dots \dots \dots (53)$$

となる。

(3) 計算例

図-14

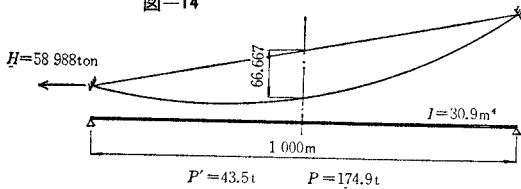


図-15 P, P' による曲げモーメント影響値

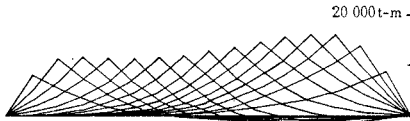


図-16 P, P' によるせん断力影響値

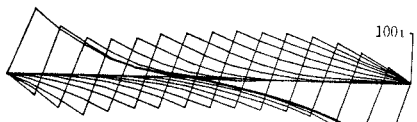


図-17 P, P' 満載による曲げモーメント

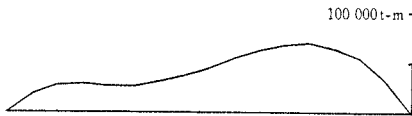


図-18 P, P' 満載による水平変位

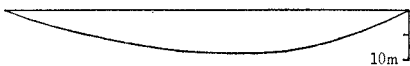


図-19 P, P' 満載によるせん断力



図-20

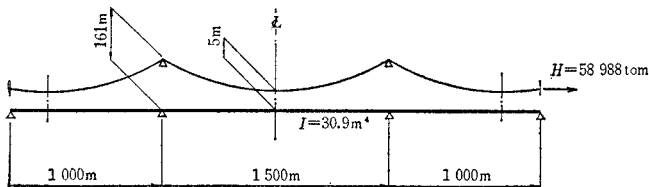


図-21 単一集中荷重

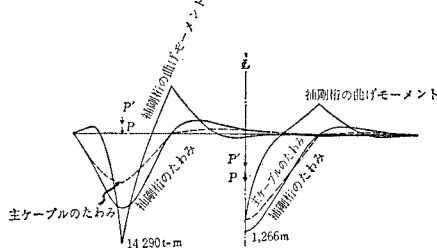
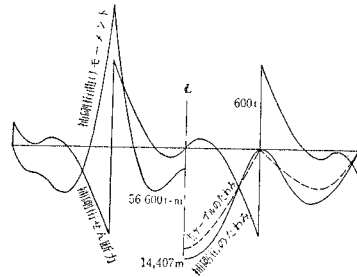


図-22 満載荷重



4. 吊橋主塔への応用

図のように、主塔に荷重が載荷されたときの節点の変位 x , 曲げモーメント M を求めることにする。
 $i-1 \sim i$ の軸力を N_i とし材軸の変形による直角分力を i 端において $S_{i,i-1}$ とすれば、

$$N_i = \sum_{r=0}^{i-1} P_r, \quad \kappa_i = \frac{N_i}{l_i}$$

$$S_{i,i-1} = \kappa_i (x_{i-1} - x_i) \dots \dots \dots (54)$$

i 点におけるせん断力のつりあいより

$$-r_i M_{i-1} + (r_i + r_{i+1}) M_i - r_{i+1} M_{i+1} - \kappa_i x_{i-1} + (\kappa_i + \kappa_{i+1}) x_i - \kappa_{i+1} x_{i+1} = -H_i \dots \dots \dots (55)$$

たわみと曲げモーメントの関係より

$$t_i M_{i-1} + 2(t_i + t_{i+1}) M_i + t_{i+1} M_{i+1} - r_i x_{i-1} + (r_i + r_{i+1}) x_i - r_{i+1} x_{i+1} = 0 \dots \dots \dots (56)$$

ここで、

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \dots \\ M_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \dots \\ H_{n-1} \end{pmatrix}$$

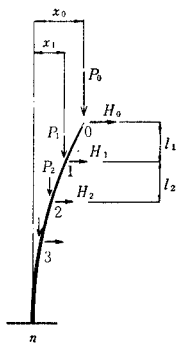
$$t_i = \frac{l_i}{6EI_i}, \quad r_i = \frac{1}{l_i}$$

$$t = \begin{pmatrix} 2(t_1 + t_2), t_2 \\ t_2, 2(t_2 + t_3), t_3 \\ \dots \dots \dots \\ t_{n-1}, 2(t_{n-1} + t_n), t_n \\ \dots \dots \dots \\ t_n, 2t_n \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_1, -\kappa_1 \\ -\kappa_1, \kappa_1 + \kappa_2, -\kappa_2 \\ \dots \dots \dots \\ -\kappa_{n-2}, \kappa_{n-2} + \kappa_{n-1}, -\kappa_{n-1} \\ -\kappa_{n-1}, \kappa_{n-1} + \kappa_n \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} -r_1 \\ r_1 + r_2, -r_2 \\ -r_2, r_2 + r_3, -r_3 \\ \dots \dots \dots \\ -r_{n-1}, r_{n-1} + r_n, -r_n \end{pmatrix}$$

図-23



とおけばつぎのように表わすことができる。

$$\kappa x + \gamma M = -H \quad \dots\dots\dots(57)$$

$$\gamma^* x + tM = 0 \quad \dots\dots\dots(58)$$

したがって、

$$M = (t - \gamma^* \kappa^{-1} \gamma)^{-1} \gamma^* \kappa^{-1} H \quad \dots\dots\dots(59)$$

$$x = -\kappa^{-1} (\gamma M + H) \quad \dots\dots\dots(60)$$

となる。図のような最も単純な場合を例にとれば、

$$M = -Hl - Px$$

$$x = \frac{l^3}{3EI - Pl^2} H$$

$3EI = Pl^2$ の場合には解は存在しない。これは $H=0$ でない限り、変形は無限大となることを意味し、 $3EI < Pl^2$ のときは、 H と x はたがいに逆向きとなる。

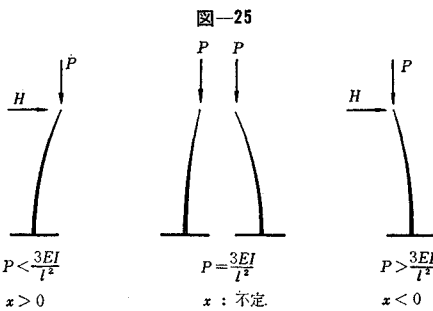
このように、式 (59) においても $t - \gamma^* \kappa^{-1} \gamma$ の行列式が 0 に近くなると吊橋本体に与える拘束力は非常に小さくなる。

そしてまた、そのような状態が最も望ましいものである。

なお、式 (57)、(58) の微分方程式に変換すれば、式 (58) は、たわみ角とたわみとの関係式に、式 (57) は、つぎようになる。

$$EI \frac{d^4 x}{dv^4} + P \frac{d^2 x}{dv^2} = 0$$

これに境界条件を入れて解き P を求めれば、図-25 の中央の場合の解が求まるわけである。すなわち、



$$Pl^2 = \left(\frac{1}{2} + m\right)^2 \pi^2 EI \quad m=0, 1, 2, \dots$$

P の最小値は、

$$Pl^2 = 2.4674 EI$$

となる。前に求めた解が $Pl^2 = 3EI$ となっているのは、途中で節点を考えなかったため、実際には x が不定となる解は、節点の数にしたがって増えその P の最小値は、微分方程式による解に急速に近づいていくことになる。

すなわち、節点数 $n=2, 3$ の場合を示せば、 $Pl^2 = 2.6353 EI$, $Pl^2 = 2.4901 EI$ となる

逆に塔頂の変位 x_0 が与えられ、これに対して塔頂水

平力、各節点の変位、曲げモーメントを求める場合がある。

このときは、レダクション法を用いるのが便利である。結果のみを記せばつぎようになる。

$$N_i = \sum_{r=0}^{r=i-1} P_r$$

$$s_i = \frac{6EI_i l_i}{6EI_i + l_i^2 N_i}$$

$$t_i = \frac{3l_i^2}{6EI_i + l_i^2 N_i}$$

$$u_i = \frac{l_i^3}{6EI_i + l_i^2 N_i}$$

$$s_i' = 1 - \frac{l_i N_i}{2EI_i} s_i, \quad t_i' = \frac{l_i}{EI_i} - \frac{l_i N_i}{2EI_i} t_i$$

$$u_i' = \frac{l_i^2}{2EI_i} - \frac{l_i N_i}{2EI_i} u_i$$

とおけば、 i 点のたわみ、たわみ角、曲げモーメントは、

$$\begin{pmatrix} x_i \\ \theta_i \\ M_i \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_i & -t_i & u_i \\ s_i' & -t_i' & u_i' & \\ N_i s_i & 1-t_i & N_i u_i - l_i & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ M_{i-1} \\ H \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(61)$$

これを

$$W_i = F_i W_{i-1} \quad \dots\dots\dots(62)$$

と表わせば、

$$W_n = F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} \dots F_2 \cdot F_1 \cdot W_0 = F W_0 \quad \dots\dots\dots(63)$$

ここで

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、 W_0 の中の未知要素は、

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{12} & f_{14} \\ f_{22} & f_{24} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(64)$$

より求まる。

5. tri-diagonal matrix の逆行列について

以上の各章に限らず、構造物の行列解析において、tri-diagonal matrix の逆行列を求めることが非常にしばしば生じる。したがってこの逆行列の簡単な計算法を知っておくと便利であるし、また、この方法をサブルーチンとしてプログラムしておけばいろいろ利用法もあると思う。以下に筆者の用いている方法を説明する。

一般形として、

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1' & a_2 & b_2 & & \\ & b_2' & a_3 & b_3 & \\ & & & \dots\dots\dots & \\ & & & & b_{n-1}' a_n \end{pmatrix}$$

