

Winkler 地盤上の格子と直交異方性板の解法

——格子基礎とマット基礎の設計への寄与——

ANALYSIS OF GRID WORKS AND ORTHOTROPIC PLATES ON WINKLER-TYPE FOUNDATIONS

——Contribution to Design of Grid Foundation and Mat——

草 間 孝 志*

By Takashi Kusama

要 旨 本文は Winkler 地盤上の格子と直交異方性板の解法を求めたものである。解法には、けた理論と板理論の二つの方法を用いた。けた理論では曲げに対するたわみ角式と、ねじりに対するねじり式との三次元たわみ角法公式をもとに解析を行ない、板理論による解法は Winkler 地盤上の四辺四隅とも自由な直交異方性板に対する階差式をもとに解を求めた。そして、計算例によって格子基礎ならびにマット基礎への適用法を示し、かつ、両者の解法による結果を比較した。

1. ま え が き

格子基礎およびマット基礎などのいわゆる浅い基礎は建築基礎として広く用いられている。これらの基礎の設計にあたっては、通常その接地圧は基礎を剛体と考えて、そのつり合いより直線分布と仮定したり、あるいは、基礎の剛度に無関係に柱に働く荷重をその点の柱の支配面積でうけもつものとして算定している¹⁾。また曲げモーメントの算定には、柱の点を固定点または支点と考えて、接地圧を外力とする固定ばりまたは連続ばりとして計算を行なっている²⁾。しかしながら、構造力学上これらの基礎は地盤上の格子または地盤上の直交異方性板と考えて解くのが最も妥当と考えられる。

地盤上のけたおよび板の問題を取り扱う場合、地盤の性質が問題となる。そこで、地盤の性質を最も適切にあらわすために種々な試みが従来なされている³⁾。これらのうち、計算が容易であるため、変位に比例した地盤反力が生ずるという Winkler の仮定が最も広く用いられている。Vesic, Johnson⁴⁾は実験によりけたの特性長 λl が 2.25 より大きい場合には、荷重状態の特殊な場合を除いて Winkler の仮定が比較的良好であることを示し、Barden⁵⁾も $\lambda l > 2.75$ の場合には、同様 Winkler の仮定が良好であることを実験によって立証している。これらの実験はすべて単一材に対するものであるが、地盤が Winkler の仮定にしたがうものとして格子基礎を解いても、 λl がある程度大きければ、かなり実際の値に近い

結果が得られるのではないかと類推されよう。

Winkler 地盤上のけたの問題は古くより多くの人々によって研究されているが、それらの多くは単一材を対象としたもので、いわゆる弾性床土上の不静定構造物を解くには適当でない。このような構造物に対する従来の研究には、たとえばつぎのものをあげることができよう。

Petersen⁶⁾は Winkler 地盤上のけたに対する Reduction 法を示し、一例として 2 径間よりなる水槽を単位幅あたりの平面構造とみなして、床版のたわみ、曲げモーメントなどを計算している。また、Winkler 地盤上のけたに対するたわみ角法公式の誘導も行なわれ⁷⁾、文献 7) では応用例として、地下鉄に適用して曲げモーメントの計算がなされている。モーメント分配法を用いて解く方法は Penzien⁸⁾によって研究され、文献 8) では、たわみ角法公式の誘導と、モーメント分配法への適用を研究している。しかしながら、これらの方法はいずれも平面構造を対象としたものである。

つぎに Winkler 地盤上の等方性長方形板に対しては、原口博士⁹⁾の研究があり、さらに、従来解かれていなかった四辺四隅とも自由な等方性長方形板に対しては能町博士¹⁰⁾の研究がある。また、成岡博士は種々な境界条件に対する等方性板の階差式を示した¹¹⁾。通常の格子構造を直交異方性板理論によって解く方法が考えられているが、格子基礎あるいはマット基礎に対しても同様板理論による解法が考えられよう。

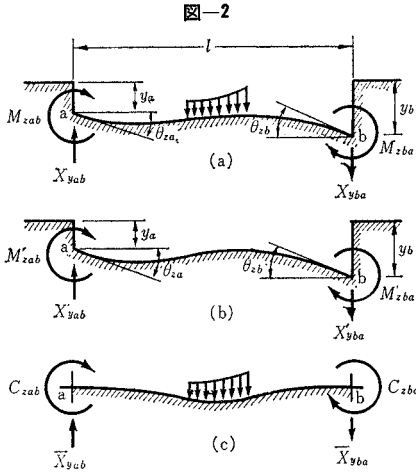
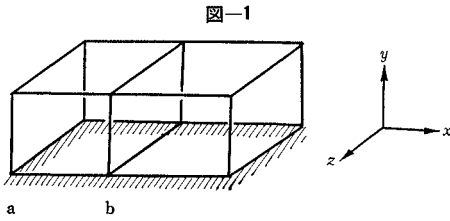
本文は、地盤は Winkler の仮定にしたがうものとし、けた理論に対しては、地盤上の立体構造物を解くためのねじりを考慮した三次元たわみ角法公式を誘導し、一例として、格子基礎あるいはマット基礎への適用を試み、さらに、それらの基礎を部分的に地盤に接している四辺四隅とも自由な直交異方性板とみなして階差法によって解を求め、けた理論による解と板理論による解の比較を行なったものである。

2. けた理論による解法

(1) 基本式

図-1 は格子基礎上につくられた立体ラーメンの略図

* 正会員 信州大学講師 工学部土木工学科



であり、部材 ab は基礎の一部材である。x, y, z 軸は系全体に対する基本軸である。

a) 曲げに対する端モーメント式と端せん力式

ある荷重をうけて変形した x 軸に平行な弾性床上一部材を 図-2 (a) に示した。この (a) の状態は部材端に変形のみを与えた (b) の状態と、両端を固定にして荷重のみを考慮した (c) の状態との和によって得られる。図-2 の記号を用い図示の方向を正とすると、重ね合せの法則により

$$\left. \begin{aligned} M_{zab} &= M_{zab}' + C_{zab}, & M_{zba} &= M_{zba}' + C_{zba} \\ X_{yab} &= X_{yab}' + \bar{X}_{yab}, & X_{yba} &= X_{yba}' + \bar{X}_{yba} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

となる。中間荷重がないときの弾性床上的けたの弾性曲線は、Winkler の仮定を用いると

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} + \mu y = 0$$

によって与えられる。ここに、 $\mu = \mu_0 B$ 、 $\mu_0 =$ 地盤反力係数 (kg/cm³)、 $B =$ 接地幅である。

いま、 $y(x)$ のラプラス変換を $\bar{y}(p)$ とし、 $\lambda = \sqrt[4]{\mu/4EI_z}$ とおいて補助方程式を作ると、つぎの式を得る。

$$\bar{y}(p) = \frac{y(0)p^3 + y'(0)p^2 + y''(0)p + y'''(0)}{p^4 + 4\lambda^4}$$

上式の逆変換を求め、境界条件として、 $x=0$ で $y(0) = y_a$ 、 $y'(0) = \theta_{za}$ 、 $x=l$ で $y(l) = y_b$ 、 $y'(l) = \theta_{zb}$ において整理すると、つぎのようになる。

$$y = \frac{1}{S^2 - s^2} \left\{ [(S^2 - s^2)F_1 - (C^2 - c^2)F_3 + 2(CS + cs)F_4]y_a + [2SsF_3 - 2(Cs + Sc)F_4]y_b + [(S^2 - s^2)F_2 - (CS - cs)F_3 + (C^2 - c^2)F_4] \cdot \frac{\theta_{za}}{\lambda} + [(Sc - Cs)F_3 + 2SsF_4] \cdot \frac{\theta_{zb}}{\lambda} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $S = \text{Sinh } \lambda l$ 、 $C = \text{Cosh } \lambda l$ 、 $s = \sin \lambda l$ 、 $c = \cos \lambda l$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \text{Cosh } \lambda x \cdot \cos \lambda x \\ F_2 &= (\text{Cosh } \lambda x \cdot \sin \lambda x + \text{Sinh } \lambda x \cdot \cos \lambda x)/2 \\ F_3 &= \text{Sinh } \lambda x \cdot \sin \lambda x \\ F_4 &= (\text{Cosh } \lambda x \cdot \sin \lambda x - \text{Sinh } \lambda x \cdot \cos \lambda x)/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

である。これより $M_{zab}' = -EI_z(d^2y/dx^2)_{x=0}$ 、 $M_{zba}' = -EI_z(d^2y/dx^2)_{x=l}$ 、 $X_{yab}' = -EI_z(d^3y/dx^3)_{x=0}$ 、 $X_{yba}' = -EI_z(d^3y/dx^3)_{x=l}$ を求めて式 (1) へ代入すると、つぎの式を得る^{7), 8), 13)}。

$$\left. \begin{aligned} M_{zab} &= k_{zab} \left(\alpha_1 \varphi_{za} + \alpha_2 \varphi_{zb} + \beta_1 \frac{l_0}{l} \eta_a - \beta_2 \frac{l_0}{l} \eta_b \right) + C_{zab} \\ M_{zba} &= k_{zab} \left(\alpha_2 \varphi_{za} + \alpha_1 \varphi_{zb} + \beta_2 \frac{l_0}{l} \eta_a - \beta_1 \frac{l_0}{l} \eta_b \right) + C_{zba} \\ X_{yab} &= -\frac{k_{zab}}{l} \left(\beta_1 \varphi_{za} + \beta_2 \varphi_{zb} + r_1 \frac{l_0}{l} \eta_a - r_2 \frac{l_0}{l} \eta_b \right) + \bar{X}_{yab} \\ X_{yba} &= -\frac{k_{zab}}{l} \left(\beta_2 \varphi_{za} + \beta_1 \varphi_{zb} + r_2 \frac{l_0}{l} \eta_a - r_1 \frac{l_0}{l} \eta_b \right) + \bar{X}_{yba} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\text{Cosh } \lambda l \cdot \text{Sinh } \lambda l - \cos \lambda l \cdot \sin \lambda l}{\text{Sinh}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l} \cdot \lambda l, \\ \alpha_2 &= \frac{\text{Cosh } \lambda l \cdot \sin \lambda l - \text{Sinh } \lambda l \cdot \cos \lambda l}{\text{Sinh}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l} \cdot \lambda l, \\ \beta_1 &= \frac{\text{Cosh}^2 \lambda l - \cos^2 \lambda l}{\text{Sinh}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l} \cdot (\lambda l)^2, \\ \beta_2 &= \frac{2 \text{Sinh } \lambda l \cdot \sin \lambda l}{\text{Sinh}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda l} \cdot (\lambda l)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 2(\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2), & r_2 &= 2(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1), \\ k_z &= K_z/K_0, & K_z &= I_z/l, & K_0 &= \text{基準剛度}, & l_0 &= \text{基準長}, \\ \varphi_z &= 2EK_0 \theta_z, & \eta &= 2EK_0 y/l, & C_z &= \text{曲げの荷重項} \end{aligned}$$

である。M の添字 z は z 軸まわりのモーメントを意味し、X の添字 y は端せん力が y 方向に作用していることを示すものである。なお、 α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 の間にはつぎの関係が成立する。

$$\beta_1 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2, \quad \beta_2^2 = \beta_1^2 - (\lambda l)^4$$

式 (4) の荷重項 C_{zab} 、 C_{zba} 、 \bar{X}_{yab} 、 \bar{X}_{yba} は Winkler 地盤上の両端固定ばりの外力による端モーメント、端せん力を表わし、通常の荷重状態に対しては表-1 に示した。

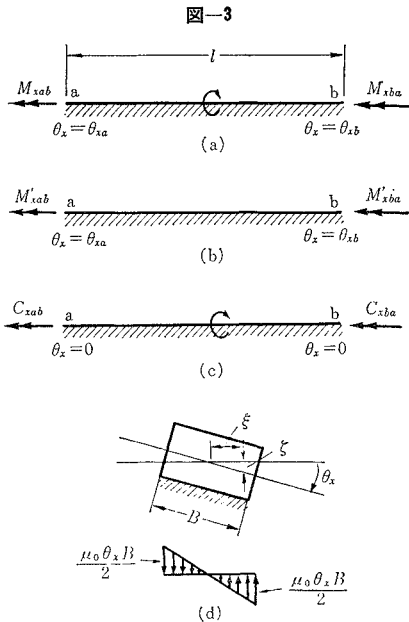
b) ねじりに対する端モーメント式

図-3 (a) にねじりをうけている x 軸に平行な Winkler 地盤上のけたを示す。けたのある点 θ_x ねじれ角

表-1

\bar{X}_{AB}	C_{AB}	荷重状態	C_{BA}	\bar{X}_{BA}
$\frac{C(\lambda l/2) \cdot s(\lambda l/2) + S(\lambda l/2) \cdot c(\lambda l/2)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot P$	$-\frac{S(\lambda l/2) \cdot s(\lambda l/2)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot \frac{Pl}{\lambda l}$		$\frac{S(\lambda l/2) \cdot s(\lambda l/2)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot \frac{Pl}{\lambda l}$	$-\frac{C(\lambda l/2) \cdot s(\lambda l/2) - S(\lambda l/2) \cdot c(\lambda l/2)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot P$
$\frac{\{S(\lambda l)[c(\lambda a) \cdot S(\lambda b) + s(\lambda a) \cdot C(\lambda b)] - s(\lambda l) \times [C(\lambda a) \cdot S(\lambda b) + S(\lambda a) \cdot c(\lambda b)]\} \cdot P}{S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)}$	$-\frac{[S(\lambda l) \cdot s(\lambda a) \cdot S(\lambda b) - s(\lambda l) \cdot S(\lambda a) \cdot s(\lambda b)] \cdot Pl}{\lambda l [S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)]}$		$\frac{[S(\lambda l) \cdot S(\lambda a) \cdot s(\lambda b) - s(\lambda l) \cdot s(\lambda a) \cdot S(\lambda b)] \cdot Pl}{\lambda l [S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)]}$	$-\frac{\{S(\lambda l)[C(\lambda a) \cdot s(\lambda b) + S(\lambda a) \cdot c(\lambda b)] - s(\lambda l) \times [c(\lambda a) \cdot S(\lambda b) + s(\lambda a) \cdot C(\lambda b)]\} \cdot P}{S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)}$
$\frac{C(\lambda l) - c(\lambda l)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot \frac{ql}{\lambda l}$	$-\frac{S(\lambda l) - s(\lambda l)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot \frac{ql^2}{2(\lambda l)^2}$		$\frac{S(\lambda l) - s(\lambda l)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot \frac{ql^2}{2(\lambda l)^2}$	$-\frac{C(\lambda l) - c(\lambda l)}{S(\lambda l) + s(\lambda l)} \cdot \frac{ql}{\lambda l}$
$\frac{\{-2\lambda l [C(\lambda l) \cdot s(\lambda l) + S(\lambda l) \cdot c(\lambda l)] + [S(\lambda l) + s(\lambda l)]^2\} \cdot ql}{2(\lambda l)^2 [S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)]}$	$-\frac{\{-2\lambda l \cdot S(\lambda l) \cdot s(\lambda l) + [C(\lambda l) - c(\lambda l)] \times [S(\lambda l) + s(\lambda l)]\} \cdot ql^2}{2(\lambda l)^2 [S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)]}$		$\frac{\{\lambda l [S^2(\lambda l) + s^2(\lambda l)] - [C(\lambda l) - c(\lambda l)] \times [S(\lambda l) + s(\lambda l)]\} \cdot ql^2}{2(\lambda l)^2 [S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)]}$	$-\frac{\{2\lambda l [C(\lambda l) \cdot S(\lambda l) + c(\lambda l) \cdot s(\lambda l)] - [S(\lambda l) + s(\lambda l)]^2\} \cdot ql}{2(\lambda l)^2 [S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)]}$
	$-\frac{S(\nu b)}{S(\nu l)} \cdot T_0$		$-\frac{S(\nu a)}{S(\nu l)} \cdot T_0$	
	$-\frac{C(\nu(l-a)) - C(\nu(l-b))}{S(\nu l)} \cdot \frac{t_0 l}{\nu l}$		$-\frac{C(\nu b) - C(\nu a)}{S(\nu l)} \cdot \frac{t_0 l}{\nu l}$	

注: $S(\lambda l)$, $s(\lambda l)$,はそれぞれ $S(\lambda l) = \text{Sinh}(\lambda l)$, $s(\lambda l) = \text{sin}(\lambda l)$ を表わす。



を生じたとき、ねじれ変形後も断面の形が変わらないものと仮定すると、図-3 (d) に示すように、 ξ 点の変位は近似的に $\theta_x \xi$ によって表わされる。したがって、この点の単位面積あたりの地盤反力は $\mu_0 \theta_x \xi$ となり、この断面全体については、地盤反力によってつぎのような抵抗モーメントを生ずる。

$$\int_{-B/2}^{B/2} \mu_0 \theta_x \xi^2 d\xi = \frac{\mu_0 \theta_x B^3}{12}$$

そして、けたの x 軸方向のねじりモーメントの変化は、上式によって表わされる抵抗モーメントに等しいから、

$$GJ_x \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} - \frac{\mu_0 B^3}{12} \theta_x = 0$$

を得る¹⁴⁾。ここに GJ_x は x 軸に平行な部材のねじり抵抗係数である。曲げの場合と同様にして、ねじりに対する端モーメント式は上式をもとに、境界条件として、 $x=0$ で $\theta_x = \theta_{xa}$, $x=l$ で $\theta_x = \theta_{xb}$ とおいて、両端のねじりモーメントを求めると、

$$\left. \begin{aligned} M_{xab} &= 2tk_{xab}(\rho_1 \varphi_{xa} - \rho_2 \varphi_{xb}) + C_{xab} \\ M_{xba} &= 2tk_{xab}(\rho_1 \varphi_{xb} - \rho_2 \varphi_{xa}) + C_{xba} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

を得る¹³⁾。ここに、

$$\rho_1 = \frac{\nu l \cdot \text{Cosh } \nu l}{\text{Sinh } \nu l}, \quad \rho_2 = \frac{\nu l}{\text{Sinh } \nu l}, \quad \nu = \sqrt{\frac{\mu_0 B^3}{12 GJ}}$$

$$k_{xab} = K_x / K_0, \quad K_x = J_x / l, \quad K_0 = \text{基準剛度}, \\ t = m / [8(m+1)], \quad m = \text{部材のポアソン数}, \\ \varphi_x = 2EK_0 \theta_x, \quad C_x = \text{ねじりの荷重項}$$

である。なお、 M , φ とも軸の原点に向かって右まわりを正とする。式 (5) の C の値は中間トルクによる荷重項を表わし、表-1 によって与えられる。

(2) 解法

式 (4), (5) は x 軸に平行な Winkler 地盤上の端モーメント式、端せん力式である。他の軸に平行な部材に

対してもその軸記号を変えることによって得られる。また、 $\lambda l \rightarrow 0, \nu l \rightarrow 0$ とおくと、式 (4), (5) は通常の立体ラーメンあるいは格子に適用される三次元たわみ角法公式¹⁵⁾に一致し、表-1 に示した荷重項もまた通常の場合に一致する。したがって、図-1 に示すような基礎ばりを有する立体ラーメンをたとえば電子計算機によって解く場合、基本式を区別することなく、式 (4), (5) を用いて解くことが可能である。

つり合い条件式は節点におけるモーメントのつり合い式とせん断力のつり合い式とからなる。節点方程式は、たとえば x 軸まわりに対しては、式 (6) によって与えられる。

$$\Sigma(-M_{xai}) + \bar{M}_{xa} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、添字 a はつり合いを考えている節点の番号であり、添字 i は a 点に隣接する節点の番号を表わす。また、 \bar{M}_{xa} は a 点に作用している外力のモーメントである。つぎにせん断力のつり合い条件は、たとえば、図-4 の場合 y 軸方向のせん断力のつり合いは、

$$\Sigma(-X_y) + P_y = 0 \dots\dots\dots (7)$$

によって与えられる。上式は図-5 の場合に対しても同様に適用することができる。

図-4

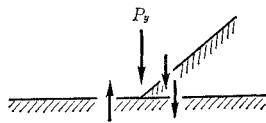
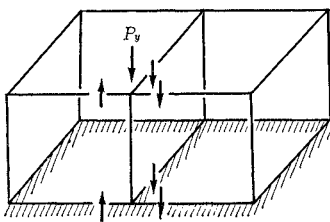


図-5



式 (6) は未知数 φ の数だけ成立し、式 (7) は未知数 η の数だけつくることができる。このようにして得られた方程式は連立 1 次方程式となるから、これを解くと未知数 φ, η が求められ、式 (4), (5) より各部材の端モーメント、端せん断力の値を求めることができる。

基礎の設計に際し、その接地圧ならびにモーメントなどの影響線を求めることは重要である。Sundara Raja Iyengar, Anantharamu¹⁶⁾ は Winkler 地盤上の単一材に対するこれらの影響線を無限級数によって求める方法を示し、その結果を図示しているが、Müller-Breslau の原理を本法に適用すると、複雑な基礎に対する影響線をも求めることができる。基本式として式 (4), (5) を用いる以外は通常の場合¹⁷⁾とまったく同様である。

一応、地盤上のけたを有する立体ラーメンの解法についてもふれたが、本文は主として基礎のみを対象としたものである。したがって計算例では上部構造を考慮せず、基礎についてのみ計算を行なった。

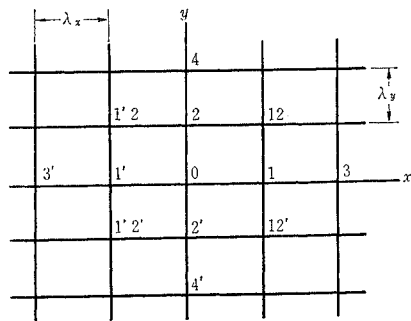
3. 板理論による解法

(1) Winkler 地盤上の直交異方性板に対する階差式
Winkler 地盤上の直交異方性板のたわみ曲面を表わす微分方程式は次式で与えられる。

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\kappa \sqrt{B_x B_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu_0 w = p \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\kappa = H/\sqrt{B_x B_y}$ 、 μ_0 は地盤反力係数である。成岡博士は通常の直交異方性板に対する研究を行ない、その格子構造への応用¹⁸⁾と階差式による方法¹⁹⁾を示している。Winkler 地盤上の直交異方性板の場合、式 (8) によって明らかのように、通常の直交異方性板に対する微分方程式に $\mu_0 w$ の項をつけ加えればよい。したがって、階差法による場合には、文献 18), 19) の方法はただちに Winkler 地盤上の直交異方性板あるいは格子に適用することができる。ただ異なる点は、 μ_0 を考慮することとその値の検討(後述)である。なお、簡単のためポアソン比 $\nu_x = \nu_y = 0$ として格子に適用することにしよう。

図-6



いま、図-6 に示すような network を考え、その間隔を λ_x, λ_y とし、 $\alpha = (\lambda_y/\lambda_x)^2$ 、 $\beta = \sqrt{B_y/B_x}$ 、 $r = \lambda_y^4/B_x$ とおくと、注目する板内部の一点 0 (図-6) における階差方程式はつぎのように得られる。

		β^2		
	$2\alpha\beta\kappa$	$-4(\beta^2 + \alpha\beta\kappa)$	$2\alpha\beta\kappa$	
α^2	$-4(\alpha^2 + \alpha\beta\kappa)$	$6\alpha^2 + 8\alpha\beta\kappa + 6\beta^2$	$-4(\alpha^2 + \alpha\beta\kappa)$	α^2
		$+r\mu_0$		
	$2\alpha\beta\kappa$	$-4(\beta^2 + \alpha\beta\kappa)$	$2\alpha\beta\kappa$	
		β^2		

$$xw = r p_0 \dots\dots\dots (9)$$

さて、四辺四隅とも自由な Winkler 地盤上の直交異方性板の場合、つぎの 9 個の点について階差方程式を求める必要がある。

- a) 一般の内点
- b) x 軸に平行な自由辺近傍の内点
- c) y 軸に平行な自由辺近傍の内点

- d) x軸に平行な自由边上の一般点
- e) y軸に平行な自由边上の一般点
- f) 自由辺と自由辺に囲まれた内点
- g) 自由隅近傍のx軸に平行な自由边上の点
- h) 自由隅近傍のy軸に平行な自由边上の点
- i) 自由隅上の点

これらのうち一般内点に対する階差方程式は式(9)によって与えられる。その他の点に対する階差方程式は、四辺四隅が自由の条件より求められるが、ここではそれらの記述は省略することにする。

(2) 格子への適用

板剛度 B_x, B_y の値の決定には、通常の格子げたに對する場合とまったく同様に取り扱うことができよう。すなわち 図-7 の場合、けたの曲げ剛さ EI をけたの間隔で割ると

$$B_x = EI_x / l_y, B_y = EI_y / l_x \dots\dots\dots(10)$$

を得る。

つぎに、地盤反力係数について考えよう。いま、等値な曲げ剛さを有する格子げたと板とを同じ地盤反力係数の地盤上にのせて等しい外力を加えた場合、格子げたと板とではその接地面積の相違より、板は格子げたにくらべ、たわみは小さく、たわみ曲面は扁平となることが当然予想される。この両者のたわみ曲面を等しくするためには、格子げたを板におきかえた場合、板に対する地盤反力係数の値を変える必要がある。

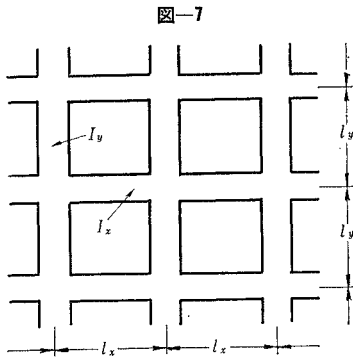


図-7

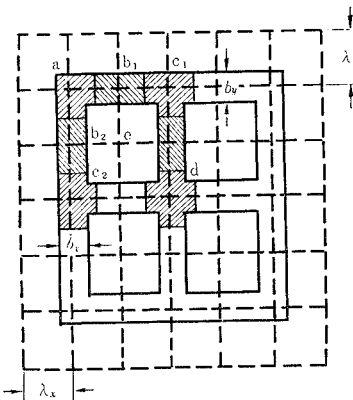


図-8

いま、板のある要素(接地面積 dA_p)における地盤反力係数を μ_p とし、その要素のたわみを w とすると、その要素に働く地盤反力の合力は $\mu_p w dA_p$ であり、一方その要素に含まれる格子ばりの接地面積を dA_b とし、かつその点の地盤反力を μ_b 、たわみを w とおくと、格子ばりの要素 dA_b に働く地盤反力の合力は $\mu_b w dA_b$ となる。これらの合力を等しいとおくと次式を得る*。

$$\mu_p = \frac{dA_b}{dA_p} \mu_b \dots\dots\dots(11)$$

network の間隔が λ_x, λ_y のときには、格点の要素の面積は $dA_p = \lambda_x \times \lambda_y$ である。よって、式(11)は

$$\mu_p = \frac{dA_b}{\lambda_x \lambda_y} \cdot \mu_b \dots\dots\dots(12)$$

となる。 dA_b はその格点の $\lambda_x \times \lambda_y$ 部分に含まれる格子ばりの接地面積である。以上の結果は地盤反力係数が μ_b なる Winkler 地盤上の格子ばりを、同地盤上の直交異方性板とおきかえた場合、各格点の地盤反力係数は式(12)によって求められる μ_p を用いなければたわみ曲面が合わないことを示している。

一例として、図-8 に示すような格子ばりを、点線のような network の板におきかえた場合について考えると、格点における接地面の形として、図中の a, b_1, b_2, c_1, c_2, d の格点のような形が存在する。また、格点 e のように格子ばりを含まない格点も考えられる。式(12)を各格点に適用すると

$$\left. \begin{aligned} \text{格点 } a : \mu_p &= \frac{\mu_b}{2} \left(\frac{b_x}{\lambda_x} + \frac{b_y}{\lambda_y} \right) \\ \text{格点 } b_1 : \mu_p &= \mu_b \frac{b_y}{\lambda_y} \\ \text{格点 } b_2 : \mu_p &= \mu_b \frac{b_x}{\lambda_x} \\ \text{格点 } c_1 : \mu_p &= \frac{\mu_b}{2} \left(\frac{b_x}{\lambda_x} + 2 \frac{b_y}{\lambda_y} - \frac{b_x}{\lambda_x} \cdot \frac{b_y}{\lambda_y} \right) \\ \text{格点 } c_2 : \mu_p &= \frac{\mu_b}{2} \left(2 \frac{b_x}{\lambda_x} + \frac{b_y}{\lambda_y} - \frac{b_x}{\lambda_x} \cdot \frac{b_y}{\lambda_y} \right) \\ \text{格点 } d : \mu_p &= \mu_b \left(\frac{b_x}{\lambda_x} + \frac{b_y}{\lambda_y} - \frac{b_x}{\lambda_x} \cdot \frac{b_y}{\lambda_y} \right) \\ \text{格点 } e : \mu_p &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

を得る。

式(11) および (12) は各要素に対して求めたものであるが、板および格子全体について考えると

$$\mu_p = \frac{A_b}{A_p} \mu_b \dots\dots\dots(14)$$

を得る。

ここに A_b, A_p はそれぞれ格子げたの面積ならびに板全体の接地面積である。式(14)は A_b と A_p の値があまり相違しない場合、たとえば、マット基礎のような場合に対して用いることができるものと考えられる。

* これは格点の要素に働く地盤反力を、その要素内に等分布させたことと同じである。

4. 計算例

(1) けた理論による場合

図-9に示すコンクリート基礎は $E=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $l=5\text{ m}$ であり, x 軸に平行な部材の断面は $50\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ の正方形断面で, z 軸に平行な部材の断面は幅 $50\text{ cm} \times$ 高さ 30 cm の長方形断面である. $\mu_0=5\text{ kg/cm}^3$ のとき, 図示の荷重状態について, たわみ曲線, モーメント, せん断力を求めてみよう.

この格子に対する未知量は $\varphi_x, \varphi_z, \eta$ とも 9 個, 合計 27 個であるが, 対称条件より未知量は 8 個となる. いま, ポアソン数を 6 とすると, $t=0.107$ となり, x 軸に平行な部材の剛度 ($K_0=1.042\text{ cm}^3$) を基準剛度にとると,

x 軸に平行な部材:

$$k_x=1.687, k_z=1.000, \lambda l=2.445, \nu l=0.406$$

z 軸に平行な部材:

$$k_x=0.216, k_z=0.541, \lambda l=3.586, \nu l=0.717$$

となる. 式(4),(5)より端モーメント式, 端せん力式が得られ, さらに, 式(6),(7)より, $\varphi_x, \varphi_z, \eta$ に関する 8 元の連立方程式を得る. これを解くと $\varphi_x, \varphi_z, \eta$ の値が求まる. これらの値をもとに端モーメント, 端せん力を求めることができる.

つぎに, 部材の任意点におけるたわみ, たわみ角, 曲げモーメント, せん断力の値は method of initial conditions²⁰⁾ を用いて求めることができる. この計算例のように中間荷重がない場合の曲げに対しては表-2によって得られる. 表中の F_1, F_2, F_3, F_4 は式(3)に示されている. 中間荷重が働く場合に対しては文献 20) を参照されたい. 部材の任意点におけるねじれ角とねじりモーメントについては次式を用いる.

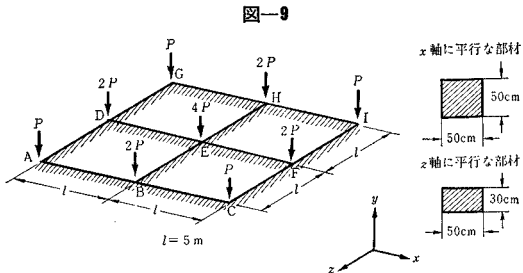


表-2

	$\frac{l_0}{l} \eta_a$	φ_a	M_{ab}	X_{ab}
$\frac{2EK_0}{l} y =$	F_1	$\frac{F_2}{\lambda l}$	$-\frac{F_3}{k_{ab}(\lambda l)^2}$	$-\frac{l}{k_{ab}} \cdot \frac{F_4}{(\lambda l)^3}$
$2EK_0 \theta =$	$-2\lambda l F_4$	F_1	$-\frac{2F_2}{k_{ab}\lambda l}$	$-\frac{l}{k_{ab}} \cdot \frac{F_3}{(\lambda l)^2}$
$M =$	$k_{ab}(\lambda l)^2 F_3$	$k_{ab}\lambda l F_4$	F_1	$\frac{l}{\lambda l} F_2$
$Q =$	$2 \frac{k_{ab}}{l} (\lambda l)^3 F_2$	$\frac{k_{ab}}{l} (\lambda l)^2 F_3$	$-2 \frac{\lambda l}{l} F_4$	F_1

$$2EK_0 \theta = \frac{\text{Sinh } \nu(l-x) \cdot \varphi_a + \text{Sinh } \nu x \cdot \varphi_b}{\text{Sinh } \nu l}$$

$$M = 2tk_{ab} \frac{\nu l}{\text{Sinh } \nu l} [\text{Cosh } \nu(l-x) \varphi_a - \text{Cosh } \nu l \cdot \varphi_b]$$

このようにして求めた結果を図-10, 11, 12, 13に示した. この計算例の場合, どの部材も, 部材端のねじれに対する回転角は両端とも 0 または同じ方向であるから, ねじりモーメントはかなり小さく得られた.

端モーメント影響線はつぎのようにして求めることができる. たとえば, 図-9の格子の M_{zBC} -線は部材 BC に対する端モーメント, 端せん力式の θ_{zB} のかわりに $\theta_{zB}+1$ を代入し, つり合い条件式より得られる連立 1 次方程式 (対称条件が成り立たないから 27 元) を φ, η

図-10 たわみ曲線

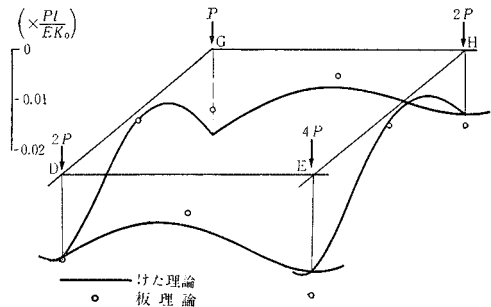


図-11 曲げモーメント図

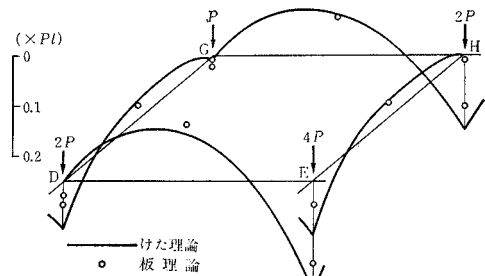


図-12 せん断力図

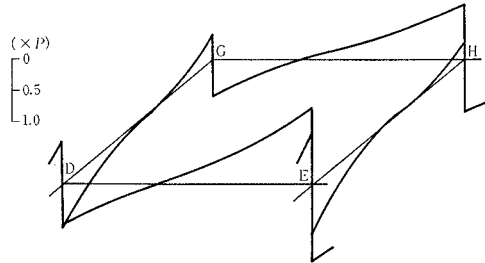


図-13 ねじりモーメント図

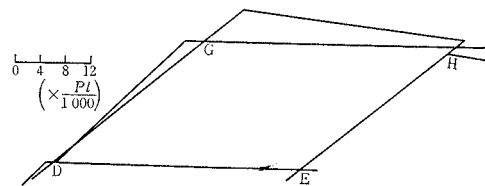
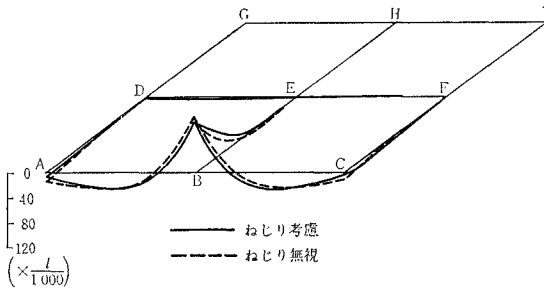


図-14 M_{zBC} -線

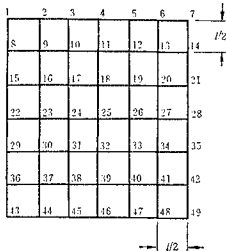


について解き、さきと同様にして得られるたわみ曲線が M_{zBC} -線である。図-14 に M_{zBC} -線を示した。図中の点線はねじりを無視した場合で、ねじり抵抗係数を 0 とおいたときの値である。

(2) 板理論による場合ならびにけた理論との比較

比較のため、さきに求めた図-9 に例をとる。板剛度は式 (10) より $B_x=218.75 \times 10^6 \text{kg-cm}$, $B_y=47.25 \times 10^6 \text{kg-cm}$ となる。したがって $\beta=0.465$, いま $\kappa=1$ と

図-15



仮定しよう。図-15 に示すような network を考えると、 $\lambda_x=\lambda_y=l/2$, よって $\alpha=1$ となる。式 (13) を用いて各格点の μ_p を算出すると、 $\mu_0=\mu_0=5 \text{kg/cm}^2$ のとき、たとえば、格点 25 では $\mu_p=1.8 \text{kg/cm}^2$ となる

表-3 式 (13) より求めた μ_p の値 ($\mu_0=5 \text{kg/cm}^2$ の場合)

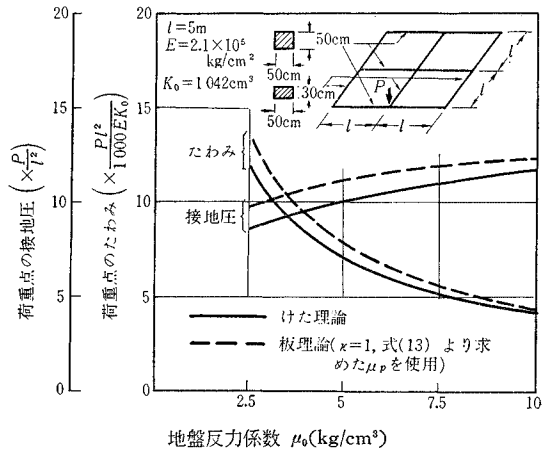
単位: kg/cm^2

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	1.0	1.4	1.0	1.0	1.0	0.0
0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0
0.0	1.4	1.0	1.8	1.0	1.4	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	1.0	1.4	1.0	1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

表-4 けた理論と板理論とのたわみの比較 ($\mu_0=5 \text{kg/cm}^2$ の場合)

格点		$P^2/100 EK_0$							
		9	10	11	16	18	23	24	25
けた理論	ねじり考慮	1.68	0.74	1.27	0.18	0.20	1.63	0.98	1.89
	ねじり無視	1.75	0.74	1.25	0.16	0.21	1.63	0.98	1.89
板理論	$\kappa=1, \mu_p$ は式 (13) を使用	1.15	0.45	1.53	0.15	0.22	1.66	0.69	2.45
	$\kappa=0, \mu_p$ は式 (13) を使用	1.17	0.39	1.59	0.15	0.17	1.70	0.59	2.55
	$\kappa=1, \mu_p$ は式 (14) を使用	1.42	0.93	2.66	0.33	0.74	2.82	1.88	5.25

図-16



(表-3)。階差方程式には μ_0 の代わりにこの μ_p を用いる。これらの値をもとに階差方程式を求め、これを解くと各格点のたわみを得る。さらに、これよりモーメントが求まる。図-10,11 にその結果をプロットした。たわみについて、けた理論による解と板理論による解を比較すると、表-4 のようになる。

また、さきと同じ断面を有する基礎に対し、荷重が B 点 (格点 39) にのみ作用する場合について、 μ_0 の値と荷重点のたわみならびに接地圧との関係を求めて図-16 に示した。同図の場合、けた理論による解と板理論による解は、傾向がかなりよく一致している。

5. 結 言

以上、Winkler 地盤上のけたに対する三次元たわみ角法公式の誘導と、同地盤に部分的に接している直交異方性板について述べ、かつ、基礎への適用を計算例によって示した。本文は、比較のため同一の問題をけた理論と板理論の両解法によって計算を行なったが、どちらの解法を用いるかは、その構造がけたとしての構造に近いのか、あるいは、板としての構造により近いかによって判断されるべきであると考えられる。

板理論による場合の κ の値については、計算結果への影響を考えると、 κ の値のとり方よりも μ_0 の値による影響の方が大きい。さらに、基礎の場合、通常 x 方向と y 方向の板剛度が極端に異なることは少ないと考えられるから、 κ の値は 1 としてよいと思う。

本文は Winkler の仮定にしたがった。しかしながら、地盤は必ずしも Winkler の仮定にしたがうものではない。Winkler 地盤上のけた および 板と、他の地盤モデル上のけた および 板との比較については、つぎの機会に報告する予定であるが、Winkler の仮定によって計算しても、少なくとも従来の方法に比し、より合理的な基礎を設計することが可能と思われる。

また、格子基礎ならびにマット基礎へ応用するため、ある制限（隣接荷重、隣接スパンが 20% 以上相違しないなど）を設けて、F. Kramrisch^{21), 22)} が Winkler 地盤上の けた について研究し、その単純化をはかっているが、本文はこれに比し計算は多少複雑ではあるが、その制限外の一般の場合に対しても適用できよう。本文が基礎の設計上役立つならば、幸いである。

なお、地盤上のけた塑性設計については、すでに一部の状態について計算を行なったが⁽²³⁾、今後さらに、格子基礎へ拡張したいと考えている。

終りに、この研究に対して終始ご指導を賜った名古屋大学 成岡教授ならびに信州大学 吉田教授に厚く謝意を表します。

参考文献

- 1) 村山朔郎・大崎順彦：基礎工学ハンドブック，朝倉書店，昭和 39 年，pp. 398~428
- 2) A.D. Kerr : Elastic and Viscoelastic Foundation Models, Journal of the Applied Mechanics, ASME, Vol. 31, Sept., 1964, pp. 491~498
- 3) A.B. Vesić, W.H. Johnson : Model Studies of Beams on a Silt Subgrade, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 89, No. SM 1, Feb., 1963, pp. 1~31
- 4) L. Barden : The Winkler Model and Its Application to Soil, Structural Engineer, Vol. 41, No. 9, 1963, pp. 279~280
- 5) L. Barden : Distribution of Contact Pressure under Foundations, Géotechnique, Vol. 12, No. 3, Sept., 1962, pp. 181~198
- 6) C. Petersen : Das Verfahren der Übertragungsmatrizen (Reduktionsverfahren) für den Kontinuierlich Elastisch Gebetteten Träger, Die Bautechnik, Heft 3, 1965, S. 87~89
- 7) 村上博智：弾性支承ばりを含む ラーメンの一解法，早稲田大学理工学研究所報告，第 20 輯，昭和 37 年 6 月
- 8) 沢田敏男・長谷川高士：弾性床上的のハリ構造物の応力解析，土と基礎，Vol. 14, No. 4, 1966, pp. 11~17
- 9) J. Penzien : Discontinuity Stesses in Beams on Elastic Foundation, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 86, No. ST 4, Apr., 1960, pp. 67~93
- 10) 原口忠次郎，：弾性基礎上の矩形板，山海堂，昭和 39 年
- 11) 能町純雄：弾性基礎にある 四辺四隅とも自由な矩形板の曲げについて，土木学会論文集，第 32 号，昭和 31 年，pp. 26~32
- 12) 文献 10)，pp. 351~366
- 13) 草間孝志：弾性床上的の剛節構造の一解法，土木学会第 19 回年次講演会概要第 I 部，昭和 39 年
- 14) M. Hetenyi : Beams on Elastic Foundation, University of Michigan Press, 1961, pp. 151~152
- 15) S. Yoshida : Analysis of Rigid Frames in Space by Applying Slope-Deflection Formulas, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No. 12, Dec., 1961, pp. 35~113
- 16) K.T. Sundara Raja Iyenger, S. Anantharamu : Influence Lines for Beams on Elastic Foundations, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST 3, June, 1965, pp. 45~56
- 17) 村上 正：影響線プロットの一法，九大工学集報，第 26 巻，第 4 号，昭和 28 年，pp. 216~224
- 18) 成岡昌夫：直交異方性板の曲げ理論とその応用，土木学会誌，第 41 巻，第 10 号，昭和 31 年
- 19) 種々な板に対する文献が，成岡昌夫：階差法に関する文献，土木学会誌，第 44 巻，第 5 号，昭和 34 年，pp. 37~40 に示されている
- 20) 文献 14) pp. 6~8
- 21) F. Kramrisch, P. Rogers : Simplified Design of Combined Footings, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 87, No. SM 5, Oct., 1961, pp. 20~44
- 22) S.V. Desimone : Suggested Design Procedures for Combined Footings and Mats, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 63, No. 10, Oct., 1966, pp. 1041~1057
- 23) 草間孝志：地盤上のけたの 塑性計算に関する 一試案，土木学会第 22 回年次講演会概要，1-14, 1967

(1967.8.7・受付)