はりの固有値の逆数和に関する二，三の考察

STUDIES ON EIGENVALUES IN BEAM VIBRATION

中　川　建　治*
By Kenzi Nakagawa

1. まえがき

単純支持ばりや片持ばりのような単純な構造物においても，固有振動周期が断面の変化にともなってどのように変化するかを論ずるのは困難であるが，電子計算機の普及によって，所定の精度をもって固有値を簡単に数値計算によって求められるようになった。したがって，固有値を近似的に求める解法の意義は薄らいだように思われるが，構造物の設計にのぞんで計画，あるいは，概略設計の段階でおおよその見当をつけるという意味において，なお必要であろう。電子計算機による最終設計計算に至る予備段階で，卓上計算機，あるいは，計算尺によって速やかに予測するという略算法は，電子計算機の発達と共存すると思われる。

著者は，固有周期の自乗和，あるいは，固有値の逆数和に着目して，はりの断面の変化にともなってこの自乗和がどのように変化するかを検討した。なぜならば，静定ばりにおいては断面が変化していても固有周期の自乗和は簡単に求められること，および，はりの固有周期は，次数の増加にともなって次数の自乗に逆比例して減少するので，自乗和中に基本周期の占める比率は非常に大きいことなどによる。

n 次正方行列 $[a_{ij}]$ とその固有値 ν_i との間には，つぎのような関係がある[1),2)]。

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\sum_{i=1}^{n} \nu_i \quad \cdots\cdots(1.1)$$

さらに，$[a_{ij}]$ の逆行列を $[b_{ij}]$ とするならば，

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu_i} \quad \cdots\cdots(1.2)$$

という関係がある。

曲げ剛さをもつ構造物の部材を小区間に分割して n 自由度の振動系を設定して stiffness matrix $\boldsymbol{S}$ を作成し，各格点の換算集中質量（あるいは，回転慣性モーメント）m_i を対角要素とする対角行列を $\boldsymbol{M}$ とし，これらに対して，式 (1.1) の関係を適用すれば，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Phi}&=[\lambda_i]\\ \boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}&=\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i=\sum_{i=1}^{n} \frac{s_{ii}}{m_i} \quad \cdots\cdots(1.4)$$

となる[1),2)]。ここで，行列 $\boldsymbol{\Phi}$ は $\boldsymbol{S}$ に対する固有モードであり，重みの関数 $\boldsymbol{M}$ をもって直交しているものとする。λ_i は対応した固有値である。

無限自由度系を有限 n 自由度系に換算するので，n が大きいほど精度の高い固有値を得ると思われる。はりやラーメンのように曲げ剛さを主体とする構造物を，n 自由度系とみなして，stiffness matrix $\boldsymbol{S}$ を導き，その固有値を λ_i とする。つぎに，格点間をさらに N 等分して格点を設定し，nN 自由度系とみなして stiffness matrix ${}_N\boldsymbol{S}$ を導き，その固有値を ${}_N\lambda_i$ とする。さて，このような場合の固有値和 $\Sigma\lambda_i$, $\Sigma_N\lambda_i$ にはどのような関係があるであろうか。格点の集中質量を表わす m_i は N 細分によって m_i/N となり，${}_N\boldsymbol{M}$ は m_i/N を対角要素とする nN 元行列となる。曲げ変形を主体とする構造物に対する stiffness matrix の特性より，${}_N\boldsymbol{S}$ の要素 ${}_Ns_{ij}$ は $\boldsymbol{S}$ の要素 s_{ij} に対してほぼ N^3 倍になることは明らかである。さらに，式 (1.4) より固有値和 $\Sigma_N\lambda_i$ を求めるには，級数項の数は $\Sigma\lambda_i$ に対して N 倍となるので，結局，$\Sigma_N\lambda_i$ は N^5 の oder をもつことになる。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=N^5\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{nN}{}_N\lambda_i \quad \cdots\cdots(1.5)$$

ここで $n\to\infty$ は，自由度（分割数）を多くすることを意味している。この結果より，はりの断面形状が変化しても，最大固有値は分割数の4乗に比例して増大することがわかる。最小固有値は一定値に収れんすることから，基本振動周期を重視する場合には $\boldsymbol{S}$ の固有値計算をするのは良策ではない。n の増加とともに最小固有値の相対誤差が，大きくなることに注意しなければならない。

電子計算機の行列演算においては，逆行列の演算は次数の3乗に比例した演算時間を必要とするが，最小固有値まで収れんさせるような固有値計算の所要時間に比較するならば，なお，数分の1でしかない。$\boldsymbol{S}$ に対する flexibility matrix を $\boldsymbol{F}$ とするならば，式 (1.2) の関係はつぎのようになる。

* 正会員　工修　山口大学助教授　工学部土木工学科

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}&=\sum_{i=1}^{n}m_i f_{ii}\\&=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{n}T_i^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.6)$$

ここで，T_i は各モードの固有周期を表わす。f_{ij} はたわみの影響係数であるから，有限から無限へ至る過程を考慮すれば，連続体に対しては，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\int\rho(x)w(x)dx\cdots\cdots(1.7)$$

となるであろう。ここで，$\rho(x)$ は部材単位長さ当りの質量であり，$w(x)$ は載荷点載荷方向たわみである。回転振動も考慮するならば $\rho(x)$ として回転慣性を採用する。積分はすべての自由度方向について部材全体にわたって行なえばよい。

ここで，著者は，ΣT_i^2 をもって変断面ばりの等断面ばりへの動的等価法の一規準とすることを考えた。すなわち，変断面ばりを等断面ばりへ置換することについて，両者の基本振動周期が等しくなるようにする方法[3]に対して，ΣT_i^2 を等しくするように置換する方法を考えた。本文では，このような換算方法によるならば，どのような計算をすればよいかを示したが，いずれの方法がすぐれているかを論じたものではなく，単純ばりではどの程度の差が現われるかを示した。さらに，3スパン連続ばりにおいて ΣT_i^2 を最小にするにはどのようなスパンの比率にするべきかを，数値計算によって求めた。本文では簡単のために固有値の逆数和を Γ と表現する。

2. 単純支持ばり

スパン中央で対称で，曲げ剛さと単位長さ当りの質量分布が式(2.1)で表わされるような単純支持ばりを仮定する（図—1 参照）。

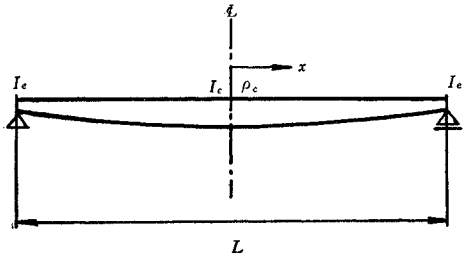
$$\left.\begin{aligned}EI(x)&=EI_c(1-\beta^N|x|^N)\\\rho(x)&=\rho_c(1-\gamma^M|x|^M)\\&\qquad\beta,\gamma>0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.1)$$

式(1.7)における載荷点載荷方向たわみ $w(x)$ は，鉛直たわみのみを考慮するならば，

$$w(x)=\frac{1}{16L^2}\left\{\int_{-L/2}^{x}\frac{(L-2x)^2(L+2z)^2}{EI(z)}dz+\int_{x}^{L/2}\frac{(L+2x)^2(L-2z)^2}{EI(z)}dz\right\}\cdots\cdots(2.2)$$

となる。ここで，はりの性質上 $(\beta L/2)^N<1$ でなければならないから，

図—1



$$\frac{1}{EI(x)}=\frac{1}{EI_c}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta|x|)^{Nk}\cdots\cdots(2.3)$$

という級数展開が可能である。式(2.3)を式(2.2)に代入して積分を行なえば，

$$\begin{aligned}w(x)=&\frac{(L^2+4x^2)}{4EI_c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{Nk}}{(Nk+1)(Nk+2)(Nk+3)}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^{Nk+1}-\frac{L}{2EI_c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{Nk}}{(Nk+1)(Nk+2)}x^{Nk+2}\\&+\frac{2}{EI_cL}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{Nk}}{(Nk+2)(Nk+3)}x^{Nk+4}\cdots\cdots(2.4)\end{aligned}$$

を得る。したがって，式(1.7)へ式(2.1)と式(2.4)を代入して，固有値の逆数和 Γ が求められる。

$$\begin{aligned}\Gamma=&2\int_0^{L/2}w(x)\rho(x)dx\\=&\frac{8\rho_c}{3EI_c}\left(\frac{L}{2}\right)^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{Nk}}{(Nk+1)(Nk+2)(Nk+3)}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^{Nk}\left\{1-\frac{3(M+2)}{2(M+1)(M+3)}\left(\frac{\gamma L}{2}\right)^M\right\}\\&-\frac{2\rho_c}{EI_c}\left(\frac{L}{2}\right)^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{Nk}}{(Nk+1)(Nk+2)(Nk+3)}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^{Nk}\left\{1-\frac{(Nk+3)}{(Nk+M+3)}\left(\frac{\gamma L}{2}\right)^M\right\}\\&+\frac{2\rho_c}{EI_c}\left(\frac{L}{2}\right)^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{Nk}}{(Nk+2)(Nk+3)(Nk+5)}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^{Nk}\left\{1-\frac{Nk+5}{Nk+M+5}\left(\frac{\gamma L}{2}\right)^M\right\}\cdots\cdots(2.5)\end{aligned}$$

$\beta=\gamma=0$ とすれば，等断面単純支持ばりの固有値の逆数和 Γ_0 を得る。

$$\Gamma_0=\frac{\rho_0L^4}{90EI_0}\cdots\cdots(2.6)$$

等価断面 ρ_0, EI_0 を求めるには，式(2.5)の結果を式(2.6)と等しいとして導けばよいが，式(2.5)の級数和の第1近似値は **表—1** に示す係数 α を用いてつぎのように求められる。**表—1** の α からわかるように，第1近似値としては質量分布係数 α_M と曲げ剛さ分布 α_N とは独立である。

$$\Gamma\fallingdotseq\frac{\rho_c(1-\gamma^M|\alpha_ML/2|^M)L^4}{90EI_c(1-\beta^N|\alpha_NL/2|^N)}=\frac{\rho_0L^4}{90EI_c}\cdots\cdots(2.7)$$

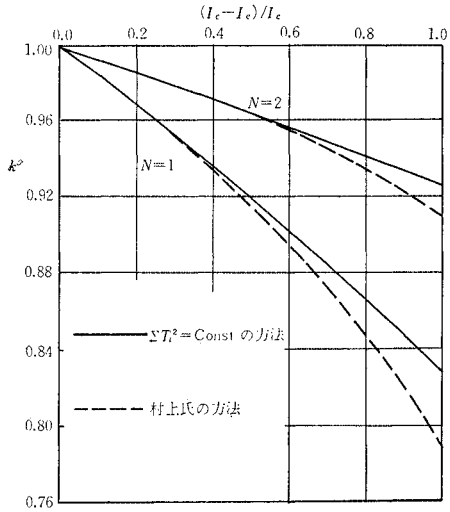
表—1　換算係数 α

M, N	質量分布 α_M	曲げ剛さ α_N
1	5/16	5/16
2	$1/\sqrt{7}$	$1/\sqrt{7}$
3	$\sqrt[3]{5}/4$	$\sqrt[3]{5}/4$
4	$1/\sqrt[4]{21}$	$1/\sqrt[4]{21}$
5	1/2	1/2

図—1 に示すような単純支持ばりで，曲げ剛さのみが1次変化と2次変化する場合について基本振動周期が等しくなるようにする等価法については，村上永一氏の研究[3]がある。ΣT_i^2 を一定として換算した等断面ばりの基本振動周期と，村上氏の方法による変断面ばりの基本振動周期とを比較したのが **図—2** である。ΣT_i^2 一定とする計算法においては，**表—1** に示す第1近似法によって計算しているが，$N=1$ においても最大4%の誤差である。これは高次の

図—2　T_1 の換算係数

$$T_1=k\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI_c g}{\rho_c}}$$



固有周期の影響力が実際には小さいということを示すものであろう。

3. 片持ばり；その 1（剛結されている場合）

図—3 に示すような変断面片持ばりについて固有値の逆数和を求めよう。水平振動のみを考慮すれば，載荷点載荷方向たわみ $w(x)$ は

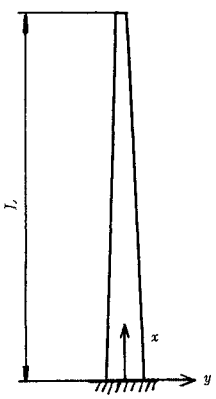
$$w(x)=\int_0^x\frac{(x-z)^2}{EI(z)}dz \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

となる。したがって等断面ばりでは

$$\Gamma=\frac{\rho L^4}{12EI}\cdots\cdots\cdots(3.2)$$

を得る。断面変化の場合につき，おもなものをつぎに列挙しよう。

図—3



（1）　質量と曲げ剛さが直線変化する場合

断面変化を

$$\left.\begin{aligned}EI(x)&=EI_0(1-\beta x)\\ \rho(x)&=\rho_0(1-\gamma x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.3)$$

と仮定する。断面の性質上，$0\leqq\beta L<1$ であるから

$$\frac{1}{EI(x)}=\frac{1}{EI_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta x)^k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4)$$

という級数展開を利用して Γ を求めると，つぎのようになる。

$$\Gamma=\frac{2\rho_0}{EI_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^k L^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)}\left\{\frac{1}{k+4}-\frac{\gamma L}{k+5}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.5)$$

$$=\frac{\rho_0 L^4}{12EI_0}\left(1+\frac{\beta L}{5}-\frac{4}{5}\gamma L+\frac{\beta^2L^2}{15}-\cdots\cdots\right)$$

$$\fallingdotseq\frac{\rho_0 L^4(1-4\gamma L/5)}{12EI_0(1-\beta L/5)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.6)$$

式 (3.6) は第 1 近似値であって，曲げ剛さについては下端より $L/5$ の断面を，質量分布については上端より $L/5$ の断面を採用して等断面ばりを設計すればよいことを示している。

（2）　中空断面の場合

煙突のように中空断面で直径が直線変化している場合は，曲げ剛さは直径の 3 乗に比例する。

$$EI(x)=EI_0(1-\beta x)^3$$
$$\rho(x)=\rho_0$$

を仮定して，式 (3.4) の関係を用いて Γ を求めると，

$$\Gamma=\frac{\rho_0}{EI_0\beta^4}\left[(1-\beta L)\{\log(1-\beta L)-1\}+\left(1-\frac{1}{2}\beta^2L^2-\frac{1}{6}\beta^3L^3\right)\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

$$=\frac{\rho_0L^4}{12EI_0}\left\{1+\frac{3}{5}\beta L+\frac{6}{15}(\beta L)^2-\cdots\cdots\right\}$$

$$\fallingdotseq\frac{\rho_0L^4}{12EI_0(1-\beta L/5)^3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.8)$$

となる。

質量分布も直径に比例して変化するものとすれば，

$$EI(x)=EI_0(1-\beta x)^3$$
$$\rho(x)=\rho_0(1-\beta x)$$

として積分すればよい。同様な計算によってつぎの結果を得る。

$$\Gamma=\frac{\rho_0}{EI_0\beta^4}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{(\beta L)^k}{k(k-1)}\left\{1-\frac{k}{k+1}\beta L\right\}\cdots\cdots(3.9)$$

$$=\frac{\rho_0L^4}{12EI_0}\left\{1-\frac{\beta L}{5}-\frac{1}{10}(\beta L)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$\fallingdotseq\frac{\rho_0L^4(1-4\beta L/5)}{12EI_0(1-\beta L/5)^3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.10)$$

これらの結果より，曲げ剛さについては下端より $3L/5$ の断面を，質量分布については上端より $L/5$ の断面を採用すると等断面ばりとして第 1 近似断面を得ることになる。

（3）　充腹断面

円形，あるいは，長方形の充腹断面では，曲げ剛さは直径の 4 乗に比例する。したがって，

$$EI(x)=EI_0(1-\beta x)^4$$

を仮定する。質量分布をそれぞれ，つぎのように仮定して得る結果を示す。

$\rho(x)=\rho_0$ の場合

$$\Gamma=\frac{\rho_0}{3EI_0\beta^4}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}(\beta L)^k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.11)$$

$$\fallingdotseq\frac{\rho_0L^4}{12EI_0(1-\beta L/5)^4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.12)$$

$\rho(x)=\rho_0(1-\beta x)$ の場合

$$\Gamma=\frac{\rho_0L^4}{12EI_0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.13)$$

$\rho(x)=\rho_0(1-\beta x)^2$ の場合

$$\Gamma=\frac{\rho_0 L^4(1-4\beta L/5)}{12\,EI_0} \quad \cdots\cdots(3.14)$$

（4） 断面が指数関数的に変化する場合

$$EI(x)=EI_0 e^{-\beta x}$$

$$\rho(x)=\rho_0 e^{-\gamma x}$$

と仮定すれば，

$$\Gamma=\frac{\rho_0 L^4}{12\,EI_0}e^{-\gamma L}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{4!}{(k+4)!}(\gamma L)^k \quad \cdots\cdots(3.15)$$

$$=\frac{\rho_0 L^4}{12\,EI_0}\left(1+\frac{1}{5}\gamma L+\frac{1}{5}\beta L+\cdots\cdots\right)e^{-\gamma L}$$

$$\fallingdotseq\frac{\rho_0 L^4\exp(-4\gamma L/5)}{12\,EI_0\exp(-\beta L/5)} \quad \cdots\cdots(3.16)$$

を得る。

（5） 計　算　例

著者は，中部電力四日市火力発電所の鋼製煙突の動的応答を検討して報告した[4),5)]。

この煙突の断面変化の状態は，指数関数によって近似され得ることを知ったので，式(3.16)によって Γ を予想することを試みる。式(3.16)は，質量分布については上端より $L/5$ の断面を，曲げ剛さ分布については下端より $L/5$ の断面を採用するならば，第1近似としての換算等断面ばりを得るということを示している。したがって，断面諸元のくわしい値は文献4)，5)にゆずり，上端より $L/5$ の質量分布 ρ，下端より $L/5$ の断面2次モーメント I，その他の必要諸元は，kg, cm, sec の単位で示すとつぎのようになる。

$$\rho=0.05444$$

$$I=8.51\times10^8$$

$$L=1.20\times10^4$$

$$E=2.10\times10^6$$

$$\therefore\ \Gamma=\frac{\rho L^4}{12\,EI}=0.05264$$

動的解析においては煙突を6自由度系とみなして解析したが，6個の固有値の逆数和 Γ' は固有値解析によって $\Gamma'=0.05354$ を得ている。両者の比較より $(\Gamma-\Gamma')/\Gamma=0.017$ という相対誤差を得た。第1近似としては十分な精度であると思う。

4. 片持ばり；その2（弾性体で支持される場合）

弾性支持された片持ばりにおいては，固有振動周期が固定支持された場合よりも大きくなるであろう。この相違に対しておおよその目安を得るには，ΣT_i^2 の変化を検討するのが1つの方法であろう。

図—4 に示すような弾性支持された片持ばりの Γ の変化を求めよう。まず，つぎのような仮定を設ける。

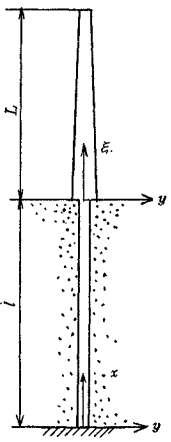
1°　弾性基礎部分を質量を持たない無限個のばねで置換して，ξ 軸方向単位長さ当りのばね定数を K とする。

2°　片持ばりは $\xi=0$ の点で固定支持されている。

3°　振動は，水平方向のみ考慮する。

4°　弾性支持されている部分のはりの断面寸法は，長さ l，曲げ剛さ EI_b，単位長さ当りの質量 ρ_b によって表わす。

図—4



さて，弾性基礎部分のたわみに関する微分方程式は，

$$EI_b\frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}+Ky(\xi)=P(\xi) \quad \cdots\cdots(4.1)$$

となる。仮定した境界条件のもとに式(4.1)を解いて整理すれば，つぎのような結果を得る。

載荷点載荷方向（水平方向）たわみ $y(\xi)$ は，

$$y(\xi)=\frac{\sqrt{2}}{8\,\alpha^3EI_b(\cosh^2\alpha l/\sqrt{2}+\cos^2\alpha l/\sqrt{2})}[\sinh\sqrt{2}\alpha l-\sin\sqrt{2}\alpha l+2(\sinh\sqrt{2}\alpha\xi-\sin\sqrt{2}\alpha\xi)$$
$$+\{\cos\sqrt{2}\alpha(\xi-l)\sinh\sqrt{2}\alpha\xi-\sin\sqrt{2}\alpha\xi\cdot\cosh\sqrt{2}\alpha(\xi-l)\}$$
$$+\{\sin\sqrt{2}\alpha(\xi-l)\cosh\sqrt{2}\alpha\xi-\cos\sqrt{2}\alpha\xi\cdot\sinh\sqrt{2}\alpha(\xi-l)\}] \quad \cdots\cdots(4.2)$$

$$\alpha=\sqrt[4]{K/EI_b} \quad \cdots\cdots(4.3)$$

となり，式(1.7)にしたがって積分すれば，

$$\Gamma_b=\rho_b\int_0^l y(\xi)\,d\xi=\frac{\rho_b}{4\,K}Z_1(\zeta) \quad \cdots\cdots(4.4)$$

$$Z_1(\zeta)=\frac{\zeta(\sinh2\zeta-\sin2\zeta)+(\cosh2\zeta+\cos2\zeta-2)}{\cosh^2\zeta+\cos^2\zeta} \quad \cdots\cdots(4.5)$$

$$\zeta=\alpha l/\sqrt{2}=\sqrt[4]{Kl/4\,EI_b} \quad \cdots\cdots(4.6)$$

を得る。$\xi=l$ において $P=1$ が水平に作用したときの $\xi=l$ 点における水平変位は，式(4.2)より

$$y(l)=\frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha^3EI_b}Z_2(\zeta) \quad \cdots\cdots(4.7)$$

$$Z_2(\zeta)=\frac{\sinh2\zeta-\sin2\zeta}{\cosh^2\zeta+\cos^2\zeta} \quad \cdots\cdots(4.8)$$

となり，同じく $\xi=l$ における勾配 θ_p は，

$$\theta_p=\frac{1}{\alpha^2EI_b}Z_3(\zeta) \quad \cdots\cdots(4.9)$$

$$Z_3(\zeta)=\frac{\sinh^2\zeta+\sin^2\zeta}{\cosh^2\zeta+\cos^2\zeta} \quad \cdots\cdots(4.10)$$

となる。これは，$\xi=l$ における外力モーメント $\mathfrak{M}=1$ による $\xi=l$ における水平変位でもある。$\xi=l$ における外力モーメント $\mathfrak{M}=1$ による $\xi=l$ の点の回転角 θ_m は

$$\theta_m=\frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha\,EI_b}Z_4(\zeta) \quad \cdots\cdots(4.11)$$

$$Z_4(\zeta)=\frac{\sinh2\zeta+\sin2\zeta}{\cosh^2\zeta+\cos^2\zeta} \quad \cdots\cdots(4.12)$$

となる。

前節の方法にならって式(4.4)～式(4.12)を式(1.7)

に代入して整理すれば，図—4 のような弾性支持された片持ばりの固有値の逆数和が得られる。

$$\Gamma=\Gamma_0+\frac{\rho_b}{4K}Z_1(\zeta)+\frac{W}{\sqrt{2}\,\alpha^3 EI_b g}Z_2(\zeta)$$
$$+\frac{2G}{\alpha^2 EI_b}Z_3(\zeta)+\frac{J}{\sqrt{2}\,\alpha\, EI_b}Z_4(\zeta)\cdots\cdots(4.13)$$

ここで，Γ_0 とは $x=0$ ($\xi=l$) において片持ばりが固定支持されたときの固有値の逆数和であり，W は $x\geqq 0$ における片持ばりの全重量，G は $x=0$ をモーメント軸とした $x\geqq 0$ 部分の片持ばりの質量の1次モーメント，J は同じく2次モーメントである。$Z_1(\zeta)\sim Z_4(\zeta)$ は式(4.4)～式 (4.12)にみるように計算尺では求めがたいので，式 (4.6) に示す ζ の値に対して計算して**表—2** として示す。**表—2** の変数間隔は粗いが，弾性支持の影響を近似的に予測するには役立ち得るであろう。なお，Γ_0 は $x\geqq 0$ においてはりの断面がいかに変化していても求め得たものと仮定している。弾性基礎部分の振動において，実際に振動する質量として ρ_b 以外にはり近傍の弾性体の体積の一部分も一体として考慮しなければならないならば，式 (4.13) の ρ_b を増加させるだけでよい。

5. 3 スパン連続ばり

構造物の設計では，使用目的と材料の諸条件（たとえば許容応力度）その他を満足するように断面諸元を決定する設計方法がとられるが，ここでは全く観点を変えて，3スパン連続ばりの固有振動周期 T_i にのみ着目して，ΣT_i^2 を最小にする方法について調べてみよう。図—5 に示すような3スパン連続ばりを想定して，側スパンと中央スパンの曲げ剛さ，単位長さあたりの質量，スパン長の比をそれぞれ k, r, l として，全長 L を一定にした状態で Γ が最も小さくなるスパン比 l を決定しよう。Γ を最小にすることは，許容応力という概念とは全く独立に，動的に最も堅く設計するということに相当するものとみなし得よう。

振動は鉛直方向の曲げたわみ振動しか考慮しないと仮定すれば，各スパンでは等断面であるから，載荷点載荷方向（鉛直方向）のたわみは簡単に求め得る。式 (1.7) にしたがって Γ を求めるとつぎのようになる。

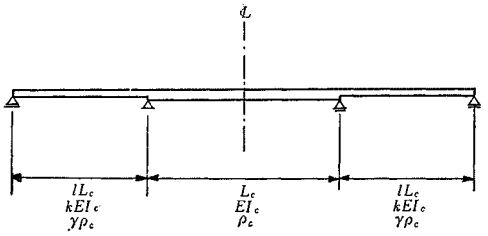
$$\Gamma=\frac{4r(21k^2+40kl+12l^2)l^4+k(9k^2+48kl+56k^2)}{1260k(3k+2l)(k+2l)(1+2l)^4}$$
$$\times\frac{\rho A_c L^4}{EI_c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$
$$L=L_c(1+2l)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

ここで，全長 L を一定とし，k と r の値を所定の値に仮定して Γ を最小にするような l を求めるのである。図—6 は $r=1$ として Γ と l との関係を示したものである。図からわかるように，Γ を最小にするような l が存在するので，そのスパン比を $l_{\min}$ として，$r-k-l_{\min}$ の関係を示したのが図—7, 8 である。これらの関係は式 (5.1) を理論的に検討したものではなく，電子計

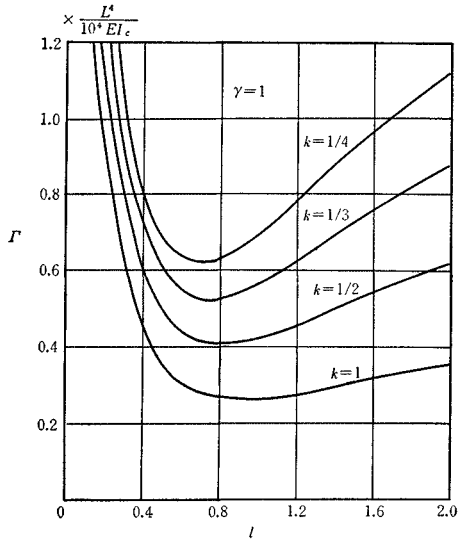
表—2

x	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
0.01	1.93365 10^{-8}	1.33365 10^{-6}	1.00000 10^{-4}	2.00000 10^{-2}
2	3.19335 $^{-7}$	1.06667 $^{-5}$	3.99999 $^{-4}$	3.99999 $^{-2}$
3	1.61849 $^{-6}$	3.59997 $^{-5}$	8.99999 $^{-4}$	5.99999 $^{-2}$
4	5.11932 $^{-6}$	8.53332 $^{-5}$	1.59999 $^{-3}$	7.99999 $^{-2}$
5	1.24993^{-5}	1.66666 $^{-4}$	2.49999 $^{-3}$	1.00000 $^{-1}$
6	2.59178 $^{-5}$	2.87998 $^{-4}$	3.59998 $^{-3}$	1.19999 $^{-1}$
7	4.80184 $^{-5}$	4.57330 $^{-4}$	4.89996 $^{-3}$	1.39999 $^{-1}$
8	8.19167 $^{-5}$	6.82657 $^{-4}$	6.39992 $^{-3}$	1.59998 $^{-1}$
9	1.31216 $^{-4}$	9.71979 $^{-4}$	8.09984 $^{-3}$	1.79997 $^{-1}$
0.10	1.99992 $^{-4}$	1.33329 $^{-3}$	9.99997 $^{-3}$	1.99996 $^{-1}$
11	2.92805 $^{-4}$	1.77458 $^{-3}$	1.20994 $^{-2}$	2.19993 $^{-1}$
12	4.14690 $^{-4}$	2.30384 $^{-3}$	1.43991 $^{-2}$	2.39990 $^{-1}$
13	5.71166 $^{-4}$	2.92907 $^{-3}$	1.68986 $^{-2}$	2.59985 $^{-1}$
14	7.68224 $^{-4}$	3.65822 $^{-3}$	1.95978 $^{-2}$	2.79978 $^{-1}$
15	1.01233 $^{-3}$	4.49928 $^{-3}$	2.24967 $^{-2}$	2.99969 $^{-1}$
16	1.31044 $^{-3}$	5.46020 $^{-3}$	2.55951 $^{-2}$	3.19958 $^{-1}$
17	1.66997 $^{-3}$	6.54894 $^{-3}$	2.88930 $^{-2}$	3.39943 $^{-1}$
18	2.09881 $^{-3}$	7.77343 $^{-3}$	3.23901 $^{-2}$	3.59924 $^{-1}$
19	2.60534 $^{-3}$	9.14158 $^{-3}$	3.60864 $^{-2}$	3.79900 $^{-1}$
0.20	3.19837 $^{-3}$	1.06613 $^{-2}$	3.99815 $^{-2}$	3.99872 $^{-1}$
21	3.88721 $^{-3}$	1.23404 $^{-2}$	4.40752 $^{-2}$	4.19836 $^{-1}$
22	4.68163 $^{-3}$	1.41868 $^{-2}$	4.83672 $^{-2}$	4.39794 $^{-1}$
23	5.59185 $^{-3}$	1.62084 $^{-2}$	5.28572 $^{-2}$	4.59742 $^{-1}$
24	6.62853 $^{-3}$	1.84128 $^{-2}$	5.75448 $^{-2}$	4.79681 $^{-1}$
25	7.80282 $^{-3}$	2.08077 $^{-2}$	6.24295 $^{-2}$	4.99609 $^{-1}$
26	9.12627 $^{-3}$	2.34010 $^{-2}$	6.75108 $^{-2}$	5.19525 $^{-1}$
27	1.06109 $^{-2}$	2.62002 $^{-2}$	7.27882 $^{-2}$	5.39427 $^{-1}$
28	1.22691 $^{-2}$	2.92129 $^{-2}$	7.82610 $^{-2}$	5.59312 $^{-1}$
29	1.41139 $^{-2}$	3.24465 $^{-2}$	8.39285 $^{-2}$	5.79181 $^{-1}$
0.30	1.61584 $^{-2}$	3.59085 $^{-2}$	8.97899 $^{-2}$	5.99030 $^{-1}$
32	2.09019 $^{-2}$	4.35471 $^{-2}$	1.02090 $^{-1}$	6.38662 $^{-1}$
34	2.66138 $^{-2}$	5.21861 $^{-2}$	1.15155 $^{-1}$	6.78197 $^{-1}$
36	3.34141 $^{-2}$	6.18813 $^{-2}$	1.28974 $^{-1}$	7.17594 $^{-1}$
38	4.14285 $^{-2}$	7.26864 $^{-2}$	1.43535 $^{-1}$	7.56851 $^{-1}$
0.40	5.07873 $^{-2}$	8.46524 $^{-2}$	1.58826 $^{-1}$	7.95937 $^{-1}$
42	6.16252 $^{-2}$	9.78275 $^{-2}$	1.74830 $^{-1}$	8.34824 $^{-1}$
44	7.40806 $^{-2}$	1.12256 $^{-1}$	1.91528 $^{-1}$	8.73481 $^{-1}$
46	8.82944 $^{-2}$	1.27981 $^{-1}$	2.08901 $^{-1}$	9.11878 $^{-1}$
48	1.04409 $^{-1}$	1.45037 $^{-1}$	2.26926 $^{-1}$	9.49978 $^{-1}$
0.50	1.22568 $^{-1}$	1.63457 $^{-1}$	2.45575 $^{-1}$	9.87745 $^{-1}$
55	1.77848 $^{-1}$	2.15636 $^{-1}$	2.94732 $^{-1}$	1.08044
60	2.48964 $^{-1}$	2.76741 $^{-1}$	3.47062 $^{-1}$	1.17013
65	3.37885 $^{-1}$	3.46744 $^{-1}$	4.01899 $^{-1}$	1.25610
70	4.46235 $^{-1}$	4.25309 $^{-1}$	4.58457 $^{-1}$	1.33757
75	5.75149 $^{-1}$	5.11755 $^{-1}$	5.15848 $^{-1}$	1.41382
80	7.25138 $^{-1}$	6.05063 $^{-1}$	5.73111 $^{-1}$	1.48414
85	8.95991 $^{-1}$	7.03895 $^{-1}$	6.29253 $^{-1}$	1.54796
90	1.08672	8.06646 $^{-1}$	6.83297 $^{-1}$	1.60483
95	1.29561	9.11527 $^{-1}$	7.34333 $^{-1}$	1.65453
1.00	1.52022	1.01666	7.81575 $^{-1}$	1.69701
∞	2(x+1)	2.00000	1.00000	2.00000

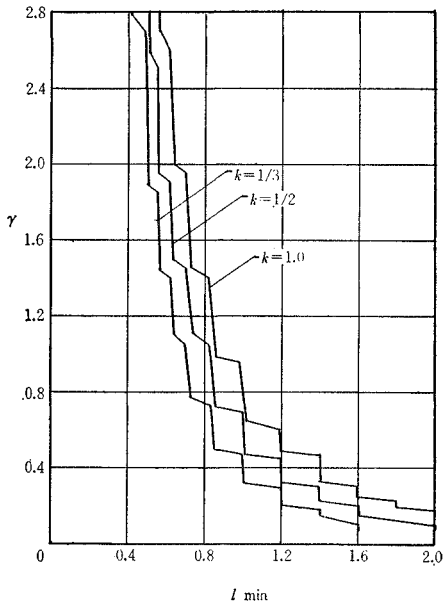
図—5



図—6



図—7



算機で数値計算を行なって求めたものである。Γ は l に関して連続曲線となるにもかかわらず，$l_{\min}$ の γ と k に対する関係は不連続曲線となることは興味ある事実である。数値計算によっているため，不連続点の正しい値は捕捉していないが，不連続点がなぜ現われるかについて固有値計算によって説明し得た。γ, k のいずれかを微小量変化させて3スパン連続ばり（図—5）の固有値解析を行なうと，固有値の大きさに並べた各モードの節の位置が，中央スパンと側スパンの間で交換されることがある。高次振動においては節の交換が頻繁に発生するが，ごく低次振動のモードにおいて節の交換が現われる γ, k の組み合せがある。この点で $l_{\min}$ が飛躍するのである。固有振動周期の小さい順に並べたモードにおいて，γ, k の変化によって節の交換が起こるということは，互いに交換されたモードにおいて（低次振動ほど現われやすいとして）現われやすさが反転したということである。$l_{\min}$ の連続点と思われる点では，γ, k が多少変化してもモードの現われやすさの交換が低次振動部分では変化しないということであろう。

6. 階差法の精度に関する一考察

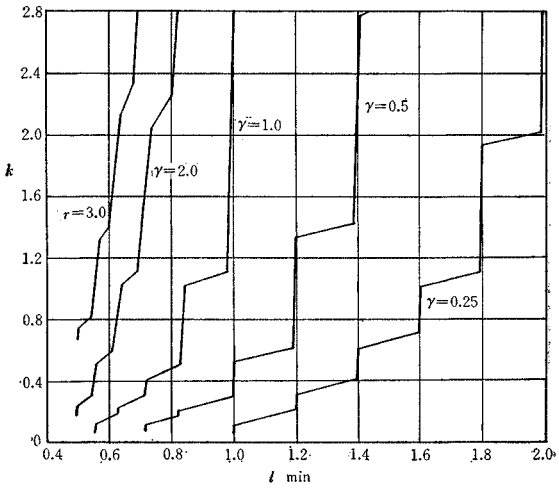
はり，あるいは，塔状構造物の動的解析を行なうには，構造物を有限自由度系とみなして偏微分方程式を導くかわりに，変形法，あるいは，階差法によって振動方程式を導き，電子計算機で数値計算を行なうことが多い。必要とする計算精度や計算機の演算能力などを考慮して自由度を決定するが，精度の予測は困難な場合が多い。誤差の原因を，方程式を導く過程におけるものと，方程式を数値積分する過程におけるものとに大別して，前者の場合の相対誤差を予測する一つの目安として Γ の変化を検討した。

構造物を n 自由度系と仮定して階差法によって振動方程式を導き，この方程式より得られる固有値の逆数和の相対誤差が n とともにどのように変化するかを求めた。これはあくまでも固有値の逆数和であるから，固有値の相対誤差を示すものではないが，基本振動の固有値が最も重要であることに着目すれば，Γ の誤差も一つの誤差判定の目安になると思われる。

(1) 単純支持ばり

図—1 に示すような単純支持ばりで，質量分布は直線変化，曲げ剛さが1次変化と3次変化する場合について階差法によって振動方程式（stiffness matrix）を作成した。$n=5\sim30$ として，それぞれの stiffness matrix の逆行列より式(1.6)に基づいて Γ_n を求めた。つぎに，式(2.5)の級数解より厳密解 Γ_0 を求めて相対誤差（Γ_n

図—8



$-\Gamma_0)/\Gamma_0$ を計算した。図—9 における直線Aは

$$EI=EI_c\{1-0.5|2x/L|^3\}$$

$$\rho=\rho_c\{1-0.5|2x/L|\}$$

によるものであり，直線Bは質量分布は同じものとして，曲げ剛さは

$$EI=EI(1-|x/L|)$$

によるものを示している。階差法によって振動方程式を導くかぎりでは，意外に精度がよくないことを知った。等断面ばりを変形法で解析するならば，格点載荷による格点変位は分割数 n に無関係に正しい値となる。したがって，等断面単純支持ばりの載荷点たわみの曲線を連続曲線として求めて，この曲線を n 等分点で代表させて，式(1.6)のかわりに Simpson の台形公式で積分を行なって，n の増加とともどのように収れんするかを検討した。結果を 表—3 に示す。これは変形法によって方程式を作成する場合の相対誤差を与えている。

表—3　自由度の変化による Γ の変化等断面単純ばり

n	$\Gamma(\rho_c L_c^4/EI_c)$	相対誤差
4	1/88.62	0.0156
6	1/89.72	0.0031
8	1/89.91	0.0010
10	1/89.96	0.0004
∞	1/90.00	0

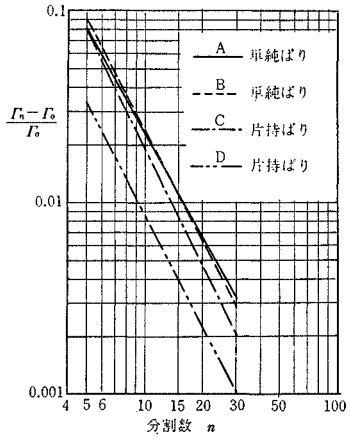
（2）　片持ばり

単純支持ばりの場合と全く同様に，等断面片持ばりの振動方程式を階差法によって導いた場合の相対誤差を図—9 の直線（1点鎖線）Cによって示す。直線（2点鎖線）Dは，直径が直線変化

$$d=d_0\{1-(x/2L)\}$$

となっている円柱の Γ の相対誤差を示す。等断面ばりの場合の約 1/2 となっている。

図—9　階差法による相対誤差



単純支持ばりと片持ばりの両者の場合に逆行列の演算を含んでいるが，電子計算機で 30 元行列の逆行列の演算を行なっても，図—9 に示す精度よりはるかに高い精度が保たれるので，図—9 は階差法による誤差とみなし得よう。微分方程式をいかに高い精度で数値積分を行なっても，図—9 あるいは 表—3 の誤差が存在することは念頭におかなければならない。

7. むすび

固有値の逆数和が断面変化にともなってどのように変化するか，したがって，基本振動周期がどのような傾向をもって変化するか，あるいは，固有値解析の誤差はどの程度であるかに着目して研究した。

断面変化の影響を予測するについて本文が役立ち得るならば幸いである。本研究において終始適切なご指導を賜った名古屋大学成岡教授には，深甚な感謝の意を表したい。数値計算は，山口大学電子計算機 FACOM-231 を使用して行なった。卒業研究の一部として計算を手伝っていただいた荒尾征士（清水建設）・田中達也（大成建設）・浜田純夫（名古屋大学大学院）の 3 氏に感謝の意を表したい。

参考文献

1) Crandall, S.: Engineering Analysis. McGraw-Hill. 1956
2) 近藤次郎：積分方程式とその応用．コロナ社応用数学講座第 12 巻
3) 村上永一：勢力式による変断面桁の固有振動数を求める計算法，土木試験所報告第 65 号，昭和 17 年3月
4) 中川・成岡：鋼製煙突の地震強度に対する一検討，日本建築学会論文報告集，第 78 号，昭和 37 年 10 月，pp. 7～12
5) 中川・成岡：鋼製煙突の地震強度に対する一検討（続報）日本建築学会論文報告集，第 90 号，昭和 38 年9月，pp. 8～12

（1967.4.13・受付）