

縦衝撃を受ける多層棒内の応力伝播に関する実験的研究

EXPERIMENTAL STUDY OF STRESS WAVES IN MULTI-STORY RODS SUBJECTED TO LONGITUDINAL IMPACT

丹羽 義次*・佐藤 誠**

By Yoshiji Niwa and Makoto Sato

1. 緒 言

衝撃現象の中でもっとも単純かつ基礎的な問題である縦衝撃を受ける棒については従来数多くの研究がなされている。弾性棒についてこの研究は2つの方向に分けることができる。

一つは棒に作用する衝撃条件、棒の断面形について厳密に取り扱い、応力波の伝播中の挙動を微視的に見ていく方向である。これについては Pochhammer & Chree¹⁾, G. Folk, C.A. Shook, & C.W. Curtis²⁾, R.W. Morse^{3),4)}, R.D. Mindlin & E.A. Fox⁵⁾らの棒の断面形状による Geometrical Dispersion についての研究, O.E. Jones & A.T. Ellis⁶⁾らによる棒の断面に平面保持の条件が適用できなくなった場合の Warping についての研究等がある。しかしこれらはいずれも数学的に境界条件の取り扱いが困難であるため、すべて半無限棒を対象にしたものである。

他方、応力波の伝播を巨視的に見て、種々の固定条件にある棒の縦衝撃による応力波の反射、透過による挙動を長時間にわたって究明していく方向がある。これには St. Venant⁷⁾ の剛体による縦衝撃を受ける棒の解, De-Juhasz および Fisher⁸⁾ の図式解法等がある。

本論文では 7), 8) の研究をもとに、平面保持が適用でき、Geometrical Dispersion が無いとして、平面一次元波を対象として、多層棒内の応力伝播について理論的および図式的に取り扱い、実験結果と比較検討した結果を示す。

4. 以下で述べる実験結果には、実験模型とした多層棒の一部に Epoxy 樹脂 (アラルダイトB) を用いている。

論文集第 152 号登載予定論文では実験範囲内でアラルダイトBが Voigt 型の粘弾性体として挙動することを述べた。したがって厳密には粘弾性解を用いなければならないが、同時に動的特性の未知なアルミおよび鉛も併用しており、また微視的に見た場合の未知要素との関連も不明であるため、ここでは多層棒内の応力伝播の基礎的性状を論ずることを主題とし、弾性解のみにとどめた。

2. 縦衝撃をうける棒の解⁹⁾

ここでは一端を剛体に固定し、他端を縦衝撃した場合の棒内の応力伝播について考える。

(1) 縦衝撃を受ける棒のばね解

図-1 に示すような一端を剛体に固定した長さ l 、質量 M_1 の弾性棒を質量 M_0 の衝撃体により速度 v_0 で衝撃した場合を考える。このとき衝撃時間 τ は棒の固有周期 T_1 に比例し、棒と衝撃体の質量比 $m = M_1/M_0$ の関数となる。 τ/T_1 が非常に大きな場合には T_1 時間内の棒内の応力変化は無視できる。したがってこの場合に棒を質量のない均一なばねと同等であると考えることができる。ゆえに衝撃体の運動エネルギーと棒の最大ひずみエネルギーとが等しいとして最大ひずみ ϵ_m 、最大応力 σ_m を求めると以下ようになる。

図-1

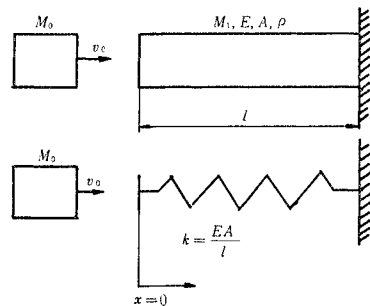
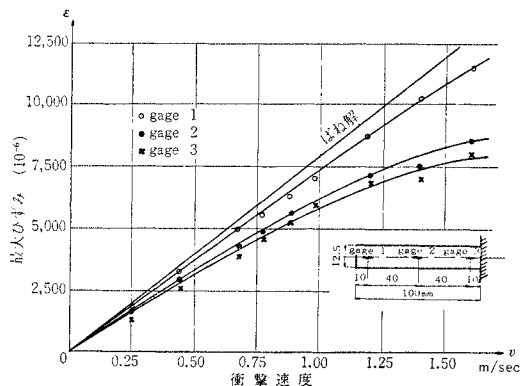


図-2 衝撃速度と最大ひずみ

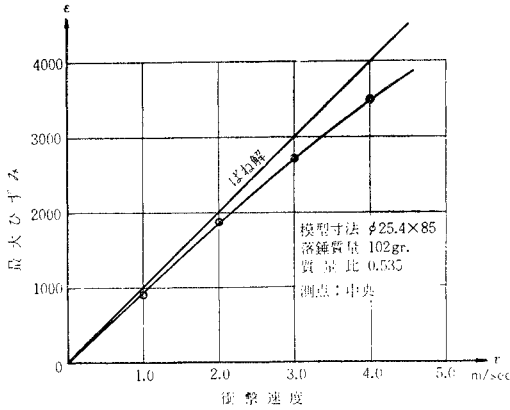
振り質量 4.02 kg, 質量比 $m = 4.875 \times 10^{-3}$



* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 京都大学助手 同上

図-3 落錘衝撃による衝撃速度と最大ひずみ



$$\epsilon_m = v_0/c_0 \sqrt{1/m}, \quad \sigma_m = \rho c_0 v_0 \sqrt{1/m} \dots (1)$$

ここに、 c_0 は棒内の縦波の伝播速度であり、 ρ は棒の密度である。

図-2 は Epoxy 樹脂 (アラルダイト B) 棒の一端に質量 4.02 kg という非常に重い振子による縦衝撃を加えた場合の衝撃速度と最大ひずみの関係を示したものである。

図-3 は落錘による縦衝撃を加えた場合の両者の関係である。

両図において実験値の方が小さくなっているのは、理論値が質量のないばねと置き換えているためである。しかしながらいずれも式(1)による近似でかなり正確に最大ひずみを推定することができる。

(2) St. Venant の解

この解は棒の固有周期 T_1 が衝撃時間 τ に比較して十分大きくない場合に、棒内の応力を波動問題として取り扱うものである。

棒の運動方程式は横慣性を無視すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots (2)$$

ここに、 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ である。

式(2)の解は

$$u = f(ct-x) + g(ct+x) \dots (3)$$

棒の長さを l 、衝撃端を原点として棒軸方向を x の正の方向とする。このとき境界条件、初期条件を以下のように考える。

境界条件 $x=l$; $u=0$

初期条件 $t=0$; $u=0 \quad 0 \leq x \leq l,$

$$\partial u / \partial t = 0 \quad 0 < x \leq l,$$

$$\partial u / \partial t = v_0 \quad x=0,$$

$$\partial u / \partial x = 0 \quad 0 < x \leq l.$$

これらの条件を考えると、式(3)より

$$u = f(ct-x) - f(ct+x-2l) \dots (4)$$

一方、衝撃の瞬間には衝撃端の変位速度と衝撃速度が等しいと考えると、力積と運動量との関係から、

$$-\int_0^t EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} dt = M_0 \left[v_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=0} \right] \dots (5)$$

式(4)と(5)とから、

$$f(\xi) = \frac{l v_0}{m c_0} (1 - e^{-\frac{m}{l} \xi}) + e^{-\frac{m}{l} \xi} \int_0^\xi e^{\frac{m}{l} \xi} \times \left[f'(\xi-2l) - \frac{m}{l} f(\xi-2l) \right] d\xi \dots (6)$$

となる。

ここに、 $\xi = c_0 t$ 、 $m = \rho A l / M_0 = M_1 / M_0$ 。

式(6)より一端固定棒としての初期条件を考えると、式(4)から $i l \leq \xi < 2(i+1)l$ 、 $i=0,1,2,\dots$ の区間について順次変位とひずみとを計算することができる。

最大応力 σ_m は v_0/c_0 と質量比 m の関数となり、固定端に生ずる。この最大応力の近似解は St. Venant, Boussinesq によって求められており、質量比によって、

$$0 < m^{-1} < 5 \text{ のとき } \sigma_m = 2 \rho c_0 v_0 (1 + e^{-2m}),$$

$$5 < m^{-1} < 24 \quad \sigma_m = \rho c_0 v_0 (1 + m^{-1/2}),$$

$$24 < m^{-1} \quad \sigma_m = \rho c_0 v_0 m^{1/2}.$$

である。

衝撃時間は衝撃端で応力が0になるという条件、

$$(\sigma)_{x=0} = -E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

より求められる。

図-4 は落錘衝撃による一端固定棒の衝撃端から中心線上 2.2 cm の位置における縦ひずみの時間変化を示したものである。破線は実験値であり、実線は質量比 0.215 のときの St. Venant の解である。

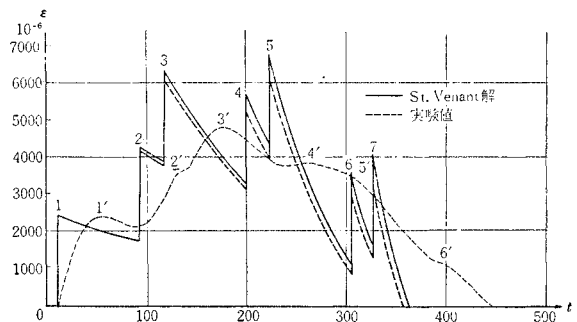
両者の比較から以下のことがわかる。

① 実験曲線は理論曲線よりかなり滑らかであり、とくに衝撃の後期において凹凸は著しく平滑になっている。

St. Venant の解では衝撃体と被衝撃体の接触面は完全に滑らかな平面であり、衝撃力は接触面で一様に分布しているとしている。この場合衝撃面にはせん断力は働かない。しかしながら実際には接触面にはいくらか凹凸

図-4 衝撃端から 2.2 cm の点におけるひずみ変化

模型寸法 10×25×100 mm
質量比 $m=0.215$
衝撃速度 $v_0=4.95$ m/sec



があり、その凹凸を滑らかに圧縮変形させて全面に一樣に衝撃力が作用するまでに時間を要する。したがって完全な平面であれば衝撃力は鋸歯状のパルス形を示すことになるが、実際にはパルスの立上がりがある勾配を持つことになる。衝撃速度が 5 m/sec の場合 0.1 mm の凹凸をそのままの速度で押しつぶすとすれば約 20 μsec 立上りのピークが遅れることになる。このほか高分子材料の特性である内部摩擦がパルスのピークを鈍化、遅らせることになる。

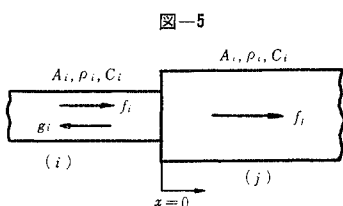
② 最大ひずみについては、実験値が理論値より約 30% 小さい。また各凹凸のピークは実験値の方が約 60 μsec 遅れているが、図中において ' つきの数字と ' のつかない数字がそれぞれ対応してピークが現われている。実験値のひずみが理論値より小さく現われているのは①で述べた原因のほか、固定端の問題がある。すなわち理論値は固定端を剛体としたときのものである。実際には固定端は鋼であり、入射波の一部は透過する。3. で述べる反射係数、透過係数を考慮すると図中一点鎖線となる。透過波の存在は衝撃の後期ほどピークが減少することの一因となる。

3. 縦衝撃を受ける多層棒の応力伝播

弾性波が材質あるいは断面の異なった媒質に到達すると弾性波の一部は反射し、残りは透過する。ここでは一次元弾性波の反射および透過を考え、多層棒内の応力伝播について考察する。

(1) 反射係数および透過係数

いま 図-5 のような軸方向に直角な不連続面を持つ棒を考える。不連続面を原点にとり弾性波の進行方向を x の正の方向とする。



i 層および j 層の断面積、密度、伝播速度は図中に i, j の添字を付けて示した。進行波を f 、後退波を g とすると i 層および j 層の変位は

$$\left. \begin{aligned} u_i &= f_i(c_i t - x) + g_i(c_i t + x), \\ u_j &= f_j(c_j t - x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

となる。

不連続面での両層の変位速度、力が等しいとすると、境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (\partial u_i / \partial t)_{x=0} &= (\partial u_j / \partial t)_{x=0}, \\ A_i E_i (\partial u_i / \partial x)_{x=0} &= A_j E_j (\partial u_j / \partial x)_{x=0}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

式 (7), (8) から f_i, g_i, f_j を解くと、反射係数を α_{ji} 、透過係数を β_{ij} としたとき、変位についてはつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} g_i(c_i t) &= \alpha_{ji}^{(u)} f_i(c_i t), \\ f_j(c_j t) &= \beta_{ij}^{(u)} f_i(c_i t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ji}^{(u)} &= \frac{A_i \rho_i c_i - A_j \rho_j c_j}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}, \\ \beta_{ij}^{(u)} &= \frac{2 A_i \rho_i c_i}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

同様に、ひずみ、応力、変位速度についての反射係数、透過係数をそれぞれ添字 ϵ, σ, v を付けて示すと、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ji}^{(\epsilon)} &= \frac{A_i \rho_i c_i - A_j \rho_j c_j}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}, \\ \beta_{ij}^{(\epsilon)} &= \frac{2 A_i \rho_i c_i}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j} \cdot \frac{c_i}{c_j}, \\ \alpha_{ji}^{(\sigma)} &= \frac{A_i \rho_i c_i - A_j \rho_j c_j}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}, \\ \beta_{ij}^{(\sigma)} &= \frac{2 A_j \rho_j c_j}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}, \\ \alpha_{ji}^{(v)} &= \frac{A_i \rho_i c_i - A_j \rho_j c_j}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}, \\ \beta_{ij}^{(v)} &= \frac{2 A_i \rho_i c_i}{A_i \rho_i c_i + A_j \rho_j c_j}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

式 (10), (11) から、 α_{ji}, β_{ij} は両層の断面積が等しい場合には、 ρc の関数である。したがって密度と縦波の伝播速度の積が各層の応力波の伝播特性を示すものと考え、これを characteristic impedance と呼んでいる。今後反射透過を考える場合に、 ρc の大きなものを硬い媒質、小さいものを軟い媒質と呼ぶことにする。

なお、不連続面の断面積が異なる場合は、厳密には式 (8) は成り立たない。不連続面で一方の層が無窮大であるとしても、実際には衝撃時間内で反射、透過にあずかる断面積は有限である。しかも断面が急変している場合には局部的に一次元波の問題として取り扱うことはできない。後に示す実験結果からは両層の断面積比が 2~3 の場合にも式 (8) が近似的に成り立っていることがわかるが、厳密には 2次元、3次元問題として解明しなければならない。

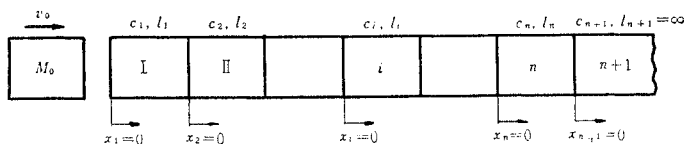
(2) 縦衝撃を受ける多層棒の応力解析

一端を固定した弾性棒の縦衝撃については 2.(2) で述べた。ここでは 2.(1) で述べた反射係数、透過係数を考慮して、多層棒について同様の解析を行なう。

いま 図-6 のような不連続面を有する多層棒が縦衝撃を受ける場合を考える。ただし $(n+1)$ 層は長さ無限大とする。

i 層の変位 u_i は

図-6



式 (7), (8) から f_i, g_i, f_j を解くと、反射係数を α_{ji} 、透過係数を β_{ij} としたとき、変位についてはつぎようになる。

$$u_i = f_i(c_i t_i - x_i) + g_i(c_i t_i + x_i) \dots\dots\dots(12)$$

である。

各不連続面に x_i の原点をとって考えると、

$$x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j + x_i, \quad t = \sum_{j=1}^i l_j / c_j + t_i. \dots\dots\dots(13)$$

① 初期条件

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x_i \leq l_i, \quad (u_i)_{t_i=0} = 0, \\ 0 < x_i \leq l_i, \quad (\partial u_i / \partial x)_{t_i=0} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

また $t_i < x_i / c_i$ のとき $f_i(c_i t_i - x_i) = 0$ であるから $c_i t_i - x_i = z$ とおくと

$$z < 0, \quad f_i(z) = 0.$$

② 境界条件

㊸ 不連続面

$x_{i+1} = 0$ での反射波、透過波について考えると、

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1}(c_{i+1} \cdot t_{i+1}) &= \beta_{i,i+1} f_i(c_i t_i - l_i) + \alpha_{i,i+1} g_{i+1} \\ &\cdot (c_{i+1} \cdot t_{i+1}), \\ g_i(c_i t_i + l_i) &= \alpha_{i+1,i} f_i(c_i t_i - l_i) + \beta_{i+1,i} g_{i+1} \\ &\cdot (c_{i+1} \cdot t_{i+1}). \end{aligned} \right\}$$

$t_i = t_{i+1} + l_i / c_1$ であるから $c_i t_i = z_i$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1}(k_{i+1,i} z_i - k_{i+1,i} l_i) &= \beta_{i,i+1} f_i(z_i - l_i) \\ &+ \alpha_{i,i+1} g_{i+1}(k_{i+1,i} z_i - k_{i+1,i} l_i), \\ g_i(z_i + l_i) &= \alpha_{i+1,i} f_i(z_i - l_i) + \beta_{i+1,i} g_{i+1} \\ &\cdot (k_{i+1,i} l_i). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $k_{ij} = c_i / c_j$ とする。

㊹ 衝撃面

衝撃体と被衝撃体とは滑らかな平面で接触し、衝撃面で衝撃体と被衝撃体の変化が等しいとすると、

$$-\int_0^t A_1 E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} dt = M_0 \left\{ v_0 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)_{x_1=0} \right\}. \dots\dots\dots(16)$$

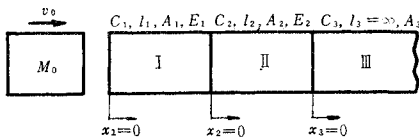
式(16)に式(12)を代入すると、

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{v_0}{c_1} \cdot \frac{l_1}{m} (1 - e^{-\frac{m}{l_1} z}) - e^{-\frac{m}{l_1} z} \int_0^z e^{\frac{m}{l_1} z} \\ &\times \left[g_1'(z) - \frac{m}{l_1} g_1(z) \right] dz. \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

式(17)は未知関数 $g_1(z)$ を含んでいるが、式(15)から $g_1(z)$ は $f_1(z)$ で表わすことができる。

ここで一例として図-7に示すような3層棒について考える。

図-7



各層における変位は $i=1, 2, 3$ として

$$u_i = f_i(c_i t_i - x_i) + g_i(c_i t_i + x_i) \dots\dots\dots(18)$$

不連続面 $x_2=0$ について考える。

$$\left. \begin{aligned} f_2(z) &= \beta_{12} f_1(k_{12} z) + \alpha_{12} g_2(z), \\ g_1(z) &= \alpha_{21} f_1(z - 2l_1) + \beta_{21} g_2\{k_{21}(z - 2l_1)\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

不連続面 $x_3=0$ について考える。 $g_3=0$ であるから、

$$f_3(z) = \beta_{23} f_2(k_{23} z), \quad g_2(z) = \alpha_{32} f_2(z - 2l_2). \dots\dots\dots(20)$$

式(19)の第1式と式(20)の第2式とから、

$$f_2(z) = \beta_{12} f_1(k_{12} z) + \alpha_{32} \alpha_{12} f_1(z - 2l_2). \dots\dots(21)$$

式(21)をくり返し用いると、

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \beta_{12} \sum_{j=0}^n (\alpha_{32} \alpha_{12})^j f_1\{k_{12}(z - 2j l_2)\} \\ &+ (\alpha_{32} \alpha_{12})^{n+1} f_1\{z - (2n+1)l_2\}. \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

初期条件は $f_2(z) = 0, z < 0$ であるから、式(22)は z の区分によって以下ようになる。

(i) $2nl_2 \leq z < 2(n+1)l_2$;

$$f_2(z) = \beta_{12} \sum_{j=0}^n (\alpha_{32} \alpha_{12})^j f_1\{k_{12}(z - 2j l_2)\}.$$

(ii) $2(n+1)l_2 \leq z < 2(n+2)l_2$;

$$g_2(z) = \alpha_{32} \beta_{12} \sum_{j=0}^n (\alpha_{32} \alpha_{12})^j f_1\{k_{12}[z - 2(j+2)l_2]\}.$$

(iii) $2l_2 + (2n+1)k_{12}l_2 \leq z < 2l_1 + 2(n+2)k_{12}l_2$;

$$\begin{aligned} g_1(z) &= f_1(z - 2l_1) + \beta_{21} \alpha_{32} \beta_{12} \sum_{j=0}^n (\alpha_{32} \alpha_{12})^j f_1 \\ &\times \{z - 2l_1 - 2(j+1)k_{12}l_2\}. \end{aligned}$$

(iv) $2nl_2 \leq z < 2(n+1)l_2$;

$$f_3(z) = \beta_{23} \beta_{12} \sum_{j=0}^n (\alpha_{32} \alpha_{12})^j f_1\{k_{13}(z - 2l_2)\}.$$

以上のように g_1, g_2, f_2, f_3 はそれぞれ f_1 のみの関数として表わされたから式(15)に g_1 を代入すると、

(i) $0 \leq z < 2l_1$;

$$f_1(z) = v_0 l_1 / c_1 m \cdot (1 - e^{-\frac{m}{l_1} z}).$$

(ii) $2l_1 \leq z < 2l_1 + 2k_{12}l_2 < 4l_1$;

$$f_1(z) = v_0 l_1 / c_1 m \{ {}_0f_1(z) - \alpha_{21} I_1(z - 2l_1) \}.$$

ここに、 ${}_0f_1(z) = 1 - e^{-\frac{m}{l_1} z}$,

$$I_1 = \left[-1 + \left\{ 1 + 2 \frac{m}{l_1} z \right\} e^{-\frac{m}{l_1} z} \right].$$

(iii) $4l_1 \leq z < 2l_1 + 2k_{12}l_2 < 6l_1$;

$$f_1(z) = v_0 l_1 / c_1 m [{}_1f_1(z) + \alpha_{21}^2 I_2(z - 4l_1)].$$

ここに、 ${}_1f_1 = {}_0f_1 - \alpha_{21} I_1(z - 2l_1)$,

$$I_2(z) = \left[1 - \left\{ 1 + 2 \left(\frac{m}{l_1} z \right)^2 e^{-\frac{m}{l_1} z} \right\} \right].$$

一般に $j l_2 < k_{12} l_2 < (j+1) l_2, (j=0, 1, 2, \dots)$ の場合も同様にして求めることができる。3層以上についても同様である。

(3) 多層棒の図式解法

これまで述べてきた解析法はいずれも衝撃体を剛体とするか、あるいは被衝撃体の固有周期にくらべて衝撃体の固有周期が非常に短いと考えたときのものである。この場合は衝撃体中の応力波の存在を無視しており、衝撃

図-8 応力伝播のダイアグラム

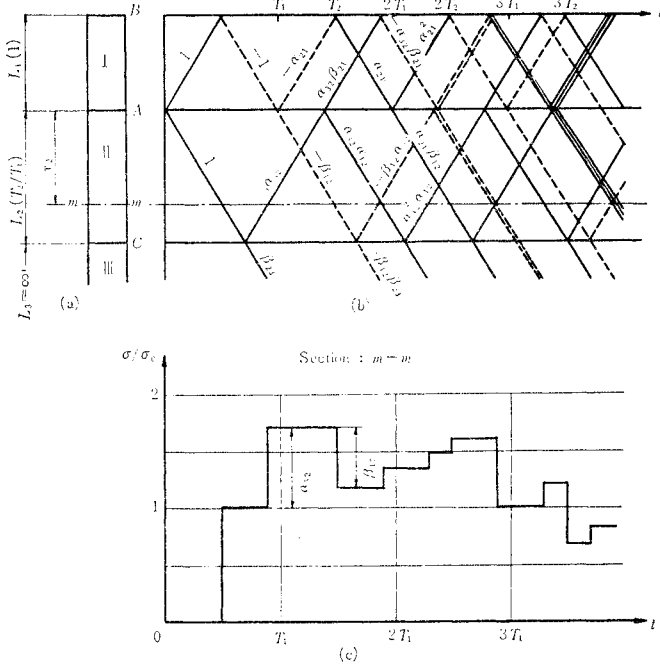
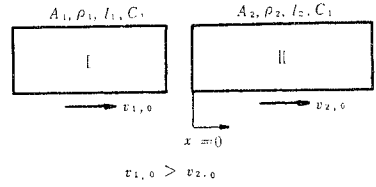


図-9



る長さ l_1 と l_2 の棒が衝突するものとする。このとき衝撃の瞬間を $t=0$ とし、両棒の初期条件を

$$\left. \begin{aligned}
 (\partial u_i / \partial t)_{t=0} &= v_{i,0}; \quad i=1, \quad -l_1 \leq x < 0, \\
 & \quad \quad \quad i=2, \quad 0 < x \leq l_2, \\
 (\partial u_i / \partial x)_{t=0} &= 0; \quad i=1, \quad -l_1 \leq x < 0, \\
 & \quad \quad \quad i=2, \quad 0 < x \leq l_2.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

とする。
 また境界条件は式(8)と同様に
 $A_1 E_1 (\partial u / \partial x)_{x=0} = A_2 E_2 (\partial u_2 / \partial x)_{x=0}$ (24)
 とすると、棒 I, II の衝撃応力 $\sigma_0^{(1)}, \sigma_0^{(2)}$ は、

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_0^{(1)} &= \frac{A_2 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{A_1 \rho_1 c_1 + A_2 \rho_2 c_2} (v_{1,0} - v_{2,0}), \\
 \sigma_0^{(2)} &= \frac{A_1 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{A_1 \rho_1 c_1 + A_2 \rho_2 c_2} (v_{1,0} - v_{2,0}).
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

となる。

図-10 変位速度および変位のダイアグラム

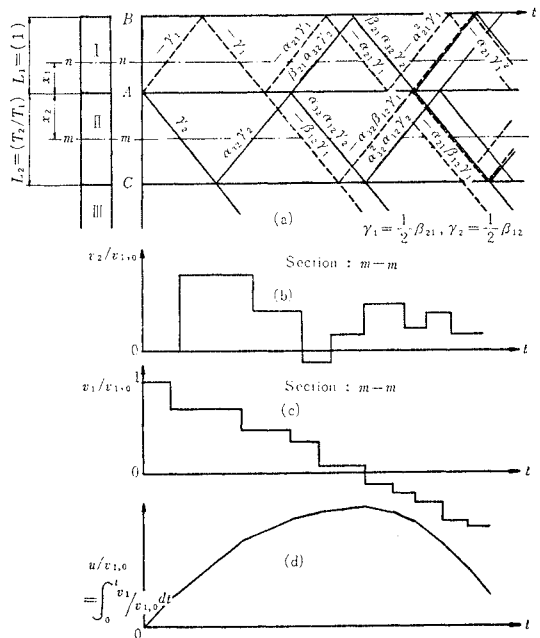


図-10 (a) は変位速度のダイアグラムであり、(b) は $m-m$ 断面の変位速度の時間変化を、(c), (d) は $n-n$ 断面の変位速度およびこれを積分して求めた変位の時間変化を示したものである。

棒中の応力伝播をも考慮しなければならないような場合、すなわち衝撃体と被衝撃体の固有周期があまり違わないような場合には、これまでの解析法を適用することはできない。またこの場合に対して St. Venant の解析法を適用しようとする、衝撃体と被衝撃体の両者について解析しなければならなくなり、非常に複雑になる。

以上の理由で衝撃体内の応力伝播を考慮しなければならないような場合について、比較的簡単に解析できる図式解法について述べる。

いま図-8 (a) に示すような 2 層棒 II, III を衝撃体 I が衝撃した場合の図式解法について考える。

この場合衝撃後、衝撃面 A から衝撃体と被衝撃体それぞれに等しい力すなわち衝撃力が伝播する。図-8 (b) は応力波がそれぞれの不連続面 B, C で反射、透過をくり返しながら伝播していく様子を示したダイアグラムである。この図では層 II に対して層 I, III を固定端側 (ρc が大きい) として表わしており、実線は圧縮波を、破線は引張波を表わす。またこの図では作図に便利なように、図上で各層における伝播速度 (ダイアグラムの勾配) が一定となるように各層の長さを換算してある。このダイアグラムをもとに $m-m$ 断面における応力の時間変化を示したものが図-8 (c) である。ここでは衝撃応力を σ_0 として任意時間における応力を σ として無次元表示してある。各時間の応力は $m-m$ 断面を通過する応力波を順次加算したものである。ただし衝撃パルスの波形は完全な長方形波であるとしている。このときの衝撃応力を求める。

図-9 に示すように、速度 $v_{1,0}$ と $v_{2,0}$ で運動してい

衝撃による棒 i の変位速度は式 (23), (24) より

$$v_i = v_{i,0} + \frac{1}{2} \beta_{ji} (v_{j,0} - v_{i,0}) \dots \dots \dots (26)$$

ここに, $i, j=1, 2$, または $2, 1$ である。

(4) 図式解法における衝撃時間

図式解法においては衝撃時間の設定が重要な問題となる。なぜなら, 図式解法におけるダイアグラムの作図において, 衝撃面が接触しているかどうかにより, 応力波の反射, 透過の関係が全く異なったものになるからである。したがって以下では衝撃時間, すなわち接触時間について考察する。

剛体による衝撃の場合には, 近似計算によるか, あるいは応力またはひずみが負になる時間をもって衝撃時間を求めた。しかしこれだけでは衝撃面が接触しているかどうかは厳密にはわからない。後で示すように実験結果の方が計算結果より衝撃時間が長くなっている。これは模型材料の特性による影響もあるが, 被衝撃体の慣性があるため, 応力またはひずみが負になるときに実際に両者が離れるとは限らない。

図-11

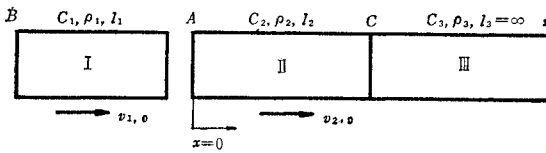
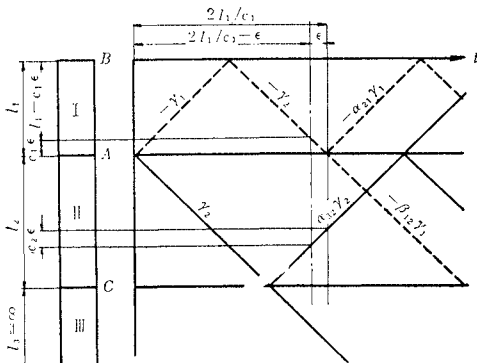


図-11 のような衝撃が行なわれる場合を考える。ただし $2l_1/c_1 < 2l_2/c_2$ と考える。

衝撃の瞬間を $t=0$ とすると, $t=2l_1/c_1$ 時間後に棒 I の衝撃面の応力は 0 となる。普通にはこのとき両媒質は離れ, 衝撃側は自由端になるとしている。しかしこの判定によると棒 I が剛体に近い場合は衝撃時間はいくらでも短くなり, 実際の現象とは矛盾する。

図-12 変位速度のダイアグラム



そこで棒 I, II の変位速度について調べてみる。時間 $t=2l_1/c_1$ の少し前 $t=2l_1/c_1 - \epsilon$ での棒 I, II の変位速度は 図-12 より,

棒 I については

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \leq x < -c_1 \epsilon; \\ v_1/v_{1,0} = 1 - r_1 - r_1 = (\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2) / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \\ -c_1 \epsilon \leq x < 0; \\ v_1/v_{1,0} = 1 - r_1 = 2 \rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

棒 II については $2l_1/c_1 > l_2/c_2 > l_1/c_1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x < 2c_2(l_2/c_2 - l_1/c_1) - c_2 \epsilon; \\ v_2/v_{1,0} = r_2 = 2 \rho_1 c_1 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \\ 2c_2(l_2/c_2 - l_1/c_1) - c_2 \epsilon \leq x \leq l_2; \\ v_2/v_{1,0} = r_2 + \alpha_{32} r_2 = 4 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \\ \times (\rho_2 c_2 + \rho_3 c_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$l_2/c_2 > 2l_1/c_1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x < 2c_2(l_2/c_2 - l_1/c_1) - c_2 \epsilon; \\ v_2/v_{1,0} = r_2 = 2 \rho_1 c_1 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \\ 2c_2(l_2/c_2 - l_1/c_1) - c_2 \epsilon \leq x \leq l_1; v_2/v_{1,0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

である。

式 (27)~(29) から棒 II の変位速度はいずれの場合も正または 0 であるが, 棒 I の変位速度は $\rho_1 c_1$ と $\rho_2 c_2$ の大小により負になることがある。

i) $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$ のとき

棒 II は正の変位速度を持つ。棒 I は $0 \geq x \geq -c_1 \epsilon$ 以外は $v_1 < 0$ 。したがって $t=2l_1/c_1$ で衝撃面は離れる。すなわち質量比が 1 以下のときは衝撃体の固有周期が衝撃時間となる。

ii) $\rho_1 c_1 \geq \rho_2 c_2$ のとき

棒 I, II の衝撃面の応力は 0 であるが, $v_1 > 0$ である。この場合 $0 \geq x \geq -c_1 \epsilon$ 以外について $t=2l_1/c_1 - \epsilon$ における両棒の変位速度を比較してみる。

$(v_1 - v_2)/v_{1,0} = -\rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) < 0$ であり, $t=2l_1/c_1$ で棒 I の衝撃面も $\alpha_{21} v_{1,0}$ の変位速度を持つから, 衝撃面は x の正の方向に運動しながら離れる。そのとき衝撃面は自由端となり, $t=2l_1/c_1 + \epsilon$ での棒 I の変位速度は $v_1/v_{1,0} = \alpha_{21}$ 。

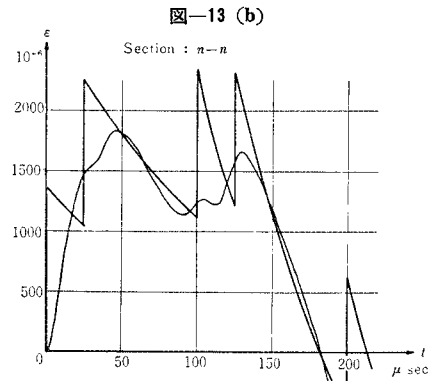
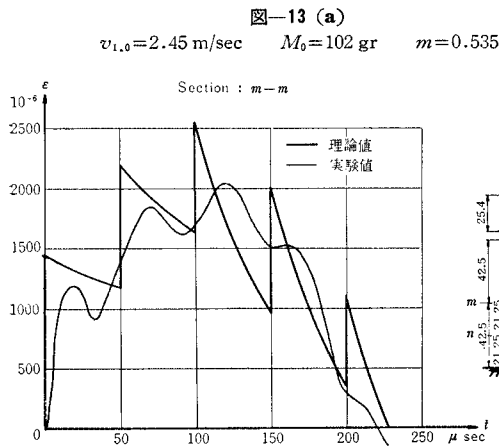
棒 II においては反射波はまだ到達していないから変位速度の変化はなく, $t=2l_1/c_1 + 2\epsilon$ では新しい衝撃速度 $v_{1,0}' = \alpha_{21} v_{1,0}$ で棒 I が棒 II を衝撃することになる。新たな衝撃による衝撃応力は,

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 = \rho_1 c_1 \rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \cdot v_{1,0} = \alpha_{21} \sigma_0 \dots (30) \\ \therefore \sigma_1 = \sigma_0 - \sigma_0 + \alpha_{21} \sigma_0, \\ \sigma_2 = \sigma_0 - \beta_{12} \sigma_0. \end{aligned}$$

したがって引張応力が衝撃面を通過するとしたものと同一ことになる。

以上のことから, 図式解法で衝撃時間を考える場合, 応力あるいはひずみについてだけでなく, 衝撃面の変位速度についても考慮しなければならないことがわかる。

4. 実験結果および考察



実験装置および測定方法は論文集 152 号登載予定論文 Epoxy 樹脂の静的および動的性質の項で述べたものと同じである。

(1) 剛体による衝撃結果

ここでは剛体による衝撃を考えた場合の 2 層棒, 3 層棒についての実験結果および計算結果を示す。ただし固定端を一層と考える。それぞれの実験条件は図中に示す。

図-13 (a), (b) は衝撃体と第 1 層の径が等しい場合で, しかも落錘の衝撃面を平面に成型し, 衝撃時にできるだけ平面接触となるように衝撃を行なった場合の結果である。これを見ると $m-m$ 断面では凹凸の関係がかなり忠実に記録されている。しかし $n-n$ 断面については計算結果の第 1 と第 2 のピーク, および第 3 と第 4 のピークが約 20 kc であり, それが非常に鈍化されて記録されている。これは主として動ひずみ増幅器の周波数特性に原因すると思われる。

図-14 以下は 3 層棒について示したものである。図-14 において, $m-m$ 断面では図-13 の場合と同様に理論値との関係が明確であるが, $n-n$ 断面については個々の凹凸は測定されていない。しかし全体としてのひずみの値はほぼ正確である。

図-15 は 図-14 の場合にくらべて固定端の条件が異なる。 $m-m$ 断面および $n-n$ 断面ともに応力波の到達後 150 $\mu \text{ sec}$ 付近から, 実験値のひずみが理論値よりかなり大きくなっている。この原因は固定端として

いるアラルダイト B の下にさらに鋼板を置いており, 理論値ではアラルダイト B 層が無限に続くとして求めたものである。したがって実際には鋼板からの圧縮波の反射があり, 測定される圧縮ひずみが大きくなっているためである。

図-16 は金属としてきわめて粘性の大きい鉛を第 2 層に用いたものである。 $m-m$ 断面で衝撃の後半すなわ

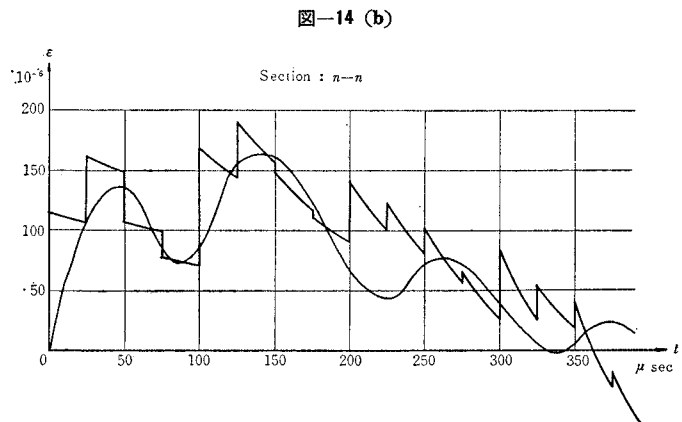
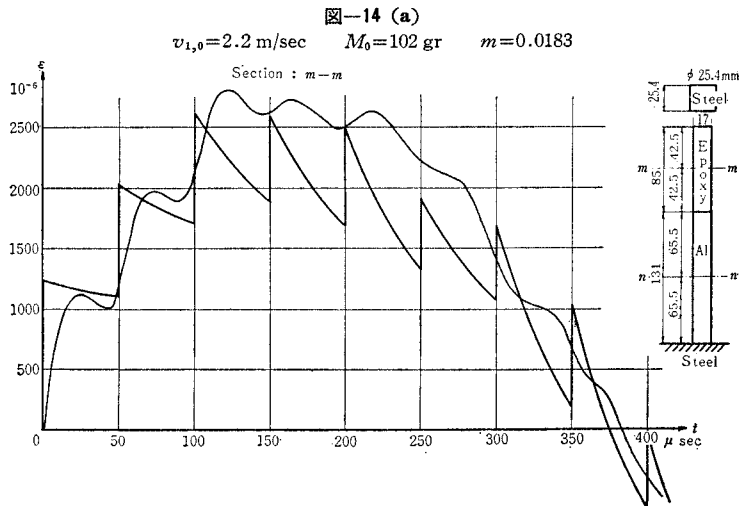


図-15 (a) $v_{1,0}=2.2 \text{ m/sec}$ $M_0=102 \text{ gr}$ $m=0.0183$

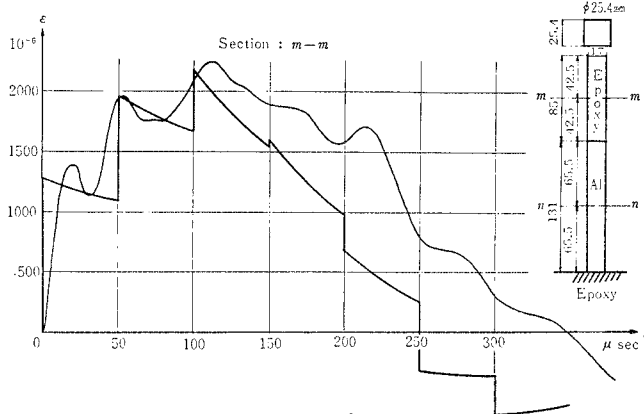


図-15 (b)

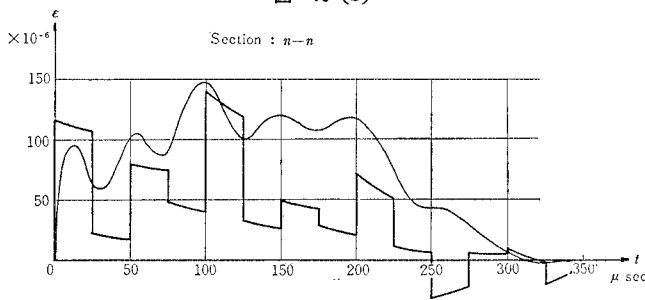


図-16 (a) $v_{1,0}=1.7 \text{ m/sec}$ $M_0=104.7 \text{ gr}$ $m=0.0150$

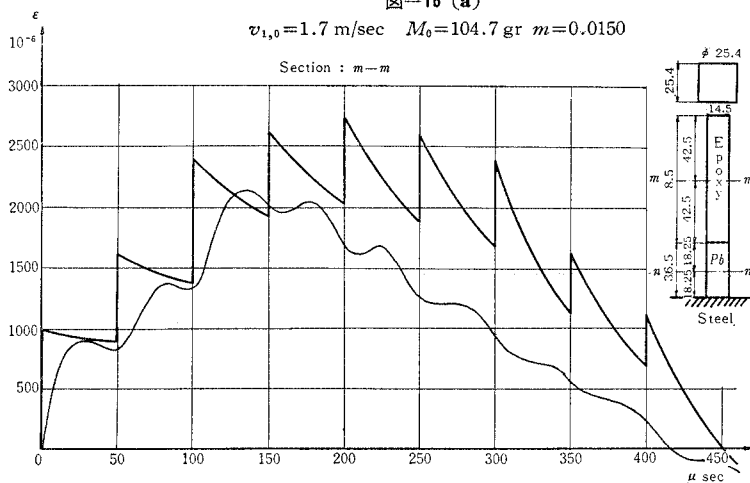
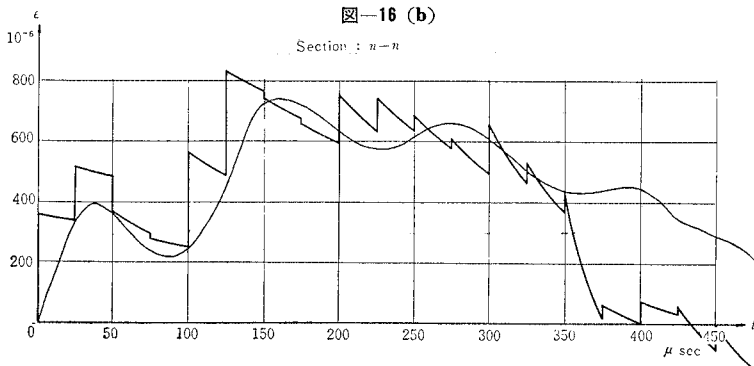


図-16 (b)



ち約 150 μ sec 以後において、凹凸の周期はきわめて良く一致しているにもかかわらず実験値がかなり低い値を示している。一方 n-n 断面では対応するひずみのピークは 100 μ sec 程度実験値の方が遅れ、衝撃時間もはるかに長くなっている。実際 n-n 断面でのひずみは数多くの測定について必ず残留ひずみを示した。したがって m-m 断面で後半にひずみが低く出るのは鉛のクリープあるいは塑性変形によるエネルギー吸収により、アラルダイト B と鉛の境界からの透過波のエネルギーが減少したためである。反射係数、透過係数の間違いによるものではない。なお、鉛の動特性については研究の途上である。

(2) 弾性体と考えた場合の実験値および理論値

ここでは衝撃体、被衝撃体とも Epoxy 樹脂(アラルダイト B)で固定端が鋼である場合について、両者の径および長さを変化させた場合の計算値および実験値を示した。

図-17~19 について、(a) では図中に示した衝撃条件によるダイアグラムを、(b) では衝撃体の変位速度を、(c) 以下にはひずみを示した。ダイアグラム中の数字は σ/σ₀ と v₁/v₁,₀ で、後者はカッコ内に示した。

いずれの場合も質量比は 1 以下であり、3.(3) で述べたように、衝撃体の固有周期が衝撃時間と一致していないことがわかる。一方衝撃体の変位速度を考慮して図式解法を行えば、計算結果は実験結果とかなり一致する。また式 (24) が近似的に成立するとしたが、この程度の断面積比に対しては無理がないことがわかる。

(1), (2) で種々の衝撃条件に対する実験結果および理論値との比較検討を行なった。全体的にみて両者の間には無理な関係はない。特に応力波の反射、透過の初期の過程にお

図-17

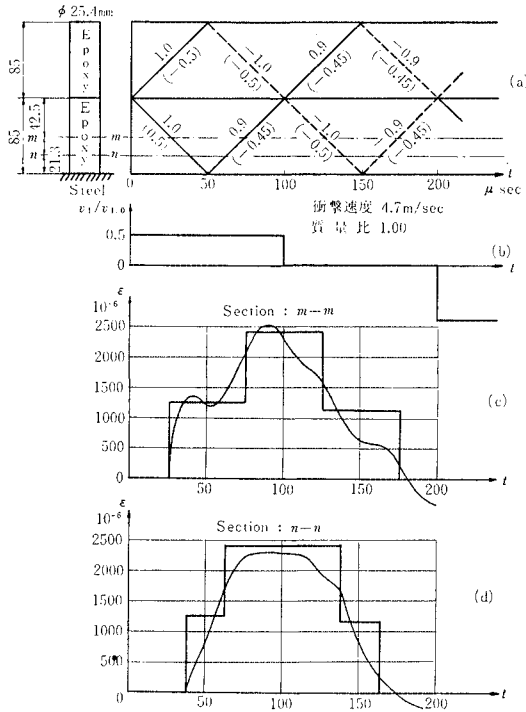


図-18

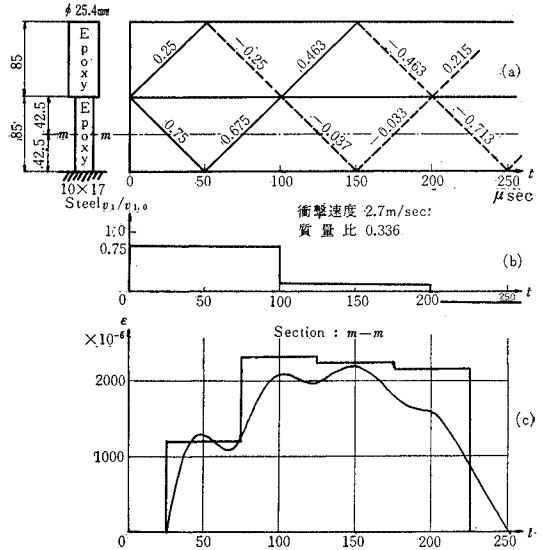
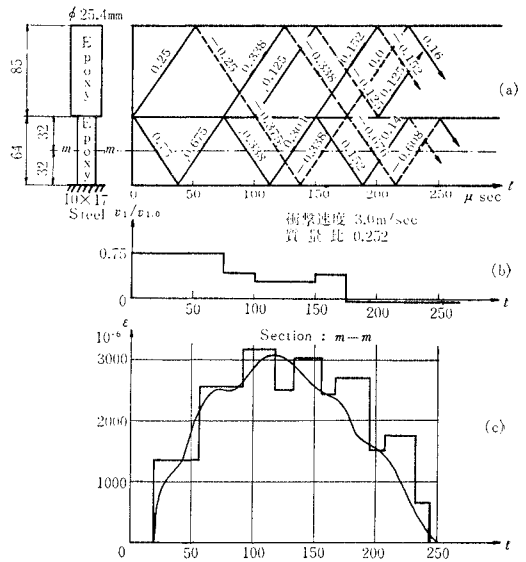


図-19



いては両者はかなり良い一致を見せており、反射係数、透過係数に誤りのないことがわかる。また衝撃の後期において両者の間に差のある場合があるが、これらについては個々の衝撃条件、固定端の条件等を厳密に考えれば十分正確に求める。

ここで十分注意しておかなければならないことは、実験値と理論値の一致性を論議する以前に、測定されたひずみ実際の現象をどの程度忠実に表現しているかということである。これは特にピークのひずみの大きさ、周期などについて論議する場合にはきわめて重要な問題である。この実験において筆者らの用いた動ひずみ増幅器は Shinkoh DS 6/AX 型広帯域増幅器である。これは $60 \sim 20 \text{ kc/s}$ においてフラットな特性を示すものである。しかし抵抗線ひずみ計をも含めた測定系での周波数特性は不明である。またシンクロスコープの内部同期による立上り時間のずれもある。さらに、完全な平面接触で衝撃が行なわれるとした理論の仮定が、実験においてどの程度満足されているか等々の問題があり、厳密な意味での定量的な比較は非常な困難を伴う。

5. 結 言

本論文は緒言で述べたように、応力伝播を巨視的に考え、材料特性または断面形状による特有の挙動を無視して縦衝撃を受ける多層棒中の応力伝播について考察したものである。その結果、ここで行なった程度の衝撃条件および材料については、測定装置の不忠実性および実験

条件が仮定と違うことなどを考慮すれば、定性的にも定量的にも理論解でかなり良く現象を説明できることがわかった。

本論文で取り上げた模型は種々の多層問題を抽象したものである。これらの結果を手がかりとして実際の土木構造物、たとえば構造物基礎系への地震波等の波動が入射した場合の系全体としての応答を究明する予定である。

最後に本論文の作製に協力して頂いた岡崎倣次君に心から感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) たとえば, W. Goldsmith, "Impact" Edward Arnold, London, 1960, pp. 30~34.

- 2) G. Fox, R. Folk, C.A. Shook, C.W.Curtis : "Elastic Strain Produced by Sudden Application of Pressure to One End of a Cylindrical Bar", Jour. of the Acoustical Soc. of America, Vol. 30, No. 6, 1958, pp. 552~563.
 - 3) R.W. Morse : "Dispersion of Compressional Waves in Isotropic Rods. of Rectangular Cross Section", Jour. of the Acoustical Soc. of America, Vol. 20, No. 6, 1948, pp. 833~838.
 - 4) R.W. Morse : "The Velocity of Compressional Waves in Rods of Rectangular Cross Section," the Jour. of the Acoustical of Soc. of America, Vol. 22, No. 2, 1958, pp. 217~223.
 - 5) R.D. Mindlin, E.A. Fox : "Vibration and Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section," Jour. of Appl. Mech. March, 1960, pp. 152~158.
 - 6) O.E. Jones, A.T. Ellis : "Longitudinal Pulse Propagation in Wide Rectangular Bars," Part 1. Theoretical Considerations, Part 2. Experimental Observations and Comparisons with Theory, Jour. of Appl. Mech. 1963. pp. 51~60.
 - 7) たとえば A.E.H. Love : "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," Cambridge Univ. Press. pp. 431~440.
 - 8) H.C. Fisher : "On Longitudinal Impact," Appl. sci, Res. 1958. pp. 105~
 - 9) たとえば W. Goldsmith, "Impact" pp. 46~55.
(1967. 6. 22・受付)
-