

## 【研究ノート】

乱流の速度分布則について  
ON THE VELOCITY DISTRIBUTION FUNCTION  
OF TURBULENT FLOW

椎 貝 博 美\*  
By Hiroyoshi Shi-igai

## 1. 概 説

乱流の速度分布をあらわす式としては、対数法則と指數法則がもっとも広く用いられてきている。しかし、両者の間の関係は、筆者の知る限りにおいては、未だ明らかにされていない。また、近代の乱流の統計理論の発達は、対数則の一つの基盤となっている混合距離理論の不備を指摘し、その結果、なかば実験式のような意味において対数法則をとりあつかう人が多い。

この論文では、物理的な考察はある程度犠牲にして、数式的な面から検討を行ない、対数則と指數則間の関係を明らかにしようという試みがなされている。

物理性を犠牲にしているということは、この論文の弱点であるが、数式的な面においては、対数法則と指數法則がかなり近い関係にあることを示すことができた。

## 2. 予備的な考察

対数法則はよく知られているように Prandtl あるいは von Kármán によって混合距離理論を元にして導かれたのが最初である。

指數法則、特に  $1/7$  乗則は経験的に得られたものと思われる。

その後、乱流統計理論の発達により、両者を次元解析によって求めることができた<sup>1)</sup>。両者とも次元解析によって得られる、ということは一種の矛盾である。そこでそれらについてなされている仮定の検討をも含めて、簡単に次元解析による方法を述べておくことにもる。

まず、指數法則についてはつぎのとおりである。

$$\text{摩擦係数 } C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_0} \quad (1)$$

$$\text{摩擦速度 } U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (2)$$

式(1), (2)は定義である。ここで、 $\tau_0$ : 壁面におけるせん断応力、 $\rho$ : 密度、 $U_0$ : 自由流の速度である。

つぎに、 $C_f$  はレイノルズ数によって定まり、そのべき乗であらわされるものと仮定する。ゆえに、

$$C_f = \frac{\text{const.}}{\left(\frac{U_0 \delta}{\nu}\right)^m} \quad (3)$$

ここに、 $\delta$ : 壁から自由流までの距離

(1), (2), (3) から、

$$\frac{U_0}{U_*} = \text{const.} \left( \frac{U_* \delta}{\nu} \right)^{m/(2-m)} \quad (4)$$

つぎに、(4) の関係は壁より  $\delta$  以内の地点においても成立するものとする。これから、任意の  $y < \delta$  において

$$\frac{U}{U_*} = \text{const.} \left( \frac{U_* y}{\nu} \right)^{m/(2-m)} \quad (5)$$

が得られる。つぎに、大きな仮定として、 $U/U_*$  は  $y/\delta$  の関数で指數型であらわされるとする。この仮定は層流においてはある程度正しい。しかし、実は指數型の重ね合せで得られる。乱流においては近似的な意味しかもたない。式(5)のような形式がすでに得られているので、これと 3 番目の仮定から、

$$\frac{U}{U_0} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{m/(2-m)} \quad (6)$$

が得られる。 $m=1/4$  とおくと、つぎの一連の式が得られる。なお、定数は通常用いられている値を用いた。

$$C_f = 0.0466 \left( \frac{U_0 \delta}{\nu} \right)^{-1/4} \quad (7)$$

$$\frac{U_0}{U_*} = 8.74 \left( \frac{U_* \delta}{\nu} \right)^{1/7} \quad (8)$$

$$\frac{U}{U_*} = 8.74 \left( \frac{U_* y}{\nu} \right)^{1/7} \quad (9)$$

$$\frac{U}{U_0} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (10)$$

つぎに対数法則のほうを調べよう。まず、 $\tau_0$ ,  $U$ ,  $y$ ,  $\mu$  の間に関数関係があるとすれば、次元解析から、

$$\frac{U}{U_*} = f \left( \frac{U_* y}{\nu} \right) \quad (11)$$

が得られる。つぎに、自由流の流速  $U_0$  と任意点の流速  $U$  との差はせん断力によって生ずるものと考え、 $\delta$ ,  $y$ ,  $U_*$  によって定まるものとする。しかるべきは、

$$\frac{U_0 - U}{U_*} = g \left( \frac{y}{\delta} \right) \quad (12)$$

が得られる。式(11), (12)を書き直すと、

$$\frac{U}{U_*} = f \left[ \left( \frac{y}{\delta} \right) \left( \frac{U_* \delta}{\nu} \right) \right] \quad (13)$$

\* 正会員 工博 東京工業大学工学部



$e^{6/7} = 0.46$  となる。つまり指数法則によるべきものを、半対数紙上にプロットすれば、みかけ上、カルマン定数が増大していることを示す。また、この議論を一般化すれば、式(26)を対数則で近似すると、このときのカルマン定数のみかけの値は  $e^n$  となるので、 $n > 1$  の場合は、みかけ上カルマン定数が減少することになる。いふかえると、カルマン定数そのものが不変であっても、速度分布形が変化するとカルマン定数が変化したように観測されることを示す。

物理的な考察は後に行なうことにして、もう少し、式(28)について調べよう。式(28)から平均流速  $\bar{U}$  は、

$$\frac{U}{U_*} = \frac{6.125}{\kappa^{6/7}} \quad (c=0) \dots \quad (30-1)$$

$$\frac{\bar{U}}{U_*} = \frac{5.71}{\kappa^{6/7}} \quad (c=1) \dots \quad (30-2)$$

で与えられ、 $y=\delta$  における最大流速  $U_0$  は、

$$\frac{U_0}{U_*} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{7}{\kappa^{6/7}} \quad (c=0) \dots \dots \dots (31-1)$$

$$\frac{U_0}{U_*} = \frac{6.125}{\kappa^{6/7}} \quad (c=1) \dots \dots \dots \quad (31-2)$$

で与えられる。 $\kappa=0.4$  とおくならば、シエジー型の式、すなわち、

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U} = 41\sqrt{HI} \\ \bar{U}_{\perp} = 28\sqrt{HI} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (c=0) \\ (c=1) \end{array} \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

が得られる。ただし、 $U_* = \sqrt{gH}$  とおいた。この値は  $c$  の値の下限値にほぼ等しい。より一般にシェジャーの  $C$  は

$$C = \frac{\sqrt{g}}{\kappa^n} \left( \frac{1}{1-n} - \frac{1}{2-n} \right) \\ = \frac{1}{(1-n)(2-n)} \frac{\sqrt{g}}{\kappa^n} \quad (n \neq 1, 2) \dots \dots (33)$$

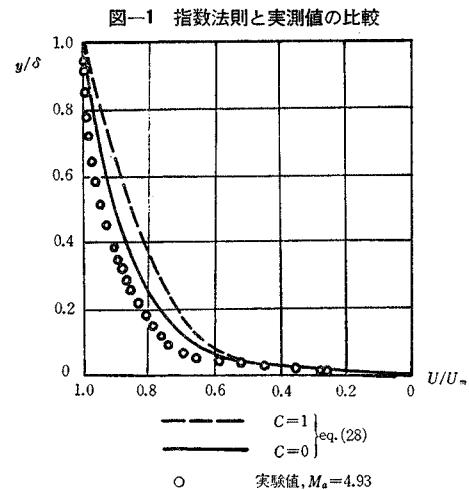
の形式になる。ただし  $n$  が 1 をこえることはできない。

#### 4. 総括

前節では数式上の議論を主として行なってきたが、この節においては多少物理的な考察も含めて総括を行なう。

まず、渦動粘性係数  $\kappa$  に関する仮定であるが、 $\eta \sim y$  ということと、混合距離理論において  $l = \kappa y$  とおくことはほぼ同様の仮定といえる。したがって、 $\kappa$  について他少勝手な仮定をおくことは、 $l$  について、仮定をおくのと同じことであるといえる。この限りにおいて、指數法則と対数法則とは、非常に近い関係にあることが示された。

式(29)についてはつぎのようによく解釈できる。すなわち、指数型の流速分布を与える式は、管路の中心部、開



水路の水面付近、あるいは境界層の上部付近では対数式で近似できる。ただし、 $\kappa$  の値はみかけ上変化する。このような場合は壁面付近で数数則からはずれるはずである。

式(31)から、 $\kappa''$ が減少すれば  $c_f$  の値も減少する。このことは過去の実験で知られている。しかし、このとき、もし  $U_0$  が一定とすれば  $U_*$  が減少することになり、実験事実と反する。

せん断応力  $\tau$  が線型に変化するときと、 $\tau = \tau_0 = \text{const.}$  とおいた場合の流速分布形式の相違はそれほど大きいものではない。たとえば、式(27)で  $c=1$  とした場合でも  $c=0$  とした場合でもそれほど大きな差を生じないのはよく知られている。図-1は境界層内の速度分布の実測値の一例<sup>2)</sup>と、式(28)で  $c=1, c=0$  とした場合の比較を示す。これから、開水路において  $\tau \neq \tau_0$  と近似的においた式でも一応実測値と一致する理由の一部がわかった。

このような方法による解析は、結局すべての不明な点を $\pi$ の仮定の中にいれて処理しているので、物理性には非常に乏しい。しかし、乱流の統計理論等においても、たとえば、対数則を正しいものとして採用し、さらにその微分等も用いられているという点において、数式的な見地からは扱かい方にそれほどの物理性はないといえる。その意味において、この論文は、対数則と $1/7$ 乗則の同値性を論じたものである。

### 参 考 文 献

- 1) Schubauer, G.B. and Tchen, C.M. : Turbulent Flow, Princeton Univ. Press, 1961
  - 2) Lobb, K.R., Winkler, E.M., and Persh, J. : J. Aeronaut. Scie. 22, 1~9 (1955)

(1967.9.11・受付)

中華學術論文集編委員會

昭和 43 年 5 月 15 日 印刷  
昭和 43 年 5 月 20 日 発行

中大當今論文集 第 152 号

宝瓶 200 田 (三 20 田)

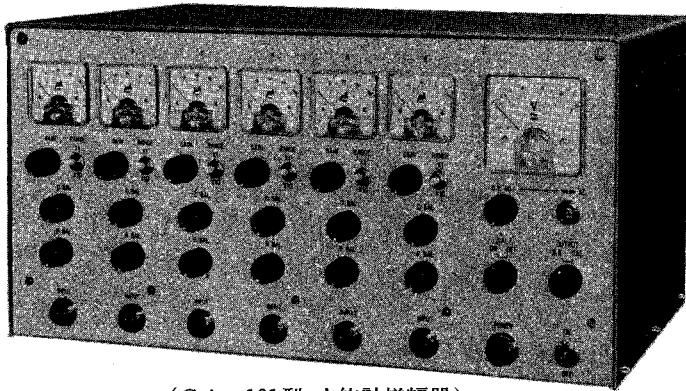
編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目  
印 刷 者 東京都港区赤坂1-3-6

社團法人 土木学会 羽田巖  
株式会社 技報堂 大沼正吉

発行所  
社団法人土木学会  
振替東京 16828 番

東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷二丁目 電話(351)代表5138番

# 水理実験波高解析にどうぞ!!



(CA-101型 水位計増幅器)

- ☆波高計(抵抗式)と記録器をつなげばOK
- ☆簡単な取扱いで直線性良好
- ☆価格低廉
- ☆豊富な納入実績を持っています

カタログ請求先

**計測技研株式会社**

東京都武藏野市中町3丁目29番地19号

TEL (0422) (51) 8958



コンクリート

西ドイツ・トルクレット社の施工技術  
工期短縮・工費節減に大きく貢献します  
●お申し込み次第資料をご送付致します。

●営業種目—特殊土木工事(トルクレットコンクリート吹付)、ボーリング、測量、内装工事、外構工事、一般土木工事、農地工事等

**開発工事株式会社**

社長 前沢 肥

本社:〒191-0015 東京都八王子市大瀬崎1-10-11 電話:0422-51-8958

# PARTNER

## K12

### パートナー エンジンカッター

# 切る

#### ■誰でも切れる

スターを引張るだけで誰にでも簡単にエンジンがかけられます。切断作業は一人で行い、特別の熟練を要しません。

#### ■どこでも切れる

小型で軽量ですから持ち運びに至便です。その割に馬力は強く、どの様な姿勢でも操作出来、どこでも切れます。

#### ■何でも切れる

鉄、コンクリート、その他何でも切れます。ヒューム管、土管、鉄骨、鉄筋など土木建設、その他種々の業務の切断作業に威力を發揮します。

#### ■はやく切れる

例えばコンクリート道路で3cmの深さ、15mの長さに要する切断時間はわずか約15分です。

#### ■きれいに切れる

切口はきれいに切れます。切断作業の後バリトリとか仕上とかの必要はほとんどありません。

#### ■安全に切れる

特にパートナーカッター用に製作したディスクを用いておりますので切断作業は極めて安全且、迅速に行えます。

## 日本アレン機械部

東京都豊島区巣鴨7丁目1875番地 TEL(044) 1711(代)  
本社 東京都千代田区内神田2丁目4-4 TEL(06) 6551(代)  
大阪支店 大阪市北区牛丸町55東洋ビル内 TEL(072) 4571(代)  
福岡営業所 福岡市霧町149 TEL(03) 1515  
広島営業所 広島市三川町10-13 TEL(082) 6351  
北海道出張所 北海道苫小牧市音羽町13の11 TEL(0152) 5016



- 鋸 鉄 管
- ダクタイル管
- ヒューム管
- 道 路
- ワイヤー・ケーブル