

# 前方交会法による水中測点の位置決定法と精度\*

## METHODS AND ACCURACY OF MEASUREMENT OF A POSITION IN WATER BY INTERSECTION

森 忠 次\*\*  
By Chuji Mori

### 1. 緒 言

近接しがたい未知点の座標を決定するためには、周知のように前方交会法が適用される。通常の測量手段としてトランシットや平板を用いる場合、あるいは写真測量を適用する場合においても、未知点から発した光が既知の2点あるいはそれ以上の測点に到達すれば、光の経路を逆にたどることにより、原理的に前方交会法によって未知点の位置が決定できるわけである。

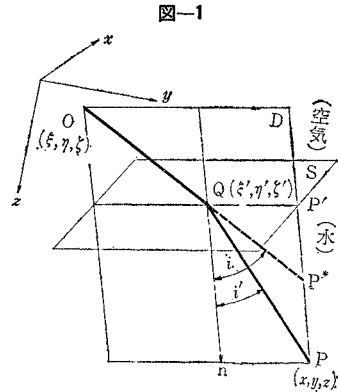
水中の比較的浅い個所にある物体は十分空中から見る事ができるから、空気と水との界面の屈折法則さえ考慮に入れれば、空気中の測点からの観測値を用いて前方交会法により水中にある物体の位置を決定することができる。本論文は、トランシットによって観測する場合を対象とし、前方交会法による水中測点の位置決定のための基本関係式を示し、位置測定精度が、光の経路が屈折しない通常の場合とどの程度異なるかを明らかにしたものである。ここで示した諸関係式は、屈折率が異なる2媒質を光が通過したときに一般に適用できる。

既知点の位置を正確に定め、測角も精密に行なえば、水のない通常の場合における前方交会法による位置決定精度は良好である。水中位置測定の精度を検討した結果によれば、水のない場合に比較してやや精度の低下はまぬがれないが、直接測定によるよりも簡便で、かつ精度の高い場合が多いと考えられる。したがって、被測定点が2つの既知点より同一点であると確認できるかぎり、前方交会法により水中測点の位置を決定すればよいが、濁水に対しては適用できないし、水面が波立っている場合にも誤差の増大あるいは観測不能となる欠点がある。

### 2. 基本関係式

まず、使用する主要記号を説明するとともに、光の屈折に関する基本関係式を示しておく。

図-1において、面Sは水と空気の界面、すなわち屈



折面であり、その水中に向う法線  $n$  の直角座標  $x, y, z$  に対する方向余弦を  $\lambda_0, \mu_0, \nu_0$  とする。空中の光線  $OQ$  は水面  $Q$  において屈折し、水中では  $QP$  の方向をたどるものとする ( $QP^*$  は  $OQ$  延長である)、 $OQ, QP$  の両光線は法線  $n$  を含む面  $D$  内にあり、 $OQ, QP$  が  $n$  となす角をそれぞれ  $i, i'$  とするとき、Snell の法則により

$$n \sin i = n' \sin i' \dots\dots\dots (1)$$

ここに  $n, n'$  はそれぞれ空気および水の絶対屈折率であり、空気に対する水の屈折率を  $N$  とすると、

$$N = n'/n \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore \sin i' = \sin i / N \dots\dots\dots (3)$$

空中の光線  $OQ$  の方向余弦  $\lambda, \mu, \nu$  と水中の光線  $QP$  の方向余弦  $\lambda', \mu', \nu'$  との間にはつぎの関係式が成立する。

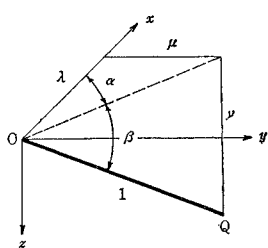
$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \{\lambda - \lambda_0(\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i})\} / N \\ \mu' &= \{\mu - \mu_0(\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i})\} / N \\ \nu' &= \{\nu - \nu_0(\cos i - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 i})\} / N \end{aligned} \right\} (4)$$

なお、光線方向余弦と方向角  $\alpha$  および鉛直角  $\beta$  との関係を示そう。 $xy$  面を水平面とし  $z$  軸を鉛直下向きにとり、方向角  $\alpha$  は  $x$  軸方向を基準として右回りを正とし、鉛直角  $\beta$  は便宜上伏角を正とする。すると、図-2 より明らかなようにつぎの関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \mu &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ \nu &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

\* 第22回土木学会年次学術講演会(昭41.5.28)において一部発表  
\*\* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部交通土木工学教室

図-2



水中測点Pの位置決定法を一般的に示せばつぎのとおりである。まず、図-1において空中の既知点Oの座標  $\xi, \eta, \zeta$  を求めておき、屈折面Sの方程式が与えられれば、光線OQの方向を測定することにより、OQと面

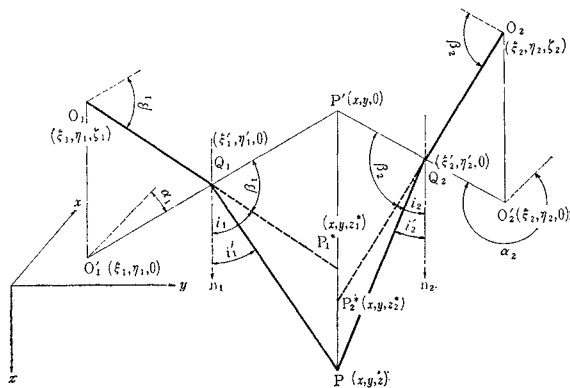
Sとの交点Qの座標  $\xi', \eta', \zeta'$  を計算する。つぎに、屈折率Nが既知であれば、式(4)によりQPの方向を求めて直線QPの方程式が得られる。したがって、空中の座標既知な他の1点から、同様な方法でもう1つの水中光線の方程式を求めれば、その2直線の交点として未知点P(x, y, z)が決定されるわけである。

しかしながら、このときに使用する測定値には誤差を含んでいると考えなければならないので、求められた水中の2光線は必ずしも交わらない。このような難点を除くには、観測誤差の大きさとそれが位置決定精度におよぼす影響を考慮に入れると、次節以下に示すように、通常の前方交会法において実行されているような方法によればよいことが明らかになる。ただし、われわれがトランシットや平板などで空中の光線OQの方向を知るのには、方向角(水平角)および鉛直角としてであり、このうちで、方向角の方が測定精度がよく、しかも方向角の交会角は90°近くとすることが比較的容易であるが、鉛直角の交会角は通常かなり小さくしかとれないと仮定する。このような仮定のもとでは、屈折面の方向によって交会点の決定方法を変えなければならないので、代表的な2つの場合について以下に説明する。

### 3. 屈折面が水平のときの位置決定法

水中にある任意の未知点P(x, y, z)を静水面より高い既知の2点O<sub>1</sub>( $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ ), O<sub>2</sub>( $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ )より観測する場合を考える。この場合の座標軸は、図-3に示すように、水の表面をxy面とし、z軸は鉛直下向きにとる

図-3



ことにする。したがって点Pのz座標は水深を表わす。

点Pから発した光はPQ<sub>1</sub>O<sub>1</sub>という経路を経て点O<sub>1</sub>に達し、われわれは点O<sub>1</sub>において方向角 $\alpha_1$ および鉛直角 $\beta_1$ を観測して空中の光線O<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>の方向と位置を知る。点O<sub>2</sub>においても、 $\alpha_2$ および $\beta_2$ を観測して光線O<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>の方向と位置が求められる。

屈折面の法線n<sub>1</sub>およびn<sub>2</sub>はともに鉛直であるから、O<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>P, O<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>Pはそれぞれ鉛直面内にあり、これら2つの鉛直面の交線P'Pは鉛直線である(P'は水面との交点)。空中の光線O<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>およびO<sub>2</sub>Q<sub>2</sub>はP'Pと交わるから、交点をそれぞれP<sub>1</sub>\*(x, y, z<sub>1</sub>\*)およびP<sub>2</sub>\*(x, y, z<sub>2</sub>\*)とすると、一般にはP<sub>1</sub>\*とP<sub>2</sub>\*とは一致しない。

O<sub>1</sub>'( $\xi_1, \eta_1, 0$ ), O<sub>2</sub>'( $\xi_2, \eta_2, 0$ )をそれぞれ点O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>を通る鉛直線と水面との交点とすると、O<sub>1</sub>'P', O<sub>2</sub>'P'はそれぞれ光線を含む鉛直面と水面との交線である。光線を含む1つの鉛直面をとり出してこれをzX面とすると、一般に図-4のようになり、 $\triangle QP'P$ と $\triangle QP_1^*P$ において、

$$QP' = P'P \tan i' = P_1^*P \tan i$$

$$\therefore z = (\tan i / \tan i') z^* \dots \dots \dots (6)$$

一方、式(3)より

$$\left. \begin{aligned} \sin i' &= \sin i / N \\ \cos i' &= \sqrt{N^2 - \sin^2 i} / N \\ \tan i' &= \sin i / \sqrt{N^2 - \sin^2 i} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

であるから、これを式(6)に適用すると、図-3におけるzとz\*との関係は次式で与えられる。

$$z_j = \frac{\sqrt{N^2 - \sin^2 i_j}}{\cos i_j} z_j^*$$

$$= \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta_j}}{\sin \beta_j} z_j^*, \quad (j=1, 2) \dots \dots \dots (8)$$

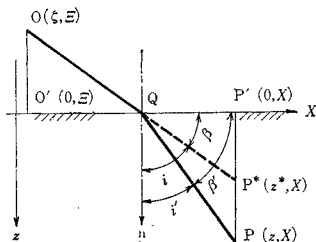
ここに、

$$i_j = 90^\circ - \beta_j, \quad i_j' = 90^\circ - \beta_j', \quad (j=1, 2) \dots \dots \dots (9)$$

したがって鉛直線P'Pを決定することができれば、空中の光線の延長とP'Pとの交点のz座標z<sub>1</sub>\*およびz<sub>2</sub>\*が計算でき、これらの値を式(8)に代入すれば、点Pのz座標が得られる。誤差があればzの値が異なるので、これらを調整して点Pの水深zとすればよい。

以上のことから明らかなように、通常の前方交会

図-4



法と同様にして、光線  $O_1Q_1$  および  $O_2Q_2$  の方向角  $\alpha_1$  および  $\alpha_2$  を用い、まずそれぞれの光線を含む各鉛直面の交線  $P'P$  の  $x, y$  座標を一義的に決定する。つぎに、 $O_1Q_1P$  を含む鉛直面に直交し水平から  $\beta_1$  だけ傾いた面および  $O_2Q_2P$  を含む鉛直面に直交し水平から  $\beta_2$  だけ傾いた面と  $P'P$  との交点を求めて、それらの  $z$  座標をそれぞれ  $z_1^*, z_2^*$  とすれば、式 (8) より  $z_1, z_2$  の2つの値が得られるから、これを調整して未知点の水深  $z$  とすればよい。このような方針は、通常の方角交会法と全く同じであるから、トランシットを用いても平板を用いても水中位置の測定が可能である。

トランシットによる測角値を用いるとき、一般的な計算式を以下に示そう。直線  $O_1Q_1, O_2Q_2$  の方程式をつぎの形で表わす。

$$x = \xi_j + \rho_j \lambda_j, \quad y = \eta_j + \rho_j \mu_j, \quad z = \zeta_j + \rho_j \nu_j, \quad (j=1,2) \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $\rho_j$  は助変数である。すると、それぞれの直線を含む2つの鉛直面の交線  $P'P$  の位置は、

$$\rho_i = \frac{(\xi_i - \xi_j)\mu_j - (\eta_i - \eta_j)\lambda_j}{\mu_i\lambda_j - \lambda_i\mu_j}, \quad (i, j=1,2; i \neq j)$$

で与えられ、これらを式 (10) に代入して、未知点の座標  $x, y, z_j^*$  はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\xi_1\mu_1\lambda_2 - \xi_2\lambda_1\mu_2 - (\eta_1 - \eta_2)\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2} \\ y &= \frac{(\xi_1 - \xi_2)\mu_1\mu_2 - \eta_1\lambda_1\mu_2 + \eta_2\mu_1\lambda_2}{\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} z_1^* &= \zeta_1 + \frac{(\xi_1 - \xi_2)\mu_2 - (\eta_1 - \eta_2)\lambda_2}{\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2} \nu_1 \\ z_2^* &= \zeta_2 + \frac{(\xi_1 - \xi_2)\mu_1 - (\eta_1 - \eta_2)\lambda_1}{\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2} \nu_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

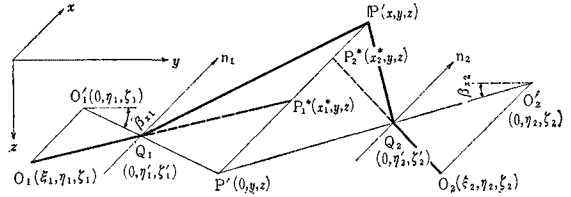
式 (11) および (12) 中の方向余弦を式 (5) によって  $\alpha$  および  $\beta$  で表わし、さらに式 (8) を適用すれば、点  $P$  の座標は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\xi_1 \tan \alpha_1 - \xi_2 \tan \alpha_2 - (\eta_1 - \eta_2)}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \\ y &= \frac{(\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha_1 \tan \alpha_2 - \eta_1 \tan \alpha_2 + \eta_2 \tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \\ z_1 &= \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta_1}}{\sin \beta_1} \\ \left\{ \zeta_1 + \frac{(\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha_2 - (\eta_1 - \eta_2)}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \cdot \frac{\tan \beta_1}{\cos \alpha_1} \right\} \\ z_2 &= \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta_2}}{\sin \beta_2} \\ \left\{ \zeta_2 + \frac{(\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha_1 - (\eta_1 - \eta_2)}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2} \cdot \frac{\tan \beta_2}{\cos \alpha_2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

4. 屈折面が鉛直のときの位置決定法

ガラス容器などに水が入っていて、容器の鉛直側面を通して外から水中測点の位置を測定する場合について考える。図-5 に示すように、容器の鉛直側面(容器の厚

図-5



さは無視する)を  $yz$  面とし、 $x$  軸を水中に向けた直角座標系を採用する。屈折面の法線は  $x$  軸に平行(水平線)であって、水中の未知点  $P$  から空中の既知点  $O_1, O_2$  に達する各光線が作る面の交線も  $x$  軸に平行となる。これらの面の屈折面との交線を  $O_1'P', O_2'P'$  とする。

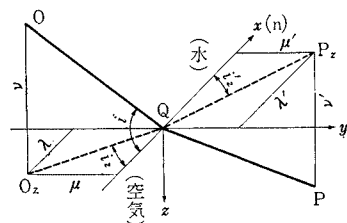
既知点に達したそれぞれの光線を含む2つの面のなす角  $\angle O_1'P'O_2'$  が  $90^\circ$  近くであれば、3. の場合と同様な方針によって、点  $P$  の位置を定めることが可能である。すなわち、まず2つの面の交線  $P'P$  の  $y, z$  座標を求め、つぎに  $P_1^*, P_2^*$  の  $x$  座標  $x_1^*, x_2^*$  を決定すれば、式 (8) と類似の関係式を用いて  $x_1, x_2$  を計算することができる。これらの計算に必要な関係式は、3. の結果からただちに求められるので省略する。

ただし、 $\angle O_1'P'O_2'$  を  $90^\circ$  近くとするためには、 $O_1, O_2, P$  の間に非常に大きい高低差が必要であり、このような状態が実現できる場合は比較的少ないであろう。また、 $O_1'P', O_2'P'$  が  $y$  軸となす角  $\beta_{x1}, \beta_{x2}$  は、それぞれ  $O_1$  および  $O_2$  における方向角と鉛直角との関数であり(式(20)参照)、鉛直角の測定精度が悪ければこれら2直線の角度誤差が大きくなるから、得られた交点の座標  $y, z$  が不正確になると考えなければならない。

そこで、 $\angle O_1'P'O_2'$  が  $180^\circ$  に近いという、より一般的な場合を考えることにする。この場合には、まず光線の水平面への投影について考える。図-6 において、 $yz$  面が屈折面で  $x > 0$  の部分は水、 $x < 0$  の部分は空気であるとする。 $x$  軸は屈折面の法線であり、入射角  $i$  をなす光線の経路  $OQP$  の  $xy$  面への投影を  $O_zQP_z$  とし、この投影が法線となす角を  $i_2, i_2'$  とする。

空中光線  $OQ$  および水中光線  $QP$  の方向余弦の間には式(4)の関係があり、いまの場合では、 $\lambda_0=1, \mu_0=\nu_0=0$ , かつ  $\cos i = \lambda$  であるから、

図-6



$$\lambda' = \sqrt{N^2 - 1 + \lambda^2} / N = \sqrt{N^2 - (\mu^2 + \nu^2)} / N$$

$$\mu' = \mu / N$$

一方、図-6 より得られる関係と上式とを用いると、

$$\frac{\sin i_z}{\sin i_z'} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\mu'}$$

$$= \frac{\sqrt{N^2 - \nu^2}}{\sqrt{1 - \nu^2}} = N_z \dots \dots \dots (14)$$

式 (14) によれば、光線の  $xy$  面への投影は、見掛けの屈折率を  $N_z = \sqrt{N^2 - \nu^2} / \sqrt{1 - \nu^2}$  とすると、Snell の法則にしたがうと考えて取り扱えることを示している<sup>1)</sup>。式 (5) を用いれば、 $N_z$  はつぎのように表わすことができる。

$$N_z = \sqrt{N^2 - \sin^2 \beta} / \cos \beta \dots \dots \dots (15)$$

光線の  $xy$  面への投影においては、交会角を理想状態に近づけやすいことが多い。なお、水中光線の投影の方向  $i'_z$  は、 $\alpha, \beta$  および  $N$  の関数であるが、 $\beta$  が小さいときには、 $\beta$  の測定誤差のおよぼす影響はわずかであり、 $i'_z$  の決定精度はかなり良好であると考えられる。したがって上記の屈折法則によって、まず2光線の交点の  $x, y$  座標を求めることにする。図-7 は光線の  $xy$  面への投影を示すものであって、図-6 における  $i_z$ 、

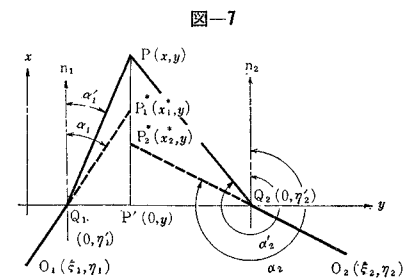


図-7

$i'_z$  の代りに方向角  $\alpha, \alpha'$  で表わすことができるから、式 (14) および (15) より、

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_j' &= \sin \alpha_j / N_z \\ \cos \alpha_j' &= \sqrt{N_z^2 - \sin^2 \alpha_j} / N_z \\ \tan \alpha_j' &= \sin \alpha_j / \sqrt{N_z^2 - \sin^2 \alpha_j} \\ &= \sin \alpha_j \cos \beta_j / \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha_j \cos^2 \beta_j} \end{aligned} \right\} (j=1, 2) \dots \dots \dots (16)$$

まず既知点  $O_1(\xi_1, \eta_1), O_2(\xi_2, \eta_2)$  からの方向角  $\alpha_1, \alpha_2$ 、水中での方向角  $\alpha_1', \alpha_2'$  のときの交点  $P$  の座標を求めよう。屈折面上の点  $Q_1, Q_2$  の  $y$  座標は、

$$\eta_1' = \eta_1 - \xi_1 \tan \alpha_1, \eta_2' = \eta_2 - \xi_2 \tan \alpha_2 \dots \dots \dots (17)$$

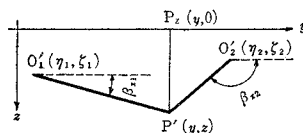
であって、点  $P$  の座標  $x, y$  はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} x &= -(\eta_1' - \eta_2') \frac{1}{\tan \alpha_1' - \tan \alpha_2'} \\ y &= \eta_1' - (\eta_1' - \eta_2') \frac{\tan \alpha_1'}{\tan \alpha_1' - \tan \alpha_2'} \\ &= \eta_2' - (\eta_1' - \eta_2') \frac{\tan \alpha_2'}{\tan \alpha_1' - \tan \alpha_2'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

点  $P$  の  $z$  座標は、水のない場合と少し方針が異なる

が、以下のように簡単に決定できる。屈折面の法線が  $x$  軸に平行であるから、空中および水中の光はともに  $x$  軸に平行な平面内にあり、この平面が式 (18) で求めた  $y$  座標を切る位置の  $z$  座標が求めるものである。光線を含む平面が2つあり、これらと  $yz$  面との交線は図-8 に示す2直線  $O_1'P', O_2'P'$  であって、これらが  $y$  軸と

図-8



なす角を  $\beta_{x1}, \beta_{x2}$  とすると、求める  $z$  座標は、

$$z - \zeta_j = (y - \eta_j) \tan \beta_{xj}, (j=1, 2) \dots \dots \dots (19)$$

により与えられる。ここに、 $\tan \beta_{xj}$  はそれぞれの光線方向余弦  $\mu_j, \nu_j$  で表わされ、さらに式 (5) の関係があるから、

$$\tan \beta_{xj} = \nu_j / \mu_j = \tan \beta_j / \sin \alpha_j, (j=1, 2) \dots \dots (20)$$

となる。したがって、式 (19) はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \zeta_1 + (y - \eta_1) \tan \beta_1 / \sin \alpha_1 \\ z_2 &= \zeta_2 + (y - \eta_2) \tan \beta_2 / \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

こうして得られた  $z_1$  と  $z_2$  を調整して点  $P$  の  $z$  座標とすればよい。注意すべきことは、式 (21) によれば式 (13) と異なって、点  $P$  の  $x$  座標が  $z$  座標に直接関係しないことである。

式 (18) において、 $\alpha_j'$  の代りに  $\alpha_j$  とすれば式 (13) の  $x$  および  $y$  の式に一致し、これらは水の有無にかかわらず同一形式の表現となっている。式 (18) に現われる  $\alpha_j'$  は、式 (16) に示されるように  $N, \alpha_j$  および  $\beta_j$  の関数であってやや複雑であるから、数表を作っておけば便利である。この数表としては、つぎのようなもので一応の役に立つであろう。

まず、 $N$  と  $\beta$  を指数として  $N_z$  を求める小数以下4けたの表を作る。 $\beta$  の  $0^\circ \sim 70^\circ$  の部分に対しては  $10'$  刻みとし、 $N$  については、海水中の測定も考慮して、1.30 ~ 1.36 の範囲について、0.005 間隔とする。つぎに、 $N_z$  と  $\alpha$  を指数として  $\tan \alpha'$  を求める表を作ればよい。このとき  $\alpha$  は  $10'$  ごと、 $N_z$  は 1.3 ~ 2.8 の部分について 0.01 間隔、小数以下5けたとする。

### 5. 屈折面が水平のときの測定誤差

#### (1) 水面条件の影響

水面上から観測する 3. の場合には、水面の標高測定誤差や野外での波の存在を考慮しなければならない。これらの影響を標高差と水面傾斜とにわけて考察することにする。なお、水面傾斜を2つに分類し、水面の法線が空中の光線を含む鉛直面内で傾く場合と、この鉛直面と直角な面内で傾く場合とに分けて取り扱う。

水面の法線が空中の光線を含む鉛直面内で傾斜した場

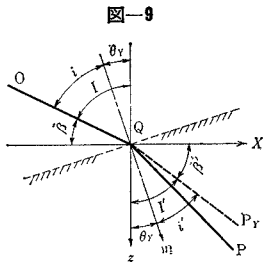


図-9

合には、光線を含む鉛直面の方向に変化を生じないから、点Pのx,y座標は式(13)で与えられ、z座標のみが変わる。いま図-9のように、光線を含む鉛直面をあらためてzX面とし、水面の法線がこの面内でtheta\_Yだけ傾き、水中光線がQPからQP\_Yとなった場合を考える。X軸は水平、z軸は鉛直、かつz>0の部分に水があるとす。I,I'は鉛直線と光線とのなす角であって、

$$I=90^\circ-\beta, I'=90^\circ-\beta' \dots\dots\dots(22)$$

$$i=I-\theta_Y, i'=I'-\theta_Y \dots\dots\dots(23)$$

$$\lambda=\sin I, \lambda'=\sin I', \lambda_0=\sin \theta_Y$$

であるから、式(4)により空中と水中との光線の方向にはつぎの関係が成立する。

$$\lambda'=[\sin I-\sin \theta_Y\{\cos(I-\theta_Y)-\sqrt{N^2-\sin^2(I-\theta_Y)}\}]/N$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \beta' &= \sin I' = \lambda' \\ &= [\cos \beta - \sin \theta_Y\{\sin(\beta + \theta_Y) - \sqrt{N^2 - \cos^2(\beta + \theta_Y)}\}]/N \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

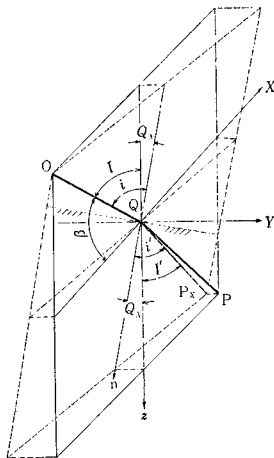
したがって屈折面が水平からわずかにtheta\_Yだけ傾いたとき、水中の光線の鉛直角beta'および水深zがどの程度に変化するかを求めれば、式(24)および(6)を用いてつぎようになる。ただし、式(6)におけるi,i'をI,I'に置き換える必要がある。

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \theta_Y} \Big|_{\theta_Y=0} = -1 + \frac{\sin \beta}{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}} \dots\dots\dots(25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \theta_Y} \Big|_{\theta_Y=0} &= -\frac{N^2}{\cos \beta \sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}} \\ &\times \left( 1 - \frac{\sin \beta}{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}} \right) \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

水面の法線が空中の光線を含む鉛直面と直角な方向に

図-10



theta\_Xだけ傾き、水中光線がQPからQP\_Xとなった場合を考えよう。図-10に示すように、空中光線を含む鉛直面をzX面とすると、式(22)ならびにつぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} \cos i &= \lambda_0 + \mu \mu_0 + \nu \nu_0 = \cos I \cos \theta_X \\ &= \sin \beta \cos \theta_X \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

したがって、式(4)より水中光線の方向余弦を求め、これよりalpha',beta'を計算すればつぎようになる。

$$\begin{aligned} \tan \alpha' &= \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{1}{\cos \beta} \sin \theta_X \\ &\times (\sin \beta \cos \theta_X - \sqrt{N^2 - 1 + \sin^2 \beta \cos^2 \theta_X}) \\ \sin \beta' &= \nu' = \frac{1}{N} \{\sin \beta - \cos \theta_X \\ &\times (\sin \beta \cos \theta_X - \sqrt{N^2 - 1 + \sin^2 \beta \cos^2 \theta_X})\} \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

式(28)より、屈折面が水平からわずかにtheta\_Xだけ傾いたとき、水中光線の方向角alpha'および鉛直角beta'の変化はつぎようになる。

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \theta_X} \Big|_{\theta_X=0} = \frac{\sin \beta - \sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}}{\cos \beta} \dots\dots\dots(29)$$

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \theta_X} \Big|_{\theta_X=0} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

式(25)、(26)および(29)の計算結果を表-1に示す。ただし、以下にはN=4/3と仮定した計算値を示す。これらは水中光線のみ角度変化であるから、水中

表-1 水面傾斜による誤差

beta	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
delta beta' / delta theta_Y   theta_Y=0	-1.00	-0.72	-0.51	-0.37	-0.30	-0.46	-0.25
delta z / delta theta_Y   theta_Y=0	-2.02	-1.44	-1.03	-0.83	-0.86	-1.37	-∞
delta alpha' / delta theta_X   theta_X=0	-0.88	-0.68	-0.59	-0.60	-0.74	-1.32	-∞

部分の光線が短いときは位置誤差が小さくなる。水面傾斜dtheta\_Yよりも水中光線の角度変化d beta'は小さいが、測定水深zにはやや大きい変化が生じ、dtheta\_Y=1°とすれば、水深変動の実水深に対する比dz/zが2%程度になる。ただし、2つの光線に対する調整値をもってzとするから、1光線のみにはdtheta\_Yの誤差があるときには、結果としては誤差が1/2くらいになる。

水面傾斜dtheta\_Xに対しては、方向角変化d alpha'が通常それよりも小さいと考えてよい。一方、鉛直角は不変であってzに直接の変化はないが、alpha'の変化にともなって交会点のx,y座標が変わるため、この影響をうけてbeta(したがってbeta')が大きいかほどzに大きい誤差を生ずることになる。

水面の標高のみが変化した場合には、方向角が不変であるから点Pのx,y座標には誤差を生ぜず、水中光線がz方向に平行移動するため未知点のz座標に誤差を生ずるにすぎない。水面がd hだけ上昇したとき、上昇した水面を基準とした水深変化は、式(13)を用いてdelta z / delta hを計算すればよい。また点Pの標高低下はdelta z / delta h

-1 であって、これを  $\partial Z/\partial \zeta$  で表わすことにする。これらの結果は、

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}}{\sin \beta} > 1, (N > 1 \text{ のとき}) \dots (31)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \frac{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}}{\sin \beta} - 1 \dots \dots \dots (32)$$

であって、計算値は表-2 に示すとおりである。 $\beta$  が大きいかぎりには点 P の標高変化は比較的小さいが、測定水深の誤差は常に水面標高変化より大きいことに注意する必要がある。

表-2 水面標高差による誤差

$\beta$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\partial z/\partial \zeta$	$\infty$	3.55	2.03	1.60	1.43	1.35	1.33
$\partial Z/\partial \zeta$	$\infty$	2.55	1.03	0.60	0.43	0.35	0.33

(2) 屈折率変化の影響

屈折率  $N$  が仮定した値と異なれば、未知点の水深  $z$  に誤差を生ずる。 $N$  の変動の主因は、光の波長、媒質の温度、成分などである。 $N = n'/n$  であって、空気の屈折率  $n$  はこれらの要因による変化量が小さく、 $0.01 \times 10^{-3}$  程度にすぎないから無視して差しつかえない<sup>2), 3)</sup>。しかしながら、水の屈折率  $n'$  は、表-3<sup>4)</sup> に示すように、温

表-3 水の屈折率

温度 (°C)	波長 ( $\mu\text{m}$ )		
	0.656 (H の赤線)	0.588 (He の黄線)	0.486 (H の青線)
0	1.332 094	1.334 003	1.338 113
30	1.330 116	1.331 993	1.336 055

度差 30°C につき約  $2 \times 10^{-3}$ 、波長に応じて  $6 \times 10^{-3}$  の変化を呈し、 $N=4/3$  と仮定するときには、条件によって少なくとも  $-3 \sim +5 \times 10^{-3}$  の変動を示すものと考えなければならない。なお、海水の屈折率は真水より約  $20 \times 10^{-3}$  大きく、 $N=1.35$  程度のものである。

$N$  の変化によって現われる誤差は  $z$  座標のみであって、これの水深に対する比率を考えると、式 (8) より

$$\frac{\partial z}{\partial N} / z = \frac{N}{N^2 - \cos^2 \beta} \dots \dots \dots (33)$$

$N=4/3$  として式 (33) を計算すれば表-4 のとおり

表-4 屈折率の変化による誤差

$\beta$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{\partial z}{\partial N} / z$	1.71	1.58	1.30	1.04	0.87	0.78	0.75

になる。 $\partial z/\partial N / z \approx 1$  と考えると、表-3 の値を参照して、水深の変動割合は、温度差 15°C につき 0.1%、波長差 0.1  $\mu\text{m}$  に対して 0.3% くらいにすぎないことがわかる。

(3) 測角誤差の影響

空中光線の方向角  $\alpha$  に測定誤差があれば、未知点の  $x, y$  座標に誤差を生ずるが、その大きさは水のない場合と全く同様である。 $z$  座標の誤差は、 $x, y$  座標の変化

にもなって生ずるので、水のない場合と類似しているが、 $\beta' > \beta$  であるため、水のない場合より誤差が大きくなる。

鉛直角  $\beta$  のみに誤差があるときには、未知点の  $x, y$  座標に誤差を生じない。 $\beta$  と  $\beta'$  との微小な角度変化の関係は、式 (3) および (9) より、

$$\frac{\partial \beta'}{\partial \beta} = \frac{\cos i}{\sqrt{N^2 - \sin^2 i}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}} < 1$$

( $N > 1$  のとき)  $\dots \dots \dots (34)$

このように、空中光線の鉛直角が変化した場合、水中光線の鉛直角変化はそれよりも小さく、 $\beta$  が小さいほど影響はわずかであるが、 $z$  座標自身、および  $z$  座標と既知点からの標高差との比の変化を水のある場合とない場合について比較すればつぎのようになる。ただし、図-4 のように光線を含む鉛直面 ( $zX$  面) について考えるものとする。このときには、

$$z^* = (X - \varepsilon) \tan \beta + \zeta \dots \dots \dots (35)$$

および式 (8) が成立するから、

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} / \frac{\partial z^*}{\partial \beta} = \frac{N^2 \sin \beta - \{\zeta / (X - \varepsilon)\} (N^2 - 1) \cos \beta \cot^2 \beta}{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}} \dots \dots \dots (36)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} / (z - \zeta) = \frac{N^2 \sin^3 \beta - \frac{\zeta}{X - \varepsilon}}{(N^2 - \cos^2 \beta) \sin \beta + \frac{\zeta}{X - \varepsilon}}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \beta} / (z^* - \zeta) = \frac{\zeta}{(N^2 - \cos^2 \beta) \sin \beta + \frac{\zeta}{X - \varepsilon}}$$

$$\times (N^2 - 1) \cos^3 \beta$$

$$\times \{ (N^2 - \cos^2 \beta) - \sqrt{N^2 - \cos^2 \beta} \sin \beta \} \cos \beta$$

$\dots \dots \dots (37)$

表-5 は式 (36) および (37) の計算値である。表-5 によれば、 $\beta$  の誤差による  $z$  の誤差は、空中光線が同

表-5 空中光線の鉛直角誤差の影響

種類	$\zeta / (X - \varepsilon)$	$\beta$				
		20°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\partial z}{\partial \beta} / \frac{\partial z^*}{\partial \beta}$	-0.3	2.39	1.47	1.26	1.28	1.32
	-1.0				1.35	1.32
	-2.5					1.34
$\frac{\partial z}{\partial \beta} / (z - \zeta)$	-0.3	1.83	0.99	0.89	0.94	0.99
	-1.0				1.14	1.05
	-2.5					1.20

一鉛直角をなす場合の水のないときの標高  $z^*$  の誤差よりも大きい。しかしながら、標高誤差の既知点からの標高差に対する比を比較すれば、水の有無にかかわらずほとんど同じであることがわかる。すなわち、この比を標高測定精度とすれば、鉛直角誤差が標高測定精度におよぼす影響は、水の有無にほとんど関係がないといえることができる。

(4) 既知点の位置誤差の影響

既知点Oの座標の中で  $\xi, \eta$  に誤差を生じた場合を考えると、未知点の  $x, y$  座標の変化は水のない場合と同じであって、このために生ずる  $z$  座標の誤差は、(3)と同様に水のない場合より少し大きくなる。

一方の既知点の座標  $\zeta$  に誤差  $d\zeta$  を生じた場合に片方の  $z$  座標に現われる誤差  $dz$  は、もし水がなければ  $d\zeta$  であり、水のあるときには式(31)と同じであって、 $dz$  は常に  $d\zeta$  よりも大きく、 $\beta$  が小さいときほど増大する。ただし、 $\partial z/\partial \zeta$  の標高差に対する比を水の有無について比較すれば、式(8)および(35)よりつぎのようになる。

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial \zeta} / (z - \zeta)}{\frac{\partial z^*}{\partial \zeta} / (z^* - \zeta)} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{X - \bar{E}} \left( 1 - \frac{\sin \beta}{\sqrt{N^2 - \cos^2 \beta}} \right) \cot \beta} \dots (38)$$

この計算値は表-6に示すとおりであって、 $\beta$  が小さいかぎりでは、 $z$  の誤差の標高差に対する比は、水のない場合に比べてわずかに大きい程度である。

表-5 既知点の標高誤差の影響

種類	$\beta$	20°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\partial z}{\partial \zeta} / (z - \zeta)$	-0.3	2.11	1.36	1.13	1.05	1.02
	-1.0				1.21	1.08
$\frac{\partial z^*}{\partial \zeta} / (z^* - \zeta)$	-2.5					1.21

6. 屈折面が鉛直のときの測定誤差

(1) 屈折面の角度誤差の影響

前節の場合に準じて、屈折面である容器側面の鉛直性あるいは方向に誤差があったとき、水中光線がどのように変化するかを調べてみよう。

まず屈折面の方向は正しいが、鉛直面から  $\theta_y$  だけ傾いている場合を考える。法線方向余弦および入射角の余弦は、

$$\lambda_0 = \cos \theta_y, \mu_0 = 0, \nu_0 = \sin \theta_y$$

$$\cos i = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta_y + \sin \beta \sin \theta_y$$

であるから、式(4)、(5)および(20)を用いて、つぎのように  $\alpha'$  および  $\beta_x'$  (水中光線の  $yz$  面への投影における鉛直角) の変化が計算できる。

$$\cot \alpha' = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \theta_y \cdot A}{\sin \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \beta_x' = \frac{\nu'}{\mu'} = \frac{\sin \beta - \sin \theta_y \cdot A}{\sin \alpha \cos \beta}$$

ここに、

$$A = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta_y + \sin \beta \sin \theta_y$$

$$- \sqrt{N^2 - 1} + (\cos \alpha \cos \beta \cos \theta_y + \sin \beta \sin \theta_y)^2$$

$$\therefore \frac{\partial \alpha'}{\partial \theta_y} \Big|_{\theta_y=0} = \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \beta}{N^2 - \sin^2 \beta}$$

$$\times \left( 1 - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \right) \dots (39)$$

$$\frac{\partial \beta_x'}{\partial \theta_y} \Big|_{\theta_y=0} = \frac{\sin \alpha \cos \beta (\sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - \cos \alpha \cos \beta)}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \dots (40)$$

つぎに屈折面の方向が  $yz$  面から  $\theta_z$  だけ振れている場合を考えると、

$$\lambda_0 = \cos \theta_z, \mu_0 = \sin \theta_z, \nu_0 = 0$$

$$\cos i = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta_z + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_z$$

であるから、まえと同様にして、 $\alpha'$  および  $\beta_x'$  の変化はつぎのように求められる。

$$\cot \alpha' = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \theta_z \cdot B}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \theta_z \cdot B}$$

$$\tan \beta_x' = \frac{\nu'}{\mu'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \theta_z \cdot B}$$

ここに、

$$B = \cos \alpha \cos \beta \cos \theta_z + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_z$$

$$- \sqrt{N^2 - 1} + (\cos \alpha \cos \beta \cos \theta_z + \sin \alpha \cos \beta \sin \theta_z)^2$$

$$\therefore \frac{\partial \alpha'}{\partial \theta_z} \Big|_{\theta_z=0} = 1 - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \dots (41)$$

$$\frac{\partial \beta_x'}{\partial \theta_z} \Big|_{\theta_z=0} = \frac{\sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta})}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \dots (42)$$

式(39)~(42)の値を示せば表-7のとおりであって、屈折面の角度変化より水中光線の角度変化は小さく、とくに  $\partial \alpha' / \partial \theta_y$  は微小な値である。水中における光線の経路は短い場合が多いから、屈折面の角度を正確に測定する困難はあっても、その誤差が位置決定精度に重大な影響をおよぼすことは少ない。

表-7 屈折面の角度誤差の影響

種類	$\alpha$	$\beta$	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\partial \alpha'}{\partial \theta_y} \Big _{\theta_y=0}$	0°	0°	0	0	0	0	0	0
	30°	0°	0	0.02	0.05	0.08	0.12	0.11
	60°	0°	0	0.07	0.14	0.21	0.27	0.22
	90°	0°	0	0.15	0.28	0.39	0.42	0.30
$\frac{\partial \beta_x'}{\partial \theta_y} \Big _{\theta_y=0}$	0°	0°	$\infty$	0	0	0	0	0
	30°	0°	0.74	0.61	0.40	0.26	0.17	0.09
	60°	0°	0.59	0.57	0.51	0.42	0.31	0.17
	90°	0°	0.88	0.85	0.76	0.62	0.44	0.23
$\frac{\partial \alpha'}{\partial \theta_z} \Big _{\theta_z=0}$	0°	0°	0.25	0.26	0.30	0.37	0.51	0.72
	30°	0°	0.30	0.31	0.35	0.43	0.56	0.75
	60°	0°	0.51	0.52	0.56	0.63	0.73	0.85
	90°	0°	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\frac{\partial \beta_x'}{\partial \theta_z} \Big _{\theta_z=0}$	0°	0°	0	-1.32	-0.74	-0.60	-0.59	-0.68
	30°	0°	0	-0.33	-0.47	-0.52	-0.59	-0.70
	60°	0°	0	-0.18	-0.34	-0.48	-0.62	-0.75
	90°	0°	0	-0.23	-0.44	-0.62	-0.76	-0.85

(2) 屈折面の位置誤差および容器の性質の影響

屈折面の  $x$  座標に測定誤差があったときには、光線の方向が全く不変で、水中光線が 図-5 および 8 における  $O_jP$  を含み  $x$  軸に平行な平面内で平行移動するにすぎない。したがって、図-7 におけるように、光線の  $xy$  面への投影を考えると、水中光線が  $x$  軸方向に平行移動するために、交点の  $x, y$  座標に変化を生ずる。移動座標および固定座標に対する平行移動量  $\bar{x}$  および  $\bar{X}$  を求めるには、式 (31) および (32) において、

$$z \rightarrow \bar{x}, Z \rightarrow \bar{X}, \zeta \rightarrow \xi, N \rightarrow N_z, \beta \rightarrow 90^\circ - \alpha$$

とすればよく、屈折面が  $d\xi$  だけ既知点に近づいたとき、 $\partial \bar{x} / \partial \xi$  および  $\partial \bar{X} / \partial \xi$  はつぎのようになる。

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{N_z^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\cos \alpha \cos \beta} \dots \dots \dots (43)$$

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \xi} = \frac{\sqrt{N_z^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha} - 1 = \frac{\sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\cos \alpha \cos \beta} - 1 \dots \dots \dots (44)$$

これらの数値は 表-8 に示すとおりであり、光線の移動にともなって未知点の座標  $x, y$  に変化を生じ、式 (21) によるかぎりは、このうちの  $y$  座標の変動のみ

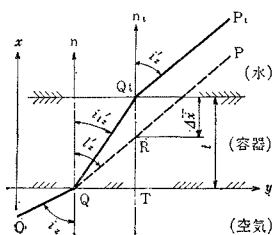
表-8 屈折面の位置誤差の影響

種類	$\alpha \backslash \beta$	$\beta$					
		0°	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi}$	0°	1.33	1.35	1.43	1.60	2.03	3.55
	30°	1.43	1.45	1.54	1.75	2.27	4.07
	60°	2.03	2.08	2.27	2.69	3.67	6.89
	90°	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\frac{\partial \bar{X}}{\partial \xi}$	0°	0.33	0.35	0.43	0.60	1.03	2.55
	30°	0.43	0.45	0.54	0.75	1.27	3.07
	60°	1.03	1.08	1.27	1.69	2.67	5.89
	90°	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

が未知点の  $z$  座標に影響をおよぼすことになる。 $\partial \bar{x} / \partial \xi$  および  $\partial \bar{X} / \partial \xi$  は前節における  $\partial x / \partial \zeta$  および  $\partial Z / \partial \zeta$  に類似のものであって、 $\alpha$  および  $\beta$  が大きいときには、屈折面の位置誤差が測定精度におよぼす影響はかなり著しくなることがわかる。

なお、これまでは容器と水とが同じ屈折率であると仮定してきたが、現実には容器側面はガラスその他で作られていて、屈折率が水と異なる。そこで容器側面の空気に対する屈折率  $N_t$ 、厚さ  $t$  のときについて、真の位置がこれを無視した計算値とどのように異なるかを調べよう。

図-11



容器側壁で形成される 2 つの屈折面の法線がともに  $x$  軸に平行であるから、光線の経路は 4. で示したものと全く同様に取り扱うことができる。図-11 は 1 光線の  $xy$  面

への投影であって、容器側面と空気との境界を  $yz$  面としたとき、厚さ  $t$  の部分が屈折率  $N_t$  である場合の光線  $Q_1P_1$  とこの部分も水であると考えた場合の光線  $QP$  とは、前述と同様に  $OP$  を含み  $x$  軸に平行な面内で平行にずれているにすぎない。

水中光線の  $x$  方向の移動量を  $\Delta \bar{x}$  とし、図-11 の記号を用いれば、

$$QT = RT \tan i_{z'} = Q_1T \tan i_{t z'}$$

$$\therefore \Delta \bar{x} = Q_1R = Q_1T - RT = t \left( 1 - \frac{\tan i_{t z'}}{\tan i_{z'}} \right)$$

上式中の  $i_{z'}, i_{t z'}$  は、それぞれ方向角  $\alpha', \alpha'_t$  と書くことができるから、式 (16) を用いるとつぎのように表わされる。

$$\frac{\Delta \bar{x}}{t} = 1 - \frac{\sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\sqrt{N_t^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \dots \dots \dots (45)$$

$N_t = 3/2, N = 4/3$  として計算した結果は 表-9 に示すとおりであり、水中光線は容器壁厚の 11~21% だけ平行移動するにすぎない。もし、壁厚を無視すれば、測定した  $x$  座標は真の値より小さくなっていて、 $y$  座標は少し変化し、 $z$  座標もわずかにその影響をうける。

表-9 容器側壁による誤差

種類	$\alpha \backslash \beta$	$\beta$					
		0°	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\Delta \bar{x}}{t}$	0°	0.11	0.11	0.13	0.15	0.17	0.20
	30°	0.13	0.13	0.14	0.16	0.18	0.20
	60°	0.17	0.17	0.18	0.19	0.20	0.21
	90°	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21

(3) 屈折率変化の影響

前節と同様に  $N$  の仮定値が異なったときの影響を考えると、式 (15) にしたがって  $N_z$  が変わり、これにより式 (16) に示すように  $\alpha'$  が変化する。 $N$  の変化とこれらの変化との関係を計算すればつぎのようになる。

$$\frac{\partial N_z}{\partial N} = \frac{N}{\sqrt{N^2 - \sin^2 \beta}} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \dots \dots \dots (46)$$

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial N} = - \frac{N \sin \alpha \cos \beta}{(N^2 - \sin^2 \beta) \sqrt{N^2 - 1 + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \dots \dots \dots (47)$$

計算結果は 表-10 のとおりであり、 $\beta$  が大きいときに  $N_z$  の変化はかなり激しいが、 $\alpha'$  の変化は逆に小さい。 $\partial \alpha' / \partial N = 0.5$  と仮定すれば、表-3 を参照して、 $\alpha'$  の誤差は、温度差 15°C について 100'', 波長差 0.1  $\mu\text{m}$  について 300'' に達する。ただし、これは水中光線のみの誤差であるから、水中における光線の経路が短い場合

表-10 屈折率の変化による誤差

種類	$\alpha \backslash \beta$	$\beta$					
		0°	15°	30°	45°	60°	75°
$\frac{\partial N_z}{\partial N}$	0°	1.00	1.06	1.25	1.67	2.63	5.60
	30°	0	0	0	0	0	0
	60°	-0.30	-0.31	-0.33	-0.34	-0.33	-0.22
	90°	-0.64	-0.65	-0.67	-0.67	-0.61	-0.40
$\frac{\partial \alpha'}{\partial N}$	0°	0	0	0	0	0	0
	30°	-0.30	-0.31	-0.33	-0.34	-0.33	-0.22
	60°	-0.64	-0.65	-0.67	-0.67	-0.61	-0.40
	90°	-0.85	-0.85	-0.86	-0.84	-0.74	-0.46





とでは、 $\partial\alpha'/\partial\beta$  は微小であり、そのうえ水中光線のみが変化するだけであるから、交会点の位置誤差におよぼす影響はわずかである。ただし、水のない場合にはこの種の影響は皆無であること、 $\beta$  の測定精度は良好でないことなどに注意を要する。 $\partial\beta_x/\partial\beta$  の値については、 $\alpha$  および  $\beta$  の小さいときに大きい値を示すが、さきの  $\partial\beta_x/\partial\alpha$  のときと同様に、 $\beta$  の誤差が  $\alpha$  におよぼす付加的影響は結局のところ著しいものではない。

以上のことから、測角誤差が未知点の座標におよぼす影響は、水の存在する場合でも重大なものではないことがわかる。

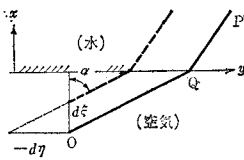
(5) 既知点の位置誤差の影響

交会点座標の計算方針が水のない場合とやや異なるので、既知点位置誤差のおよぼす影響も少し異なる。

$\xi$  に  $d\xi$  の誤差があれば、

図-12

水中光線の  $xy$  面への投影は、水のない場合と比較して、式(43)に示した  $\partial\bar{x}/\partial\xi$  と同量だけ  $x$  方向に移動する。また  $\eta$  に  $d\eta$  の誤差があれば、図-12を参照して、



$$d\xi = -d\eta \cot \alpha$$

なる関係があるから、式(43)を用いるとつぎのようになる。

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial\eta} = \frac{\partial\bar{x}}{\partial\xi} (-\cot \alpha) = -\frac{\sqrt{N^2-1+\cos^2\alpha}\cos^2\beta}{\sin\alpha\cos\beta} \dots\dots\dots(54)$$

この式を式(43)とくらべると、分母の  $\cos\alpha$  が  $\sin\alpha$  で置き換えられているにすぎない。

$\partial\bar{x}/\partial\xi$  および  $\partial\bar{x}/\partial\eta$  の値は、水のない場合と比較した光線の移動量を示すものであって、すでに表-8より明らかのように、 $\beta$  が大きいときにはかなりの値となり、3~4倍程度に達するものと考えなければならない。一方、すでに本節(2)で述べたように、 $\partial\bar{x}/\partial\xi$  は前節表-2における  $\partial\bar{x}/\partial\zeta$  に類似の性質のものであるから、前節における標高差の誤差の比を示した表-6を参照しても、 $d\xi$  および  $d\eta$  の影響を評価することができる。すなわち、 $\partial\bar{x}/\partial\zeta$  が表-2の値のときに、表-6によれば水の有無による標高差の誤差の比が1~2倍であるから、 $\beta=60^\circ$  のときを考えると、 $\partial\bar{x}/\partial\xi$  が  $\partial\bar{x}/\partial\zeta$  の2倍程度になる以上、光線の移動量は4倍ぐらいになると考えなければならない。ただし、平面位置誤差は2光線の交会状況により異なり、複雑である。なお  $\alpha$  座標の誤差は、交会点の  $y$  座標の変動によって生ずる。

1つの既知点の  $\zeta$  に  $d\zeta$  の誤差があれば、その点を通る光線が  $d\zeta$  だけ  $\alpha$  方向に平行移動し、 $\alpha$  の計算値の1つに  $d\zeta$  の誤差を生ずることは水のない場合と同様である。

7. 結 語

水中の1点より発して既知の2点に到達した光を逆に延長しても交会しないにもかかわらず、光の屈折を考慮して前方交会法を適用すれば、水中測点の位置を決定できることが明らかになった。この方法を簡便に実用するには便利な数表を作ればよい。ただし、普通の場合と比べると、屈折面の位置および屈折率などを余分に測定しなければならないから、原理上精度の低下することは避けられず、測定精度を実証してみる必要がある。

測定精度におよぼす第1類の因子は、屈折面の位置と法線方向、水の屈折率、容器の壁厚とその屈折率など、水のない場合には全く関係のない量に含まれる誤差である。これらの因子による精度低下は、5. および 6. に示したように、幸いにして比較的小さい値であるから、位置決定に大きい支障はない。水面に生ずる波が最も測定の障害となるだろうが、この場合には、動揺する視準線の中央を観測して誤差を減ずるべきであろう。なおこれら第1類の値の誤差は、関係位置によって影響は異なるが、一連の測定においては定誤差の性質を持っていること、屈折面の法線方向および水の屈折率の誤差は、水中光線の方向のみに変化を与えるものであるから、水中光線が短い場合に影響の小さいことなどは心得ておくべきである。

第2類の因子は測角誤差および既知点の座標誤差であって、これらは水の有無にかかわらず考えなければならない。そこで、これらの因子が座標測定誤差におよぼす影響を水の有無について比較したが、水のある場合でも誤差がわずかに大きい程度の場合がほとんどで、2倍を越えることは少ない。なお、一般的に注意すべき事項は、水中光線は屈折面の法線方向に近づくから交会角が小さくなりやすいこと、鉛直壁面を通しての観測では鉛直角誤差が平面座標の測定値に誤差をおよぼすこと、大低の場合において、鉛直角の大きいときに誤差が大きくなることなどである。

現実の観測においてどれだけの誤差が生ずるかは、影響する因子が多く、かつ第1類の因子の測定精度や見えの程度にも関係するので推定困難であるが、水のない場合の2~3倍と考えればよい場合が多いと思われる。この点については将来の実証による検討が必要である。

平板を用いる場合には、方向角を数値として取り扱うことは得策でなく、かつ精度が低下してもよいから、別な簡便法を考えるべきである。その1つの方法としては、Tewinkel<sup>5)</sup> および Meijer<sup>6)</sup> が仮定したように、空中の2光線を延長すれば水中で交会すると考えることである。求めた交点の座標から未知点の座標を算出するに際しても、近似的な取扱いをしたり、さらに補正係数表を作製しておくことも考えられる。

## 参考文献

- 1) たとえば, 久保田 広: 光学, pp. 3-4 (1964).
  - 2) 東京天文台: 理科年表, 昭和41年, pp. 物 73-74 (1965)
  - 3) 芝 龜吉: 物理常数表, p. 278 (1934)
  - 4) 同上, p. 275.
  - 5) G.C. Tewinkel: Water Depth from Aerial Photographs, Photogrammetric Engineering, Vol. 29, pp. 1037-1042 (1963)
  - 6) W.O.J.G. Meijer: Formula for Conversion of Stereoscopically Observed Apparent Depth of Water to True Depth, Numerical Examples and Discussion, Photogrammetric Engineering, Vol. 30, pp. 1037-1045 (1964). (1967.6.9・受付)
-