Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers*

*von Yoshio Namita***

Überblick

Hauptzweck dieser Mitteilung ist es, die Grundgleichungen von räumlichen Problemen krummer Stäbe aufzustellen, um die Gleichungen zur praktischen Anwendung, z. B. Kipp- oder Knickproblem gekrümmter Stäbe, zu bringen. Geometrische Formänderungsgrößen sind durch Vektorrechnung in bezug auf Querschnittshauptachsen erhalten, welche später in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die erst von Kirchhoff und Clebsch aufgestellt worden sind, eingetragen sind. Die für allgemeinen Fall geltenden Ergebnisse lassen sich auf den Sonderfall vom Stabe mit der in einer Ebene gekrümmten Stabachse zur Anwendung bringen. Als ein Berechnungsbeispiel ist das Kipp-Problem des kreisförmigen Bogenträgers mit gleichförmig verteilter Belastung behandelt.

1. Vorwort

In dieser Mitteilung sind der Kraftverlauf und die Formänderungen von räumlich zweifach gekrümmten Stäben nach der Theorie II. Ordnung (2), worin der Einfluß der Verformung der Stabachse auf die Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt ist und Überlagerungsgesetz verzichtet wird, analysiert. Die baustatische Theorie II. Ordnung oder "Verformungstheorie" von krummen Stäben ist selbstverständlich den Lösungen mancher Probleme unerläßlich, z. B. Knick-, Kipp- oder Tragfähigkeitsproblem des Bogenträgers, doch im allgemeinen sind Schwierigkeiten zum Lösen der davon hervorkommenden Grundgleichungen unvermeidlich, so daß manche wichtigen Probleme heute noch ungelöst bleiben.

Der Verfasser schreibt hier von gründlichem Standpunkt aus die Formänderungsgrößen der beliebig krummen Stäbe vor, um die in allgemeinste sogenannte Kirchhoff-Clebschsche Gleichgewichtsbedingungen (3) einzutragen, welche die zweckmäßigen Grundgleichungen des jetzigen Problems hervorbringen. Zwar die wichtigste Rolle in Theorie II. Ordnung spielen diese Gleichgewichtsbedingungen, in welchen der Einfluß der Deformation streng berücksichtigt wird, allein zur Anwendung auf praktische Baustäbe, die man nicht mehr als lineare Bauelemente annehmen kann, ist etwas Modifikation genötigt, was später in der Hauptrede erwähnt wird.

Die Probleme hinsichtlich der Knickung und Kippung der Bogenträger sind die typische im Anwendungsgebiete der Theorie II. Ordnung; doch gar manches solcher wichtigen Probleme bleibt noch ungelöst. Die in dieser Mitteilung eingeführten Grundgleichungen werden uns einen Grund legen, um die noch weiteren Erkenntnissen von krummen Stäben zu entwickeln.

Hier seien einige vergangenen Forschungsarbeiten von krummen Stäben angeführt. Heute ist es allbekannt, daß es zahlreiche Arbeiten hinsichtlich der Knickung des Bogenträgers innerhalb der Krümmungsebene gibt (4), und hier darf einzelne Anführung darüber verzichtet seien, während man nur wenige Arbeiten über die Kippung des Bogenträgers ausfindig machen kann. S. Timoshenko (5) behandelte zuerst den einfachsten Fall, welcher doch heute für praktische Bauwerke selten zur Anwendung kommt. M. Essringer (6), (7) hat die Lösungen von Kipp-Problemen der Rahmenecken mit Rechteckquerschnitt und des kreisförmigen Stabes mit I-Querschnitt erhalten. Die Forschungsarbeit von K. Klöppel und W. Protte (8) ist uns sehr interessant, die den in der Richtung der Bogensehne belasteten, kreisförmig gekrümmten Stab behandelte und zahlreiche nützliche Ergebnisse erreichte. Y. Fukasawa (9) handelte von der Stabilität des kreisförmigen Bogenträgers mit Radialbelastung—das ist also näherungsweise durch unveränderliche Normalkraft beansprucht—nach der energetischen Methode und machte verschiedene wichtige Eigenschaften klar. Stabilitätsproblem kreisförmigen Bogenträgers mit Windverbände wurde von S. Kuranshi (10) behandelt, der löste auch eine Aufgabe auf den Bogenträger mit horizontaler Seitenbelastung (11) nach Theorie I. Ordnung und also

* Diese Abhandlung ist teilweise die Wiedergabe aus der Literatur (1).

** Dr. Ing., a. o. Professor, Technische Fakultät (Bauingenieurwesen), Osaka-Universität, Osaka, Japan.

berücksichtigte darin keinen Einfluß der Normalkraft auf Seitenverschiebungen. In der Mitteilung von P. Layrangue (12) handelt es sich um einen Bogen mit Normal- und Seitenbelastungen, worin aber es der Gleichgewichtsbedingung an Genauigkeit fehlt. Die Forschungsarbeit von R. Dabrowski (13), die ein typisches Beispiel der Theorie II. Ordnung aufstellte, ist uns beträchtlich andeutungsvoll, obwohl es sich um nur geraden Träger mit gleichzeitiger Biegung und Torsion handelt.

2. Geometrie der Formänderung von krummen Stäben

Man stellt zunächst über die allgemeinen geometrischen Formänderungsgrößen des beliebig belasteten, zweifach räumlich gekrümmten Stabes Überlegungen an. In Abb. 1 (a) zeigt l_1 die Stabachsenlinie des

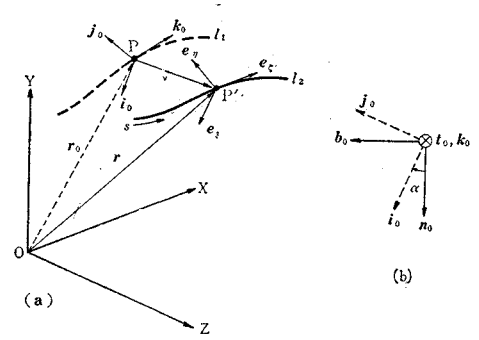

Abb. 1 Koordinaten- und Einheitsvektorensystem.

unbelasteten unverformten Stabes, die geht aber nach beliebiger Belastung bis zu l_2 über. Jedem Punkt P der Stabachse l_1 seien nun die geometrischen Einheitsvektoren $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{n}_0$ und $\boldsymbol{b}_0$ zugeordnet, wobei $\boldsymbol{t}_0$ in die Richtung der Tangente fällt, $\boldsymbol{n}_0$ den Hauptnormalenvektor bedeutet und der Binormalenvektor $\boldsymbol{b}_0$ damit definiert sein soll, daß diese ein Rechtssystem bilden, d. i., $\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{t}_0\times\boldsymbol{n}_0$. Die Querschnittshauptachsen fallen nicht notwendig mit $\boldsymbol{n}_0$ und $\boldsymbol{b}_0$ zusammen, und man legt zweite Einheitsvektorensystem $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ fest, derart, daß $\boldsymbol{i}_0$ und $\boldsymbol{j}_0$ mit Querschnittshauptachsen zusammenfallen, und $\boldsymbol{k}_0\equiv\boldsymbol{t}_0$. Dann gilt die Transformation

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}_0&=\boldsymbol{n}_0\cos\alpha+\boldsymbol{b}_0\sin\alpha\\ \boldsymbol{j}_0&=-\boldsymbol{n}_0\sin\alpha+\boldsymbol{b}_0\cos\alpha\end{aligned}\right\},\quad\cdots\cdots(1)_{a,b}$$

wobei α den Winkel zwischen $\boldsymbol{i}_0$ und $\boldsymbol{n}_0$ bedeutet (Abb. 1(b)).

Die geometrischen Krümmung K_0 und Windung T_0 der Raumkurve sind in der Form

$$K_0=\sqrt{\boldsymbol{r}_0''\cdot\boldsymbol{r}_0''},\quad T_0=-(\boldsymbol{r}_0'\cdot\boldsymbol{r}_0''\cdot\boldsymbol{r}_0''')/K_0^2\quad\cdots\cdots(2)_{a,b}$$

beschrieben, wobei $(\ )'$ die Ableitung nach der Stabachsenkoordinate s und $\boldsymbol{r}_0$ den Fahrstrahl am Punkt P bedeuten bzw.

Nun gilt Serret-Frenetsche Formeln

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{t}_0'&=K_0\boldsymbol{n}_0\\ \boldsymbol{n}_0'&=T_0\boldsymbol{b}_0-K_0\boldsymbol{t}_0\\ \boldsymbol{b}_0'&=-T_0\boldsymbol{n}_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)_{a-c}$$

Die Eintragung der Gl. (1) in Formeln (3) liefert die Gleichungen zur Verbindung der Einheitsvektoren $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ mit ihren Ableitungen $(\boldsymbol{i}_0', \boldsymbol{j}_0', \boldsymbol{k}_0')$, d. h.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_0'\\ \boldsymbol{j}_0'\\ \boldsymbol{k}_0'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \tilde{T}_0 & -K_0\cos\alpha\\ -\tilde{T}_0 & 0 & K_0\sin\alpha\\ K_0\cos\alpha & -K_0\sin\alpha & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_0\\ \boldsymbol{j}_0\\ \boldsymbol{k}_0\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots(4)$$

dabei ist

$$\tilde{T}_0=T_0+d\alpha/ds,\quad\cdots\cdots(5)$$

die man die aufs System $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ bezogene Windung nennt.

Man ordnet das Koordinatensytem (ξ, η, ζ) am auf der Stabachse liegenden Punkt P zu, wobei man die Richtungen der ξ-, η- und ζ-Achse mit denen der Einheitsvektoren, $\boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{j}_0$ und $\boldsymbol{k}_0$ bzw. übereinstimmen läßt.

Nun verwandeln sich die Einheitsvektoren $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ am Punkt P in $(\boldsymbol{i}_0+d\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0+d\boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0+d\boldsymbol{k}_0)$, wenn sich der Punkt P auf der Achsenlinie um ds bewegt (Abb. 2). In Abb. 2 nennen wir $K_{\eta 0}=d\theta/ds$ die

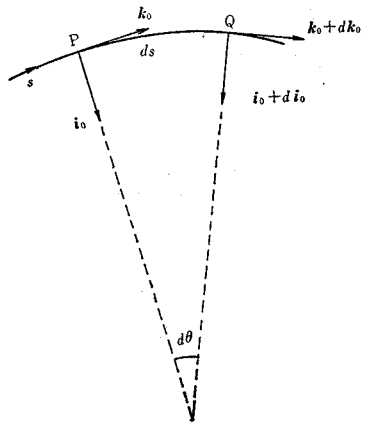

Abb. 2 Differentialelement des räumlich gekrümmten Stabes, seine Krümmung.

Krümmung um η-Achse und nach Vektorrechnung wird $K_{\eta 0}$ mit skalarem Produkt

$$K_{\eta 0}=-\boldsymbol{i}_0'\cdot\boldsymbol{k}_0\quad\cdots\cdots(6)_a$$

beschrieben. In ähnlicher Weise kann man die Krümmung um ξ-Achse, $K_{\xi 0}$, und die Windung um ζ-Achse, $K_{\zeta 0}$, bekommen, das sind

$$\left.\begin{aligned}K_{\xi 0}&=-\boldsymbol{k}_0'\cdot\boldsymbol{j}_0\\ K_{\zeta 0}&=\boldsymbol{i}_0'\cdot\boldsymbol{j}_0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)_{b,c}$$

Substituiert man Gln. (4) in Gln. (6), so gelangt man zu

$$K_{\xi 0}=K_0\sin\alpha,\ K_{\eta 0}=K_0\cos\alpha,\ K_{\zeta 0}=\tilde{T}_0.\cdots(7)_{a-c}$$

Nun geben wir auf verformten Stab acht. Wenn sich die Einheitsvektoren $\boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{j}_0$ und $\boldsymbol{k}_0$ nach der Verformung der Stabachse in $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ und $\boldsymbol{e}_\zeta$ bzw. verwandeln (Abb. 1(a)), dann gilt im allgemeinen folgender Transformationssatz,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\xi \\ \boldsymbol{e}_\eta \\ \boldsymbol{e}_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{i}_0) & (\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{j}_0) & (\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{k}_0) \\ (\boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{i}_0) & (\boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{j}_0) & (\boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{k}_0) \\ (\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0) & (\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{j}_0) & (\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{k}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_0 \\ \boldsymbol{j}_0 \\ \boldsymbol{k}_0 \end{bmatrix} \cdots(8)$$

wobei $(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{i}_0)$ das skalare Produkt von $\boldsymbol{e}_\xi$ und $\boldsymbol{i}_0$, nämlich den Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{e}_\xi$ und $\boldsymbol{i}_0$, bedeutet, d. h. $(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{i}_0)=\cos(\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{i}_0)$, usw. Bei Theorie I. und II. Ordnung ist es stets vorausgesetzt, daß

$$\left.\begin{aligned} &(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{i}_0)=(\boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{j}_0)=\cos\beta\fallingdotseq 1 \\ &(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{j}_0)=-(\boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{i}_0)=\sin\beta\fallingdotseq\beta \\ &(\boldsymbol{e}_\xi\cdot\boldsymbol{k}_0)\fallingdotseq-(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0) \\ &(\boldsymbol{e}_\eta\cdot\boldsymbol{k}_0)\fallingdotseq-(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{j}_0) \\ &(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{k}_0)\fallingdotseq 1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(9)_{a-e}$$

wobei β der Winkel zwischen $\boldsymbol{e}_\xi$ und $\boldsymbol{i}_0$ ist.
Die übrigen skalaren Produkte $(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0)$ und $(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{j}_0)$ werden nach folgender Weise erhalten.

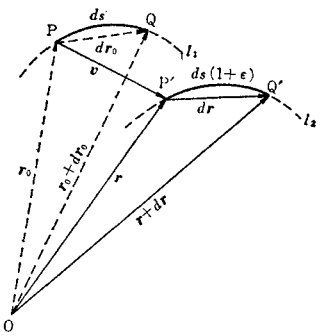

Abb. 3 Verschiebung und Ausdehnung des Differentialelementes.

In Abb. 3 zeigt $\widehat{PQ}(=ds)$ ein auf der unverformten Stabachse liegendes Differentialelement, das aber sich in einem Belastungszustand zu $\widehat{P'Q'}(=ds(1+\varepsilon))$ verschiebt und sich um $\varepsilon\cdot ds$ ausdehnt, wobei ε die Einheitslängenänderung bedeutet. Im Grenzfalle $ds\to 0$

$$d\boldsymbol{r}=(1+\varepsilon)ds\cdot\boldsymbol{e}_\zeta,$$

da $d\boldsymbol{r}$ in tangentiale Richtung gerichtet ist. Also

$$(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_\zeta=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{v}}{ds}+\frac{d\boldsymbol{r}_0}{ds},$$

wobei $\boldsymbol{v}$ ein Verschiebungsvektor ist. Man erhält das skalare Produkt $(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0$ mit Rücksicht auf Gl. (4) und darauf, daß $d\boldsymbol{r}/ds=\boldsymbol{k}_0$, wie folgt,

$$(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0=\frac{du}{ds}-v\tilde{T}_0+wK_0\cos\alpha \quad\cdots(10)$$

wobei u, v und w die Komponenten des Vektor $\boldsymbol{v}$ in ξ-, η- und ζ-Richtungen sind bzw. Ähnlich erhält man

$$(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{j}_0=\frac{dv}{ds}+u\tilde{T}_0-wK_0\sin\alpha. \quad\cdots(11)$$

Die Krümmungen um ξ- und η-Achsen und die Windung um ζ-Achse lassen sich in gleicher Weise wie Gln. $(6)_{a-c}$ beschreiben, das sind

$$K_\xi=\boldsymbol{e}_\eta'\cdot\boldsymbol{e}_\zeta$$
$$K_\eta=\boldsymbol{e}_\zeta'\cdot\boldsymbol{e}_\xi$$
$$K_\zeta=\boldsymbol{e}_\xi'\cdot\boldsymbol{e}_\eta.$$

Weiter liefert die Bildung des skalaren Produktes $(1+\varepsilon)\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{k}_0$ mit Rücksicht auf Beziehung (9), $(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{k}_0\fallingdotseq 1)$, die Ausdehnung der Stabachse ε, d. i.

$$\varepsilon=\frac{dw}{ds}-uK_0\cos\alpha+vK_0\sin\alpha \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

Hierdurch kann man K_ξ, K_η und K_ζ aus der Beziehungen (8) bis (12) in der Form

$$\left.\begin{aligned} K_\xi=&K_0\sin\alpha+K_0\beta\cos\alpha \\ &-\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}+u\tilde{T}_0-wK_0\sin\alpha\right) \\ &-\tilde{T}_0\left(\frac{du}{ds}-v\tilde{T}_0+wK_0\cos\alpha\right) \\ &-\beta\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}-v\tilde{T}_0+wK_0\cos\alpha\right) \\ K_\eta=&K_0\cos\alpha-K_0\beta\sin\alpha \\ &+\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}-v\tilde{T}_0+wK_0\cos\alpha\right) \\ &-\tilde{T}_0\left(\frac{dv}{ds}+u\tilde{T}_0-wK_0\sin\alpha\right) \\ &+\beta\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}+u\tilde{T}_0-wK_0\sin\alpha\right) \\ K_\zeta=&\tilde{T}_0+\frac{d\beta}{ds}+K_0\cos\alpha\left(\frac{dv}{ds}+u\tilde{T}_0\right. \\ &\left.-wK_0\sin\alpha\right)+K_0\sin\alpha\left(\frac{du}{ds}-v\tilde{T}_0\right. \\ &\left.+wK_0\cos\alpha\right)+\left(\frac{dv}{ds}+u\tilde{T}_0-wK_0\sin\alpha\right)\cdot \\ &\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}-v\tilde{T}_0+wK_0\cos\alpha\right) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)_{a-c}$$

beschreiben. Die letzten nonlinearen Glieder in Gln. $(13)_{a-c}$ werden in Theorie I. Ordnung stets vernachlässigt als die infinitesimalen kleinen Größen, doch in Theorie II. Ordnung ist es nicht immer zulässig, diese wegzulassen.

Als ein Beispiel sei der Sonderfall, wenn $\alpha=\pi/2$, $K_0=1/R$ und $\tilde{T}_0=0$ (kreisförmiger Stab mit einfach

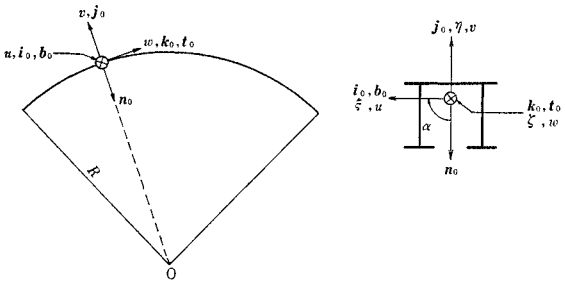

Abb. 4 Koordinatensystem von kreisförmig gekrümmten Stabe mit einfach symmetrischem Querschnitt.

symmetrischem, konstantem Querschnitt), aufgenommen (Abb. 4). In diesem Falle aus Gln. (12) und (13) folgt

$$\left.\begin{aligned} K_\xi &= \frac{1}{R} - \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{R}\cdot\frac{dw}{ds} - \beta\cdot\frac{d^2u}{ds^2} \\ K_\eta &= -\frac{\beta}{R} + \frac{d^2u}{ds^2} + \beta\cdot\left(\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{1}{R}\cdot\frac{dw}{ds}\right) \\ K_\zeta &= \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{R}\cdot\frac{du}{ds} - \frac{du}{ds}\cdot\left(\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{1}{R}\cdot\frac{dw}{ds}\right) \\ \varepsilon &= \frac{dw}{ds} + \frac{v}{R} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)_{a-d}$$

wobei u, v und w die Verschiebungskomponenten bedeuten, deren positiven Richtungen in Abb. 4 dargestellt sind.

3. Gleichgewichtsbedingungen

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die erst von Kirchhoff und Clebsch eingeführt worden sind, für beliebig belasteten und verformten Stab werden hier eingeschrieben.

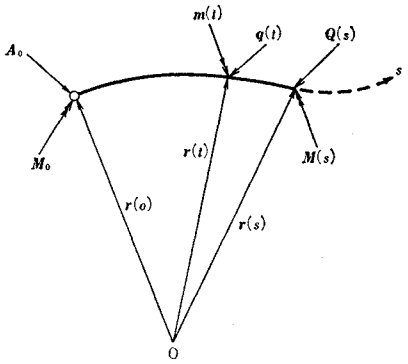

Abb. 5 Belastungen und Schnittkräfte.

Man legt die folgenden Bezeichnungen fest.

$\boldsymbol{M}(s)$; das resultierende Moment der Biege- und Drehmomente am beliebigen Querschnitt des Stabes, das hat die Komponenten M_ξ, M_η und M_ζ in ξ-, η- und ζ-Richtungen bzw., die positiv sind, wenn die ξ-, η- und ζ-Achsen im Sinne der rechtsgängigen Schraube verdrehen;

$\boldsymbol{Q}(s)$; die resultierende Kraft der Quer- und Normalschnittkräfte an jedem Querschnitt, die hat die Komponenten Q_ξ, Q_η und Q_ζ in ξ-, η- und ζ-Richtungen bzw., die positiv sind, wenn die nach positiven Richtungen der ξ-, η- und ζ-Achsen gerichtet sind;

$\boldsymbol{m}(s)$; die Momentenbelastung pro Längeneinheit der Stabachse, die hat die Komponenten $\boldsymbol{m}_\xi$, $\boldsymbol{m}_\eta$ und $\boldsymbol{m}_\zeta$, deren positiven Richtungen gleich definiert sind wie M_ξ usw.;

$\boldsymbol{q}(s)$; die resultierende Quer- und Normalbelastung pro Längeneinheit der Stabachse, die hat die Komponenten q_ξ, q_η und q_ζ, deren positiven Richtungen gleich sind wie Q_ξ usw. (Abb. 5).

Also

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}(s) &= \boldsymbol{Q}_\xi\boldsymbol{e}_\xi + \boldsymbol{Q}_\eta\boldsymbol{e}_\eta + \boldsymbol{Q}_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta \\ \boldsymbol{M}(s) &= M_\xi\boldsymbol{e}_\xi + M_\eta\boldsymbol{e}_\eta + M_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(15)_{a,b}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{m}(s) &= m_\xi\boldsymbol{e}_\xi + m_\eta\boldsymbol{e}_\eta + m_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta \\ \boldsymbol{q}(s) &= q_\xi\boldsymbol{e}_\xi + q_\eta\boldsymbol{e}_\eta + q_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(16)_{a,b}$$

Die Abb. 5 stellt diesen allgemeinen Belastungszustand dar, worin $\boldsymbol{A}_0$ und $\boldsymbol{M}_0$ die resultierende Auflagerkraft und -moment zeigen bzw., und $\boldsymbol{r}(s)$ den Fahrstrahl von Anfangspunkt des raumfesten Koordinatensystem bis zu jedem Punkt auf der Stabachsenlinie bedeutet.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten also

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{Q}(s) + \boldsymbol{A}_0 + \int_0^s \boldsymbol{q}(t)dt = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{M}(s) + \boldsymbol{M}_0 + \{\boldsymbol{r}(0) - \boldsymbol{r}(s)\}\times\boldsymbol{A}_0 + \int_0^s \boldsymbol{m}(t)dt \\ &\qquad + \int_0^s \{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(s)\}\times\boldsymbol{q}(t)dt = \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(17)_{a,b}$$

Differentiieren der Gln. (17) nach s liefert

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}\boldsymbol{Q}(s) &= -\boldsymbol{q}(s) \\ \frac{d}{ds}\boldsymbol{M}(s) &= -\boldsymbol{e}_\zeta\times\boldsymbol{Q}(s) - \boldsymbol{m}(s) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(18)_{a,b}$$

Trägt man die Beziehungen (15) auf Gln. (18) ein, dann lassen sich die letztere umformen wie folgt

$$\left.\begin{aligned} -\boldsymbol{q}(s) &= \boldsymbol{Q}_\xi'\boldsymbol{e}_\xi + \boldsymbol{Q}_\eta'\boldsymbol{e}_\eta + \boldsymbol{Q}_\zeta'\boldsymbol{e}_\zeta + \boldsymbol{Q}_\xi\boldsymbol{e}_\xi' \\ &\qquad + \boldsymbol{Q}_\eta\boldsymbol{e}_\eta' + \boldsymbol{Q}_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta' \\ -\boldsymbol{e}_\zeta\times\boldsymbol{Q}(s) - \boldsymbol{m}(s) &= M_\xi'\boldsymbol{e}_\xi + M_\eta'\boldsymbol{e}_\eta + M_\zeta'\boldsymbol{e}_\zeta \\ &\qquad + M_\xi\boldsymbol{e}_\xi' + M_\eta\boldsymbol{e}_\eta' + M_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(19)_{a,b}$$

Bildet man die skalaren Produkte durch wechselseitigen Multiplikationen auf beiden Seiten der Gln. (19) von $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ und $\boldsymbol{e}_\zeta$, nachdem man Gl. $(15)_a$ für $\boldsymbol{Q}(s)$ und Gln. $(16)_{a,b}$ für $\boldsymbol{q}(s)$ und $\boldsymbol{m}(s)$ substituiert hat, erhält man die folgenden Gleichgewichtsbedingungen,

$$\left.\begin{aligned} -q_\xi(s) &= Q_\xi' - K_\zeta Q_\eta + K_\eta Q_\zeta \\ -q_\eta(s) &= Q_\eta' - K_\xi Q_\zeta + K_\zeta Q_\xi \\ -q_\zeta(s) &= Q_\zeta' - K_\eta Q_\xi + K_\xi Q_\eta \\ -m_\xi(s) + Q_\eta &= M_\xi' - K_\zeta M_\eta + K_\eta M_\zeta \\ -m_\eta(s) - Q_\xi &= M_\eta' - K_\xi M_\zeta + K_\zeta M_\xi \\ -m_\zeta(s) &= M_\zeta' - K_\eta M_\xi + K_\xi M_\eta \end{aligned}\right\} \cdots(20)_{a-f}$$

Das Gleichungssystem ist uns noch nicht vollständig, um alle Unbekannten klar zu machen, da es zehn Unbekannten Q_ξ, Q_η, Q_ζ, M_ξ, M_η, M_ζ, u, v, w und β gibt. Beim Stab mit doppelt- oder punktsymmetrischem Querschnitt kann man die noch benötigten Beziehungen nach Elastizitätstheorie in der Form

$$\left.\begin{aligned} M_\xi(s) &= EJ_x(K_\xi - K_{\xi 0}) \\ M_\eta(s) &= EJ_y(K_\eta - K_{\eta 0}) \\ M_\zeta(s) &= \overline{GI}(K_\zeta - K_{\zeta 0}) - EC_w(K_\zeta - K_{\zeta 0})'' \\ Q_\zeta(s) &= EF\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(21)_{a-d}$$

beschreiben, wobei EJ_x und EJ_y die Biegesteifigkeiten in bezug auf ξ- und η-Achse bzw., $\overline{GI}$ die reduzierte Drillsteifigkeit*, C_w den Wölbwiderstand und F die Querschnittsfläche bedeuten. Für allgemeinen Fall des unsymmetrischen Querschnitts ist einige Modifikation von Gln. (21) benötigt (vgl. mit dem folgenden Abschnitt).

4. Grundgleichungen für den Stab mit in einer Ebene gekrümmter Stabachse

In diesem Abschnitt sind die Grundgleichungen für den Stab, dessen Stabachse die Form einer ebenen Kurve annimmt, nach obenerwähnten Grundformeln angegeben. Bei Theorie II. Ordnung ist es nicht immer gültig, die nonlinearen Glieder in Gln. (13) zu vernachlässigen als unendlich kleine Größen, wodurch wir hiernach die in Gln. (13) gegebenen Krümmung und Windung anwenden, wie sie sind.

Eliminiert man Q_ξ und Q_η in Gln. $(20)_{a-f}$, so gelangt man zu den vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&Q_\zeta'+K_\eta M_\eta'+K_\xi M_\xi'=-q_\zeta-K_\xi m_\xi-K_\eta m_\eta\\
&M_\xi''+(K_\eta M_\zeta)'-(K_\zeta M_\eta)'-K_\zeta M_\eta'-K_\xi Q_\zeta\\
&\qquad=-q_\eta-m_\xi'+K_\zeta m_\eta\\
&-M_\eta''+(K_\xi M_\zeta)'-(K_\zeta M_\xi)'-K_\zeta M_\xi'+K_\eta Q_\zeta\\
&\qquad=-q_\xi+m_\eta'+K_\zeta m_\xi\\
&M_\zeta'-K_\eta M_\xi+K_\xi M_\eta=-m_\zeta
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(22)_{a-d}$$

wobei die Krümmungen und Windung nach Verformen (K_ξ, K_η und K_ζ) aus Gln. (13) in der Form

$$\left.\begin{aligned}
&K_\xi=K_{\xi0}-v''+(wK_{\xi0})'\\
&\qquad+\beta\cdot\{K_{\eta0}-u''-(wK_{\eta0})'\}\\
&K_\eta=K_{\eta0}+u''+(wK_{\eta0})'\\
&\qquad-\beta\cdot\{K_{\xi0}-v''+(wK_{\xi0})'\}\\
&K_\zeta=\beta'+K_{\eta0}(v'-wK_{\xi0})\\
&\qquad+(u'+wK_{\eta0})\cdot\{K_{\xi0}-v''+(wK_{\xi0})'\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(23)_{a-c}$$

vorgebracht werden.

Die Schnittkräfte in Gln. (21) müssen jetzt nach folgender weise umgeschrieben werden. In Abb. 6 bezeichnet M den Schubmittelpunkt, dessen Lage

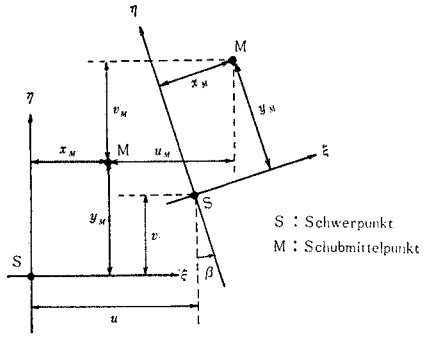

Abb. 6 Verschiebung und Verdrehung der Hauptträgheitsachsen.

bekannt sei wie (x_M, y_M), und u_M und v_M seien Verschiebungen des M in ξ- und η-Richtungen, also aus Abb. 6

$$u_M=u-y_M\beta,\quad v_M=v+x_M\beta$$

Weiter erhält man die tangentiale Verschiebung des M, nämlich

$$\begin{aligned}
w_M&=w-x_M(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0)-y_M(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{j}_0)\\
&=w(1-x_MK_{\eta0}+y_MK_{\xi0})-x_Mu'-y_Mv',
\end{aligned}$$

da die skalaren Produkte $(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{i}_0)$ und $(\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{j}_0)$ die Neigungswinkel des Querschnittes um η- und ξ-Achse bedeuten bzw. Die Beachtung, daß die Querkräfte Q_ξ und Q_η durch den Schubmittelpunkt hindurchgehen müssen, fordert es uns, die in Gln. (21) hervorkommenden u, v und w auf u_M, v_M und w_M umzuschreiben bzw., und der Gl. $(21)_c$ die Glieder $-Q_\xi y_M$ und $Q_\eta x_M$ hinzuzufügen, was schließlich die folgenden Gln. (24) liefert.

$$\left.\begin{aligned}
M_\xi&=EJ_x[\beta\cdot[K_{\eta0}-u''-(y_M\beta)''-\{K_{\eta0}(w\\
&\qquad-x_Mu'-y_Mv')\}']-v''-(x_M\beta)''\\
&\qquad+\{K_{\xi0}(w-x_Mu'-y_Mv')\}']\\
M_\eta&=EJ_y[-\beta\cdot[K_{\xi0}-v''-(x_M\beta)''+\{K_{\xi0}(w\\
&\qquad-x_Mu'-y_Mv')\}']+u''-(y_M\beta)''\\
&\qquad+\{K_{\eta0}(w-x_Mu'-y_Mv')\}']\\
M_\zeta&=\overline{GI}[\beta'+K_{\eta0}\{v'+(x_M\beta)'-K_{\xi0}(w-x_Mu'\\
&\qquad-y_Mv')\}+[u'-(y_M\beta)'+K_{\eta0}(w-x_Mu'\\
&\qquad-y_Mv')]\times[K_{\xi0}-v''-(x_M\beta)''\\
&\qquad+\{K_{\xi0}(w-x_Mu'-y_Mv')\}']]\\
&\qquad-EC_w[\beta'''+[K_{\eta0}\{v'+(x_M\beta)'-K_{\xi0}(w\\
&\qquad-x_Mu'-y_Mv')\}]''+[\{u'-(y_M\beta)'\\
&\qquad+K_{\eta0}(w-x_Mu'-y_Mv')\}\times[K_{\xi0}-v''\\
&\qquad-(x_M\beta)''+\{K_{\xi0}(w-x_Mu'\\
&\qquad-y_Mv')\}']]'']\\
&\qquad-y_MQ_\xi+x_MQ_\eta\\
Q_\zeta&=EF(w'-K_{\eta0}u+K_{\xi0}v)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(24)_{a-d}$$

Die Eintragung der Gln. (24) in die Gleichgewichtsbedingungen (22) liefert die Grundgleichungen zur Bestimmung der Verschiebungskomponenten u, v, w und β, was aber in allgemeinen Fälle die nonlinearen simultanen Differentialgleichungen gibt, die

---

* Die reduzierte Drillsteifigkeit $\overline{GI}$ kann in der Form

$$\overline{GI}=GI+Q_\zeta i_p^2+M_\xi k_x+M_\eta k_y$$

geschrieben werden. Dabei sind

$$i_p^2=\frac{1}{F}\int_F(x^2+y^2)dF$$

$$k_x=\frac{1}{J_x}\int_F y(x^2+y^2)dF$$

$$k_y=\frac{1}{J_y}\int_F x(x^2+y^2)dF$$

und ist GI die St. Venantsche Drillsteifigkeit.

Man erhält die reduzierte Drillsteifigkeit $\overline{GI}$ aus der Betrachtung, daß die bei der Verdrillung der Längsfasern erfahrende Schrägstellung derselben die zusätzlichen Torsionskräfte liefert. (Vgl. z. B. Literatur (2) od. (14).)

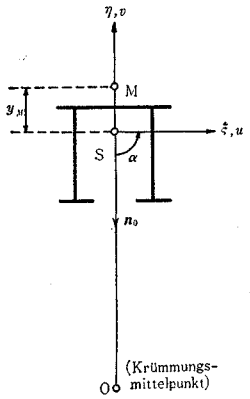

Abb. 7 Einfach symmetrischer Querschnitt, Schwer-und Schubmittelpukt.

sich der Schwierigkeit zur Lösung nicht entledigen können. Aber, bei den praktischen wichtigen Sonderfällen werden die Gleichungen ziemlich einfach, und die Annahme angemessener Näherungslösungen führt uns oft ins zufriedene Resultat.

Sonderfall : der Querschnitt sei symmetrisch in bezug auf η-Achse, deren positive Richtung mit der entgegengesetzten des Hauptnormalenvektor übereinstimme (Abb. 7). Da nun $x_M=K_{\eta 0}=0$, $\alpha=\pi/2$ und $K_{\xi 0}=K_0$, werden die Krümmungen und Windung in der Form

$$\left.\begin{aligned} K_\xi &= K_0-v''+(wK_0)'+\beta u'' \\ K_\eta &= u''-\beta\{K_0-v''+(wk_0)'\} \\ K_\zeta &= \beta'+u'\{K_0-v''+(wK_0)'\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(25)_{\text{a-c}}$$

beschrieben aus Gln.(13). Weiter erhält man die Schnittkräfte wie folgt

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= EJ_x[\beta\{(y_M\beta)''-u''\}-v'' \\ &\quad +\{K_0(w-y_Mv')\}'] \\ M_\eta &= EJ_y[-\beta[K_0-v''+\{K_0(w-y_Mv')\}'] \\ &\quad -u''-(y_M\beta)''] \\ M_\zeta &= \overline{GI}[\beta'+\{u'-(y_M\beta)'\}\times[K_0-v'' \\ &\quad +\{K_0(w-y_Mv')\}']] \\ &\quad -EC_w[\beta'''+[\{u'-(y_M\beta)'\}\times[K_0-v'' \\ &\quad +\{K_0(w-y_Mv')\}']]''] -y_MQ_\xi \\ Q_\zeta &= EF(w'+K_0v) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(26)_{\text{a-d}}$$

Substituiert man diese Schnittkräfte in die Gleichgewichtsbedingungen (20), so gelangt man zu folgenden Differentialgleichungen für u, v, w und β.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{K_0}\{EF(w'+K_0v)\}'+[EJ_x\{(K_0w)'-v''\}]' \\ &\quad +\frac{M_\eta'+m_\eta}{K_0}(u''-K_\xi\beta)=-m_\xi \\ &\quad -\frac{q_\zeta}{K_0}\left\{1+\frac{v''}{K_0}-\frac{(wK_0)'}{K_0}\right\} \\ &\frac{1}{K_0}[EJ_x\{(K_0w)'-v''\}]''-EF(w'+K_0v) \\ &\quad -\frac{1}{K_0}\{(\beta'+K_\xi u')M_\eta\}'-\frac{M_\eta'-m_\eta}{K_0}(\beta' \\ &\quad +K_\xi u')=-\frac{q_\eta+m_\xi'}{K_0}\left\{1\ \frac{v''}{K_0}-\frac{(wK_0)'}{K_0}\right\} \\ &-[EJ_y\{u''-K_\xi\beta-(y_M\beta)''\}]''+[K_\xi\{\overline{GI}(\beta' \\ &\quad +K_\xi u')-EC_w(\beta'+K_\xi u')''-Q_\xi y_M\}]' \\ &\quad -\{M_\xi(\beta'+K_\xi u')\}'-M_\xi'(\beta'+K_\xi u') \\ &\quad +Q_\zeta(u''-K_\xi\beta)=-q_\xi'+m_\eta'+K_\zeta m_\xi \\ &[\overline{GI}(\beta'+K_\xi u')-EC_w(\beta'+K_\xi u')''-Q_\xi y_M]' \\ &\quad +K_\xi EJ_y\{u''-(y_M\beta)''-K_\xi\beta\} \\ &\quad -M_\xi(u''-K_\xi\beta)=-m_\zeta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(27)_{\text{a-d}}$$

wobei man die Querkraft Q_ξ aus Gl. $(20)_e$ in der Form

$$\begin{aligned} Q_\xi = &-[EJ_y\{u''-(y_M\beta)''-K_\xi\beta\}]' \\ &-M_\xi(\beta'+K_\xi u')+K_\xi\{\overline{GI}(\beta'+K_\xi u') \\ &-EC_w(\beta'+K_\xi u')''\}-m_\eta \cdots\cdots(28) \end{aligned}$$

beschreiben kann.

Im strengen Sinne bilden diese Gleichungen im allgemeinen ein nonlineares System, da die in einigen Glieder hervorkommenden K_ξ, Q_ζ und M_ξ die Funktionen der Verschiebungen u, v, w und β sind. Doch, wenn man für K_ξ, Q_ζ und M_ξ das Resultat von Theorie I. Ordnung (Annahme der unendlich kleinen Verschiebungen) verwertet, werden die Gleichungen ein lineares System.

Ferner, wenn man voraussetzt, daß die Verschiebungen innerhalb der Schmiegungsebene, v und w, von den räumlichen, u und β, unabhängig sind, können die Gleichungen (27) in zwei miteinander unabhängigen Teile getrennt werden, nämlich für v und w

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{EFK_0}[EJ_x\{(K_0w)'-v''\}]''-w'-K_0v \\ &\quad =-\frac{m_\xi'+q_\eta}{EFK_0}\left\{1+\frac{v''}{K_0}-\frac{(K_0w)'}{K_0}\right\} \\ &\frac{1}{K_0}\{EF(w'+K_0v)\}'+[EJ_x\{(K_0w)'-v''\}]' \\ &\quad =-m_\xi-\frac{q_\zeta}{K_0}\left\{1+\frac{v''}{K_0}-\frac{(K_0w)'}{K_0}\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(29)_{\text{a,b}}$$

und für u und β

$$\left.\begin{aligned} &-[EJ_y\{u''-K_0\beta-(y_M\beta'')\}]'' \\ &\quad +[K_0\{\overline{GI}(\beta'+K_0u')-EC_w(\beta'+K_0u')'' \\ &\quad -Q_\xi y_M\}]'-\{M_\xi(\beta'+K_0u')'-M_\xi'(\beta' \\ &\quad +K_0u')+Q_\zeta(u''-K_0\beta) \\ &\quad =-q_\xi+m_\eta'+K_\zeta m_\xi \\ &[\overline{GI}(\beta'+K_0u')-EC_w(\beta'+K_0u')''-Q_\xi y_M]' \\ &\quad +K_0EJ_y\{u''-(y_M\beta)''-K_0\beta\} \\ &\quad -M_\xi(u''-K_0\beta)=-m_\zeta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(30)_{\text{a,b}}$$

Die weitere Vereinfachung ist möglich, wenn man die Dehnung der Stabachse als kleinere Größe vernachlässigt. Eliminiert man v aus Gl. (24), nachdem man $\varepsilon=0$ setzt, so wird Gln. (29) in der Form

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{K_0}\left\{EJ_x\left(\frac{w'}{K_0}\right)''\right\}''\right]'+\left[\frac{1}{K_0}\{EJ_x(K_0w)'\}''\right]' \\ &\quad +K_0\left\{EJ_x\left(\frac{w'}{K_0}\right)''\right\}'+K_0\{EJ_x(K_0w)'\}' \\ &\quad =-\left(\frac{q_\eta}{K_0}\right)'-q_\zeta \cdots\cdots(31) \end{aligned}$$

umgeschrieben. Diese Gleichung kann man als die

Grundgleichung für die Lösung der Knickung von Bogenträgern benutzen.

5. Anwendungsbeispiel——Kippung des durch gleichförmig verteilte Last beanspruchten Kreisbogens

Als ein Berechnungsbeispiel wollen wir das Kipp-Problem des kreisförmigen Bogenträgers, der durch gleichförmig verteilte Last beansprucht ist (Abb. 8), behandeln.

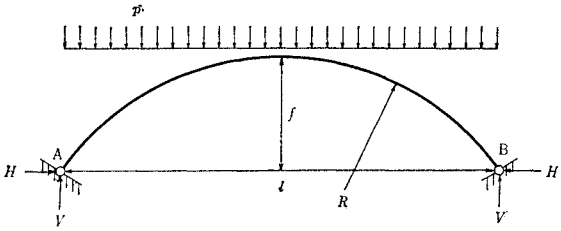

Abb. 8 Kreisförmiger Zweigelenkbogen mit gleichförmig verteilter Belastung.

Folgende Annahmen seien aufgestellt;

1) das hier behandelte System ist Zweigelenkbogen,

2) Belastung ist richtungstreu, d. i., die wirkenden Lasten verändern ihre Richtungen nicht, wenn auch der Bogen seitlich kippt,

3) der Querschnitt des Bogens ist gleichmäßig und einfach symmetrisch in bezug auf η-Achse,

4) Formänderung der Bogenachse innerhalb der Krümmungsebene kann vernachlässigt werden,

5) Querschnittsverwölbung am Stabende ist behindert.

Wir benutzen Gln. (28) und $(30)_{a,b}$ als Grundgleichungen für unsres Problem. Die Belastungswerte q_ξ, m_ξ usw. in dieser Gleichungen kann man durch Nachschlagen der Abb. 9 berechnen wie folgt

$$\left.\begin{aligned} q_\xi &= p_\xi = -\frac{p}{2}\beta(1+\cos 2\theta) \\ m_\xi &= \frac{1}{2}ep\sin 2\theta \\ m_\eta &= 0 \\ m_\zeta &= -ep_\xi = \frac{1}{2}pe\beta(1+\cos 2\theta) \end{aligned}\right\} \quad (32)_{a-d}$$

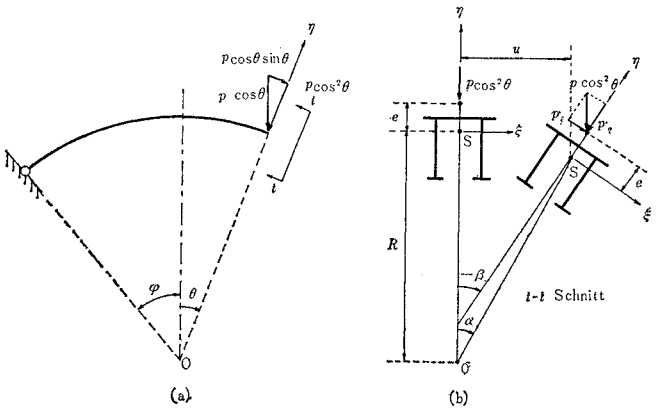

Abb. 9 Belastungszustand vor und nach Verformung.

M_ξ und Q_ζ in Gln. $(30)_{a,b}$ dürfen nach Theorie I Ordnung errechnet werden, d. s.

$$\left.\begin{aligned} M_\xi &= -\frac{pR^2}{4}\cos 2\theta + pR^2\Gamma\cos\theta - pR^2\Phi \\ Q_\zeta &= \frac{pR}{2}\cos 2\theta - pR\,\Gamma\cos\theta - \frac{pR}{2}(1+2\Gamma) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (33)_{a,b}$$

dabei sind

$$\Gamma = \frac{3(\varphi\cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi) + (7-4\bar{\kappa})\sin^3\varphi}{6\varphi(2+\cos 2\varphi+\bar{\kappa}) - 3(3-\bar{\kappa})\sin 2\varphi}$$

$$\Phi = \frac{1}{4}(4\Gamma\cos\varphi - \cos 2\varphi), \quad \bar{\kappa} = \frac{EJ_x}{R^2EF}$$

Auf solche Weise kann man die Grundgleichungen für jetziges Problem mit den Abkürzungen

$$\lambda = \frac{pR^3}{EJ_y}, \quad m = \frac{GI}{EJ_y}, \quad n = \frac{EC_w}{R^2EJ_y}, \quad \kappa = \frac{EJ_y}{R^2EF},$$

$$k_0 = \frac{i_p^2}{R^2}, \quad \nu_0 = \frac{y_M}{R}, \quad e_0 = \frac{e}{R}, \quad f_0 = \frac{k_x}{R}, \quad \alpha = \frac{u}{R},$$

$$(\ )' = \frac{d}{d\theta}$$

in der Form

$$\begin{aligned} &\alpha'''' - \left(\frac{\lambda}{2}\cos 2\theta - \Gamma\lambda\cos\theta - \frac{\lambda}{2} - 1\right)\alpha'' \\ &\quad + \left\{\left(1+\frac{e_0}{2}\right)\sin 2\theta - 2\Gamma\sin\theta\right\}\lambda\alpha' \\ &\quad - \nu_0\beta'''' + \left\{\frac{1}{4}(\nu_0-1)\lambda\cos 2\theta + \Gamma\lambda\cos\theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\nu_0\lambda - (1+\nu_0)(1+\Phi\lambda)\right\}\beta'' \\ &\quad + \left\{\left(1+\frac{e_0}{2}\right)\sin 2\theta - 2\Gamma\sin\theta\right\}\lambda\beta' \\ &\quad + \left\{\left(\frac{3}{2}+e_0\right)\frac{\lambda}{2}\cos 2\theta + \left(\frac{e_0}{2}-\Phi\right)\lambda - 1\right\}\beta = 0 \\ &-(n+\nu_0)\alpha'''' - \left\{\frac{1}{4}(f_0 - 2k_0 - \nu_0 - 1)\lambda\cos 2\theta \right. \\ &\quad + (k_0 - f_0 + \nu_0 + 1)\Gamma\lambda\cos\theta \\ &\quad \left. - m - 1 + \frac{1}{2}k_0\lambda + (f_0 - \nu_0 - 1)\Phi\lambda\right\}\alpha'' \\ &\quad - \left\{\frac{1}{2}(2k_0 - f_0 + \nu_0)\sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + (f_0 - k_0 - \nu_0)\Gamma\sin\theta\right\}\lambda\alpha' + (\nu_0^2 - n)\beta'''' \\ &\quad - \left\{\frac{1}{4}(f_0 - 2k_0)\lambda\cos 2\theta + (k_0 - f_0)\Gamma\lambda\cos\theta \right. \\ &\quad \left. - m + \frac{1}{2}k_0\lambda + f_0\Phi\lambda\right\}\beta'' \\ &\quad - \left\{\frac{1}{2}(2k_0 - f_0 + \nu_0)\sin 2\theta + (f_0 - \nu_0 \right. \\ &\quad \left. - k_0)\Gamma\sin\theta\right\}\lambda\beta' + \left\{\frac{1}{4}(2e_0 - 1)\lambda\cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. \Gamma\lambda\cos\theta + \left(\frac{e_0}{2} - \Phi\right)\lambda - 1\right\}\beta = 0 \cdots\cdots (34)_{a,b} \end{aligned}$$

beschreiben.

Wir wollen nun die Differentialgleichungen $(34)_{a,b}$ lösen unter den Randbedingungen

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \frac{d\alpha}{d\theta}=0,\ \frac{d\beta}{d\theta}=0,\ \text{für}\ \theta=\pm\varphi \qquad \cdots\cdots(35)^*$$

deren erste, zweite und dritte die Beschränkung der Verschiebung und Verdrehung des Endquerschnittes und letzte die Wölbbehinderung vorschreiben.

Da Gln. $(34)_{a,b}$ die Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten sind, kann man die genaue Lösung mit großen Schwierigkeiten erreichen. In solchem Falle kann man Galerkinsches Verfahren oft nützlich anwenden, um genügend zufriedene Näherungslösungen zu erhalten, was ja bei unsrem Problem der Fall ist.

Wenn wir die Form

$$\left.\begin{aligned}\alpha(\theta)&=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\left(\cos\frac{\pi i}{\varphi}\theta-\cos\pi i\right)\\ \beta(\theta)&=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\left(\cos\frac{\pi i}{\varphi}\theta-\cos\pi i\right)\end{aligned}\right\},\cdots\cdots\cdots(36)$$

die anschaulich die Randbedingungen (35) erfüllen, als Näherungslösungen der Gln. $(34)_{a,b}$ annehmen, dann können die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i und b_i nach Galerkinscher Methode in der Form

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l}\sigma_{ij}a_i+\sum_{j=1}^{l}\tau_{ij}b_i&=0\\ \sum_{j=1}^{l}\sigma_{ij}'a_i+\sum_{j=1}^{l}\tau_{ij}'b_i&=0\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots l) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)_{a,b}$$

beschrieben werden. Dabei sind

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{\varphi}&\left\{\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^2-\frac{\lambda}{2}-1\right\}\\ &+\frac{2i^2\pi^2}{a_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin 2\varphi\left\{\left(\frac{d_{ij}}{f_j}-3\right)\cdot\right.\\ &\left.\cdot\frac{e_0}{2}-2\right\}\lambda-\frac{2i^2\pi^2}{b_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin\varphi\cdot\\ &\cdot\left(\frac{d_{ij}}{g_j}-5\right)\Gamma\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{\varphi}&\left[-\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^4\nu_0+\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^2\cdot\right.\\ &\cdot\left\{(1+\nu_0)(1+\Phi\lambda)+\frac{\nu_0}{2}\lambda\right\}\\ &\left.+\left(\frac{e_0}{2}-\Phi\right)\lambda-1\right]+\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^2\cdot\\ &\cdot\frac{2i^2\pi^2}{a_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin 2\varphi\left\{\frac{d_{ij}}{f_j}\cdot\right.\\ &\left.\cdot(\nu_0+e_0-1)-(\nu_0+3e_0+5)\right\}\frac{\lambda}{2}\\ &-\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^2\frac{2i^2\pi^2}{b_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin\varphi\left(\frac{d_{ij}}{g_j}-5\right)\Gamma\lambda\\ &+2\sin 2\varphi\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij}^2-c_{ij}^2}-\frac{1}{f_i}-\frac{1}{f_j}+\frac{1}{4\varphi^2}\right)\cdot\\ &\cdot\left(\frac{3}{2}+e_0\right)\lambda+\frac{2}{\varphi}\left\{\left(\frac{e_0}{2}-\Phi\right)\lambda-1\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}'=\frac{\delta_{ij}}{\varphi}&\left\{-\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^2(n+\nu_0)-m-1+\frac{k_0}{2}\lambda\right.\\ &\left.+(f_0-\nu_0-1)\Phi\lambda\right\}+\frac{2i^2\pi^2}{a_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin 2\varphi\cdot\\ &\cdot\left\{\frac{d_{ij}}{f_j}\cdot\frac{1}{2}+(2k_0+\nu_0-f_0)\right\}\lambda+\frac{2i^2\pi^2}{b_{ij}^2-c_{ij}^2}\cdot\\ &\cdot\sin\varphi\left\{\frac{d_{ij}}{g_j}+2(f_0-k_0-\nu_0)+1\right\}\Gamma\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{ij}'=\frac{\delta_{ij}}{\varphi}&\left\{\left(\frac{\pi i}{\varphi}\right)^4(\nu_0^2-n)-\left(\frac{\pi i}{\varphi}\right)^2\left(m-\frac{1}{2}k_0\lambda\right.\right.\\ &\left.\left.-f_0\Phi\lambda\right)+\left(\frac{e_0}{2}-\Phi\right)\lambda-1\right\}-\left(\frac{\pi i}{\varphi}\right)^2\cdot\\ &\cdot\frac{2i^2\pi^2}{a_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin 2\varphi\left\{\left(\frac{d_{ij}}{f_j}-3\right)\nu_0-2f_0\right.\\ &\left.+4k_0\right\}\frac{\lambda}{2}+\left(\frac{\pi j}{\varphi}\right)^2\frac{2i^2\pi^2}{b_{ij}^2-c_{ij}^2}\sin\varphi\cdot\end{aligned}$$

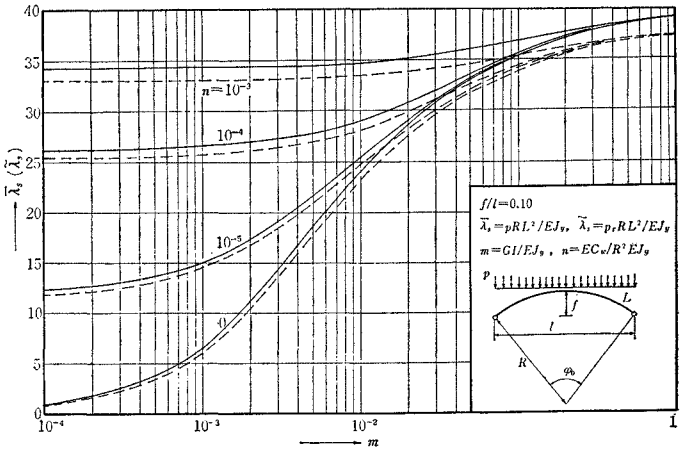

Abb. 10 Kippkoeffizient des Kreisförmigen Zweigelenkbogens.

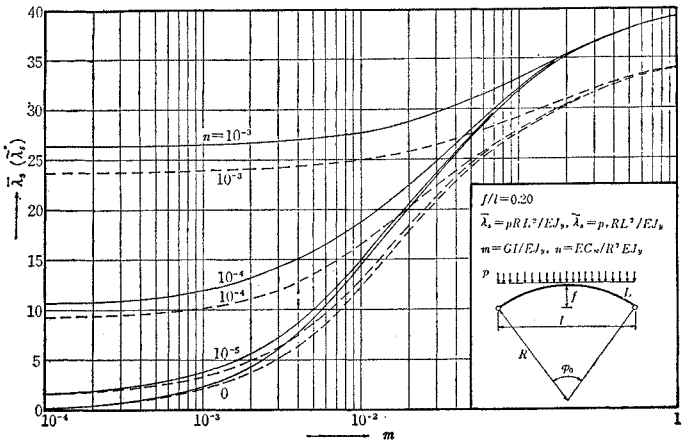

Abb. 11 Kippkoeffizient des Kreisförmigen Zweigelenkbogens

* Wenn $EC_w=0$, dann müssen diese Bedingungen in der Form $\alpha=0,\ \beta=0,\ d\alpha/d\theta=0$ für $\theta=\pm\varphi$ vorgeschrieben werden.

$$\cdot\left\{\left(\frac{d_{ij}}{g_j}-3\right)\nu_0-2k_0+2f_0\right\}\Gamma\lambda$$
$$+\sin 2\varphi\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij}^2-c_{ij}^2}-\frac{1}{f_i}-\frac{1}{f_j}+\frac{1}{4\varphi^2}\right)\cdot$$
$$\cdot(2e_0-1)\lambda+\frac{2}{\varphi}\left\{\left(\frac{e_0}{2}-\Phi\right)\lambda-1\right\}$$

$$a_{ij}=4\varphi^2-(i^2+j^2)\pi^2 \qquad f_i=4\varphi^2-i^2\pi^2$$
$$b_{ij}=\varphi^2-(i^2+j^2)\pi^2 \qquad f_j=4\varphi^2-j^2\pi^2$$
$$c_{ij}=2ij\pi^2 \qquad g_j=\varphi^2-j^2\pi^2$$
$$d_{ij}=(i^2-4j^2)\pi^2 \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

Die Nullsetzung der Nennerdeterminante der Gln. (37) liefert die Gleichung hohen Grades zur Ermittlung der Kippkoeffizienten. Aber im allgemeinen ist es beträchtlich kompliziert, die Kippkoeffizienten zu berechnen, so daß Benutzung von elektronischer Rechenmaschine unentbehrlich ist.

Einige Rechnungsergebnisse sind in Abbildungen 10 und 11 dargestellt. (Es ist vorausgesetzt, daß $\kappa=k_0=e_0=f_0=\nu_0=\bar{\kappa}=0$.) In dieser Abbildungen ist Kippkoeffizient in der Form

$\bar{\lambda}_s=pRL^2/EJ_y$ (L ist Bogenlänge.)

ausgedrückt. Gestrichelte Linien, die wir zum Nachschlagen eintragen, zeigen die von Dr. Fukasawa (9) im Fall der radialen Belastung (Abb. 12) gerechneten Werte, die in der Form

$\bar{\lambda}_s=p_rRL^2/EJ_y$ (p_r ist radiale Belastung.)

beschrieben sind.

Aus solcher Vergleichung der beiden Fälle, gleichförmiger und radialer Belastungen, befinden wir, daß die Beziehung

$$\bar{\lambda}_s\fallingdotseq\bar{\lambda}_s\sin\varphi/\varphi \quad\cdots\cdots(38)$$

näherungsweise zu Recht besteht. Diese Beziehung kommt aus der Bedingung, daß totale Belastung der beiden Fälle gleich ist ($pl=p_rL$). Also, wenn wir vorher mit dem Wert des Kippkoeffizienten im Fall der radialen Belastung bekannt sind, können wir sofort denjenigen der gleichförmig verteilten Belastung nach Beziehung (38) vermuten. (Vgl. mit (9).) Allein das ist nur für kleinen f/l-Wert gültig.

Grundgleichungen (34) haben sehr komplizierte Form und ihre Lösungen kann nicht leicht erreicht werden; doch, wenn wir voraussetzen, daß Normalkraft Q_ζ an jedem Querschnitt konstant und mit waagerechtem Auflagerdruck gleich ist ($N\fallingdotseq H$ in Abb. 13), dann werden Gln. (34) ziemlich einfach. In diesem Fall wird Q_ζ in Gl. $(33)_b$ in der Form

$$Q_\zeta=-pR\Gamma \quad\cdots\cdots(39)$$

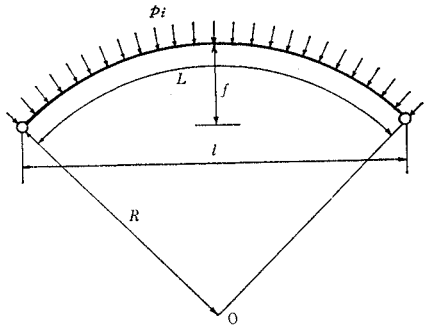

Abb. 12 Kreisbogen mit Radialbelastung.

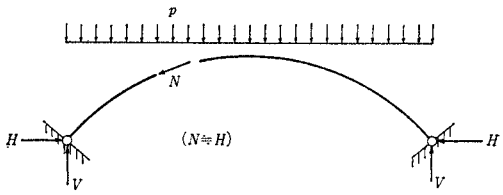

Abb. 13 Näherungssystem des Zweigelenkbogens.

beschrieben und werden Gln. (34) in folgender Form umgeschrieben,

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha''''+(1+\Gamma\lambda)\alpha''+\left\{\left(1+\frac{e_0}{2}\right)\lambda\sin 2\theta\right.\\
&\quad\left.-2\Gamma\lambda\sin\theta\right\}\alpha'-\nu_0\beta''''-\left\{(1+\nu_0)\lambda\left(\frac{1}{4}\cos 2\theta\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\Gamma\cos\theta+\Phi\right)+\nu_0(1+\Gamma\lambda)+1\right\}\beta''\\
&\quad+\left\{\left(1+\frac{e_0}{2}\right)\sin 2\theta-2\Gamma\sin\theta\right\}\lambda\beta'\\
&\quad+\left\{\left(\frac{1}{2}+e_0\right)\frac{\lambda}{2}\cos 2\theta+\Gamma\lambda\cos\theta\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{e_0}{2}-\Phi-\Gamma+\frac{1}{2}\right)\lambda-1\right\}\beta=0\\
&-(n+\nu_0)\alpha''''-\left\{(f_0-\nu_0-1)\lambda\left(\frac{1}{4}\cos 2\theta\right.\right.
\end{aligned}\right\}$$

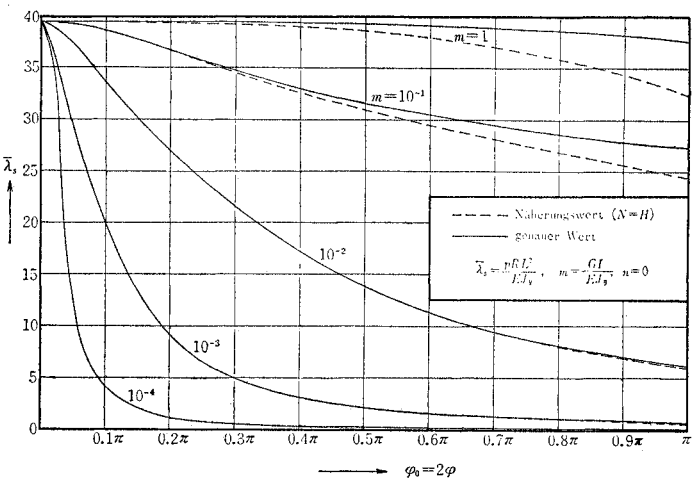

Abb. 14 Kippkoeffizient des Zweigelenkbogens in bezug auf Zentriwinkel.

$$
\left.\begin{aligned}
&-\Gamma\cos\theta+\Phi\Big)+\Gamma k_0\lambda-m-1\Big\}\alpha'' \\
&-(\nu_0-f_0)\Big(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\Gamma\sin\theta\Big)\lambda\alpha' \\
&+(\nu_0{}^2-n)\beta'''-\Big\{f_0\lambda\Big(\frac{1}{4}\cos 2\theta-\Gamma\cos\theta\Big) \\
&+(\Gamma k_0+\Phi f_0)\lambda-m\Big\}\beta'' \\
&-(\nu_0-f_0)\Big(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\Gamma\sin\theta\Big)\lambda\beta' \\
&+\Big\{\frac{1}{4}(2e_0-1)\lambda\cos 2\theta+\Gamma\lambda\cos\theta \\
&+\Big(\frac{e_0}{2}-\Phi\Big)\lambda-1\Big\}\beta=0
\end{aligned}\right\}
\qquad\cdots\cdots(40)_{a,b}
$$

$$\Big(\ (\ )'=\frac{d}{d\theta}\Big)$$

Ein Berechnungsbeispiel ist in Abb. 14 dargestellt, in welcher ausgezogene Linien die Lösungen mit Benutzung vom genauen Q_ζ-Wert (Gl. $(33)_b$) und gestrichelte Linien die vom angenäherten Q_ζ-Wert (Gl. (39)) darstellen bzw. Bei kleinen m- und n-Werten ist wenig Unterschied zu sehen, besonders beim flachen Bogen.

Außer dem oben gesagte Ergebnisse haben wir schon verschiedene Resultate bekommen (z. B. Kipp-Problem des eingespannten Bogens), doch wir wollen darüber ein anderes Mal mitteilen.

6. Schlußbemerkung

In vorigen Abschnitten 2 bis 4 sind die Grundgleichungen von den Formänderungen der gekrümmten Stäbe gegeben worden, die man für verschiedene Fälle nützlich anwenden können wird. Das in Absch. 5 eingeführte Beispiel ist nur ein Sonderfall im Anwendungsgebiete dieser Grundgleichungen. Die mit Hilfe der hier erhaltenen Grundgleichungen berechneten, mehreren Ergebnisse werden in späteren Mitteilungen veröffentlicht werden.

Bei Theorie II. Ordnung des gekrümmten Stabes wird im allgemeinen die numerische Rechnung sehr kompliziert und sind viel Schwierigkeiten unvermeidbar. In solchem Falle aber ist die elektronische Rechenmaschine die einzige, mächtige Waffe, was ja bei unsrem Problem der Fall war.

Zum Schluß muß der Verfasser hiermit Herrn Dr. Ing. Masaru Yasumi, emeritierter Professor der Osaka-Universität, recht herzlich danken daß Professor ihm so außerordentlich freundlich durch Leitungen der Forschung mit guten Ratschlägen geholfen hat.

In Durchführung dieser Forschung wurde dem Verfasser oft von Herrn M. Hayashi (Assistent in technischer Fakultät, Osaka-Universität) und Herrn T. Sakimoto (Student in Forschungskursus) durch eifrige Mitwirkung geholfen. Auch ihnen bezeigt der Verfasser seine herzliche Dankbarkeit.

Literatur

1) Namita, Y.; Die grundlegende, statische Analyse des gekrümmten Stabes, Technology Reports of the Osaka University, vol. 16, No. 714. 1966
2) Kollbrunner, C.F. und Meister, M.; Knicken, Biegedrillknicken, Kippen, 2. Aufl., Springer, Berlin 1961.
3) Love, A.E.H.; A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge Univ. Press, 1934.
4) Handbook of Elastic Stability ("Dansei-Antei-Yoran"), Korona-sha, Tokyo, 1960 (in japanischer Sprache).
5) Timoshenko, S. und Gere, J.; Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
6) Essringer, M.; Kippen von Rahmenecken mit Rechteckquerschnitt, Stahlbau, 1954, 53.
7) Essringer, M.; Flambage Lateral des Poutre en I Courbe tenant Compte de la Torsion de Flexion, Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juin, 1954.
8) Klöppel, K. und Protte, W.; Ein Beitrag zum Kipp-Problem des Kreisförmig gekrümmten Stabes, Stahlbau, 1961, 1.
9) Fukasawa, Y.; Buckling of Circular Arches by Lateral Flexure and Torsion under Axial Thrust, Transactions of J. S. C. E., No. 96, 1963 (in japanischer Sprache).
10) Kuranishi, S.; Torsional Buckling Strength of Solid Rib Arch Bridge, Transactions of J.S.C.E., No. 75, 1961 (in japanischer Sprache).
11) Kuranishi, S.; Analysis of Arch Bridge under Certain Lateral Forces, Transactions of J.S.C.E., No. 73, 1961 (in japanischer Sprache).
12) Layrangue, P.; Deformations élastique et Efforts dans un Arc circulaire, Stabilité de l'equilibre élastique, Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juin, 1959.
13) Dabrowski, R.; Zum Problem der gleichzeitigen Biegung und Torsion dünnwandiger Balken, Stahlbau, 1960, 104.
14) Bleich, F,; Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.

(Received Oct. 13, 1967)