

主成分分析法によるアーチ ダムの 信頼度の検定について*

TEST OF RELIABILITY OF ARCH DAM BY PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS

三 池 亮 次**

By Ryoji Miike

要旨 アーチダムは1年を周期とする気温と水位の影響を受け、全体としてきわめて緩慢な変位とひずみの変動をくり返している。すなわち気温は堤体内部に平均温度と温度こう配を生ぜしめ、水位は水圧荷重としてアーチダムの変位、ひずみをじゃっ起せしめるのであるが、かかる水位ないし温度条件とたとえば変位との関係を重回帰における有意性検定によって検討しようと試みはすでに行なわれ^{1), 2), 9)}、ダムの安全管理の一手段としてかなり良好な成果を得ている。

しかしながら重回帰における有意性の検定は、原則として各因子（独立変数）が完全に独立であることが必要条件とされているにもかかわらず、この条件を完全に満足する場合はまれであり、各因子間の相関が顕著である場合には、回帰分析によって各因子の偏回帰係数の不偏推定値が得られたとしてもその分散は大きくなる。これは多重共線性の問題^{3), 4)}として多くの学者によって研究されてきた。

この問題を解決する一手法として主成分分析^{5), 6), 7), 8)}による方法を考える。主成分分析とは観測変量間の内部従属性を解明するため、各変量が張る多次元空間において、相互の相関係数を零とする新軸を求め、各軸の全体の変動の中での影響度、相関性を検出することであり、各変量の間の相関係数マトリックスの固有値および固有マトリックスを求めるこによってこの検出が可能となる。

かくして、まったく独立の観測変量マトリックスとその従属変量ベクトルとの間に帰無仮説による有意性の検定を行なうことができる。ここではこの問題を含めて主成分分析ということにすれば、偏回帰係数の不偏推定値の分散はきわめて小さくなり、この偏回帰係数の値を時系列の中でとらえることによって、重回帰の構造の変動を推定し、その信頼度を検定することが可能となる。

1. 主成分分析

観測確定変数マトリックス X とその従属変量ベクトル \mathbf{Y} との間に、

が成立するものとする。ここに β は偏回帰係数、 e は偏差であり、プライム記号で転置を表わすものとすれば。

$$Y' = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n], \quad \beta' = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \quad e' = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

である。しかるとき β の不偏推定値 $\hat{\beta}$ に対して正規方程式は、

であり、方向余弦マトリックス

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12}\dots l_{1p} \\ l_{21} & l_{22}\dots l_{2p} \\ \vdots & \vdots \\ l_{p1} & l_{p2}\dots l_{pp} \end{bmatrix} = [l_1, l_2, \dots, l_p]$$

によって、 X 座標系より U 座標系に直交変換すれば、

$$U = XL \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

ここに、

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \cdots u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} \cdots u_{2p} \\ \vdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} \cdots u_{np} \end{pmatrix} = [\mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{u}_2^{(n)}, \dots, \mathbf{u}_p^{(n)}]$$

である。新軸に対して正規方程式は、

式(3)を式(4)に代入すれば、

$$(XL)'(XL) \hat{\beta}^{(u)} = L'X'XL \hat{\beta}^{(u)} = L'SL \hat{\beta}^{(u)} = U'Y$$

.....(5)

ここに、 $\hat{\beta}^{(u)}$ は U 座標系における偏回帰係数 $\beta^{(u)}$ の不偏推定値であり、

で S は対称マトリックスであるから、固有値の性質により実数 n 次の対角マトリックス λ に対して $U'U$ すなわち、

とすることができる。

あるいは、

式(8)の左辺は変数 U 相互の相関係数が零であることを示すもので、 λ はマトリックス $X'X$ の固有値、 L は固有マトリックスである。

したがって、この場合の重回帰における有意性の検定は簡単となり、 U を U_1 と U_2 に分割した次式

$$Y = U_1 \beta_1^{(u)} + U_2 \beta_2^{(u)} + e \quad \dots \dots \dots (10)$$

において、帰無仮説 $H_0 : \beta_2^{(u)} = 0$ を設ければ、仮設 H_2 における残差平方和、

$$S_E(H_2) = Y'Y - \hat{\beta}^{(u)'}(H_2)U_1'Y \equiv Y'Y - R^{(u)}(\hat{\beta}_1) \quad \dots \dots \dots (11)$$

ただし、

$$R^{(u)}(\hat{\beta}_1) = (\lambda_1^{-1}U_1'Y)'U_1'Y = (U_1'Y)' \lambda_1^{-1}(U_1'Y) \quad \dots \dots \dots (12)$$

また対立仮設 $H_1 : \beta_1^{(u)} = (\beta_1^{(u)'}), \beta_2^{(u)'} \neq 0$ における残差平方和、

$$S_E = Y'Y - \hat{\beta}^{(u)'}U'Y \equiv Y'Y - R^{(u)}(\hat{\beta}) \quad \dots \dots \dots (13)$$

ただし、

$$\begin{aligned} R^{(u)}(\hat{\beta}) &= (U'Y)' \lambda^{-1}(U'Y) \\ &= \begin{bmatrix} U_1'Y \\ U_2'Y \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1'Y \\ U_2'Y \end{bmatrix} \\ &= (U_1'Y)' \lambda_1^{-1}(U_1'Y) \\ &\quad + (U_2'Y)' \lambda_2^{-1}(U_2'Y) \quad \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

したがって $\hat{\beta}_1^{(u)}$ による修正後の $\hat{\beta}_2^{(u)}$ による平方和は、

$$\begin{aligned} R^{(u)}(\hat{\beta}_2|\hat{\beta}_1) &\equiv R^{(u)}(\hat{\beta}) - R^{(u)}(\hat{\beta}_1) \\ &= S_E(H_2) - S_E \\ &= (U_2'Y)' \lambda_2^{-1}(U_2'Y) \quad \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

であり、同様に $\hat{\beta}_2^{(u)}$ による修正後の $\hat{\beta}_1^{(u)}$ による平方和は

$$R^{(u)}(\hat{\beta}_1|\hat{\beta}_2) = (U_1'Y)' \lambda_1^{-1}(U_1'Y) \quad \dots \dots \dots (16)$$

であり、 $e \in N(0, \sigma^2)$ とすれば帰無仮説 H_2 の下で、

$$\frac{R^{(u)}(\hat{\beta}_2|\hat{\beta}_1)}{\frac{p-r}{n-p}} \sim F(p-r, n-p) \quad \dots \dots \dots (17)$$

によって容易に β_2 の有意性を検定することができる。ただし、 r は変数マトリックス U_1 の因子数であり、 $F(p-r, n-p)$ は自由度対 $\{p-r, n-p\}$ の F 分布で $N(0, \sigma^2)$ は平均値零、分散 σ^2 の正規分布である。

2. 主成分分析の電子計算

定数項をもつ線型回帰模型に対しては定数項を除く諸因子の相関係数マトリックスに対して固有値計算を行ない、新軸に変換するのが得策と考えられる。この場合の n 組の観測変量の線型回帰模型を

$$Y = \beta_0^{(1)} + X^{(1)} \beta^{(1)} + e \quad \dots \dots \dots (18)$$

ただし、

$$\beta_0^{(1)'} = [\beta_0^{(1)}, \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_p^{(1)}]$$

$$\beta^{(1)'} = [\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \dots, \beta_p^{(1)}]$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \dots x_{1p}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \dots x_{2p}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}^{(1)} & x_{n2}^{(1)} \dots x_{np}^{(1)} \end{bmatrix}$$

とするとき $X^{(1)}$ は p 個の因子の n 組の確定変数マトリックス、 $\beta_0^{(1)}$ は定数項ベクトル、 $\beta^{(1)}$ は未知母数ベクトルである。

p 個の各因子の平均値および残差平方和の平方根は、 $i=1, 2, \dots, p$ に対して

$$\bar{x}_i^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha \cdot i}^{(1)} \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$\sqrt{S_{i \cdot i}} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^n (x_{\alpha \cdot i}^{(1)} - \bar{x}_i^{(1)})^2} \quad \dots \dots \dots (20)$$

である。ここで各因子を標準化し、

$$x_{\alpha \cdot i} = (x_{\alpha \cdot i}^{(1)} - \bar{x}_i^{(1)}) / \sqrt{S_{i \cdot i}} \quad \dots \dots \dots (21)$$

とすれば、この標準化された因子に対する線型回帰模型および正規方程式は、

$$Y = \beta_0 + X \beta + e \quad \dots \dots \dots (22)$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & X'X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ X'Y \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (23)$$

ここに、

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \dots x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} \dots x_{2p} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \dots x_{np} \end{bmatrix}$$

上式において、

$$R \equiv X'X \quad \dots \dots \dots (24)$$

は相関係数マトリックスとなり、式(3)にしたがって X 座標系より U 座標系に変換すれば、新軸における線型回帰模型、正規方程式は、

$$Y = \beta_0 + U \beta^{(u)} + e \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & U'U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}^{(u)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ U'Y \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (26)$$

したがって

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \Sigma Y \equiv \bar{Y} \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$U'U \hat{\beta}^{(u)} = U'Y \quad \dots \dots \dots (28)$$

とすることができる。式(23)における $X'Y$ の各要素は次式、

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} x_{\alpha \cdot i} Y_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \frac{(x_{\alpha \cdot i}^{(1)} - \bar{x}_i^{(1)})}{\sqrt{S_{i \cdot i}}} Y_{\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{i \cdot i}}} \left\{ \sum_{\alpha} x_{\alpha \cdot i}^{(1)} Y_{\alpha} - \bar{x}_i^{(1)} \sum_{\alpha} Y_{\alpha} \right\} \quad \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

によって計算が可能である。また相関係数マトリックス R の各要素は、残差積和を $S_{i \cdot j}$ とすれば、

$$\sum_{\alpha} x_{i \cdot} x_{j \cdot} = \frac{S_{i \cdot j}}{\sqrt{S_{i \cdot i} S_{j \cdot j}}} \quad \dots \dots \dots (30)$$

であり、 L を R の固有マトリックス、 λ を R の固有値マトリックスとするとき、式(28)における

AOV 表—1

SV	SS	DF	MS	F
$\hat{\beta}_2^{(u)}$ による修正後の $\hat{\beta}_1^{(u)}$	$R^{(u)}(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) = (\mathbf{U}_1' \mathbf{Y})' \lambda_1^{-1} (\mathbf{U}_1' \mathbf{Y})$	r	$V^{(u)}_{\beta_1 \beta_2} = \frac{R^{(u)}(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2)}{r}$	$\frac{V^{(u)}_{\beta_1 \beta_2}}{V_E}$
$\hat{\beta}_1^{(u)}$ による修正後の $\hat{\beta}_2^{(u)}$	$R^{(u)}(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1) = (\mathbf{U}_2' \mathbf{Y})' \lambda_2^{-1} (\mathbf{U}_2' \mathbf{Y})$	$p-r$	$V^{(u)}_{\beta_2 \beta_1} = \frac{R^{(u)}(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1)}{p-r}$	$\frac{V^{(u)}_{\beta_2 \beta_1}}{V_E}$
残差	$S_E = \mathbf{Y}' \mathbf{Y} - R^{(u)}(\hat{\beta})$	$n-p$	$V_E = \frac{S_E}{n-p}$	
T	$\mathbf{Y}' \mathbf{Y}$			

SV : Source of Variation 變動要因

SS : Sum of Squares 平方和

DF : Degrees of Freedom 自由度

MS : Mean Square 不偏分散

AOV 表-2

SV	SS	DF	MS	F
0	$\frac{1}{n} (\Sigma Y)^2$	1	$V_0 = \frac{1}{n} (\Sigma Y)^2$	V_0/V_E
1	$\frac{1}{\lambda_1} (u_1^{(n)'} Y)^2$	1	$V_1 = \frac{1}{\lambda_1} (u_1^{(n)'} Y)^2$	V_1/V_E
2	$\frac{1}{\lambda_2} (u_2^{(n)'} Y)^2$	1	$V_2 = \frac{1}{\lambda_2} (u_2^{(n)'} Y)^2$	V_2/V_E
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
p	$\frac{1}{\lambda_p} (u_p^{(n)'} Y)^2$	1	$V_p = \frac{1}{\lambda_p} (u_p^{(n)'} Y)^2$	V_p/V_E
残差	$S_E = Y'Y - \frac{1}{n} (\Sigma Y)^2 - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} (U_i^{(n)'} Y)^2$	$n-(p+1)$	$V_E = \frac{S_E}{n-(p+1)}$	
T	$Y'Y$			

である。また $U'Y$ の各要素は次式によって計算する。
すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t^{(n)'} \mathbf{Y} &= (\mathbf{X} \mathbf{l}_t)' \mathbf{Y} = \mathbf{l}_t' \mathbf{X}' \mathbf{Y} \\ &= \sum_{j=1}^p \{l_{j,i} \left(\sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha,j} Y_{\alpha} \right)\} \quad \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

式(29)で計算される $\sum_a x_{a \cdot j} Y_a$ を上式に代入することによって $u_i^{(n)'} Y$ の計算が可能である。

したがって AOV 表-1 に対してつぎの AOV 表-2 を得, 表における F 値が, 自由度 $\{1, n-(p+1)\}$ の F 分布における有意水準 5% の値 $F_{\alpha}(1, n-p+1; 0.05)$ より大きい場合は, U 座標系における偏回帰係数は有意と判定される。

なお電子計算には熊大 FACOM-231 を使用したため記憶容量の制限を受けプログラムを分割し演算する方法をとった。また Jacobi 法によって固有値計算を行なった。

3. 主成分分析法による信頼度の検定

主成分分析によって有意となった u 軸によって構成される U_1 座標系における U_1 因子の従属変量 Y に対する偏回帰係数の不偏推定値 $\hat{\beta}^{(u)}$ の分散は比較的小さいものとなるであろう。

さて、いま観測変量を時系列の中でとらえる場合、もしその観測変量が時間的に安定したものであれば、それを任意に分割したいずれの水準に対しても $\hat{\beta}^{(n)}$ の値は

ほぼ一定した値をとるべきであろう。すなわち従属変量 \mathbf{Y} と \mathbf{U}_i 因子との間の回帰平面は、時間のいかんにかかわらず多次元直交座標空間に固定されるであろう。

したがって全資料に対して主成分分析により U 座標系に変換し、有意な U_1 因子に対する変換マトリックス L_1 を求め、つぎに全資料を各時間の区分ごとに数個に分割し、ここに分割された第 j 番目の資料に対して L_1 により U_1 座標系に変換し、最小二乗法により各因子の偏回帰係数 $\hat{\beta}_j^{(u)}$ を求めれば、もしこの時系列が安定したものであれば、 j のいかんにかかわらず $\beta_j^{(u)}$ 相互に差異があるとは断定できないはずである。

このことをたとえばアーチダムのたわみの挙動解析に適用すればアーチダムの信頼度の検定が可能となるであろう。重回帰において因子相互に多重共線性が存在する場合、因子のレベルで回帰係数の信頼性を議論するためには主成分を求めるため、いったん座標軸を回転する必要があるよう思う。

時系列を数個の時間の区分ごとに分割した第1番目の
 $\beta_1^{(u)}$ と第 j 番目の $\beta_j^{(u)}$ との間に差異があるかどうか
 を検定する前に、まず $\beta_j^{(u)}$ そのものの有意性を帰無仮説により検定する。以下 β の添字 (u) を省略する。

すなわち、第 j 番目における観測変量ベクトル \mathbf{Y}_j と主成分分析の結果有意となった因子によって構成される確定変数マトリックス $\mathbf{U}_{1:j}$ との間につぎの線型回帰模型、

表-1 綾北ダムの主成分分析出力データ (1)

MEAN	D						
1	12.35	1	29.82				
2	16.19	2	62.49				
3	16.96	3	74.17				
4	0.67	4	7.11				
5	0.03	5	5.66				
6	-0.25	6	5.34				
7	3277.48	7	8711.12				
Y	-9.26						
R	1	2	3	4	5	6	7
1	1.0000	0.7595	0.6899	0.2826	0.2232	0.2621	0.4004
2		1.0000	0.9898	0.7990	0.6473	0.4552	0.4200
3			1.0000	0.8465	0.7029	0.4367	0.3901
4				1.0000	0.8223	0.4848	0.2488
5					1.0000	0.6371	0.2471
6						1.0000	0.2857
7							1.0000
S E	S B						
161.414	1	16.438					
	2	-35.612					
	3	-50.535					
	4	-12.846					
	5	-20.378					
	6	-5.781					
	7	15.629					

表-2 綾北ダムの主成分分析出力データ（2）

VAL							
1	1.1403						
2	0.0032						
3	4.3072						
4	0.0415						
5	0.1649						
6	0.5454						
7	0.7975						
VEC							
x/u	1	2	3	4	5	6	7
1	0.5998	-0.0826	0.3168	0.4623	0.2936	0.4522	-0.1695
2	0.1702	0.7288	0.4600	-0.3724	-0.1916	0.0040	-0.2300
3	0.0917	-0.6738	0.4615	-0.4811	-0.1263	-0.0925	-0.2620
4	-0.3211	-0.0215	0.4159	0.6427	-0.3925	-0.3449	-0.1939
5	-0.4524	0.0712	0.3896	-0.0341	0.7876	-0.1113	0.0673
6	-0.3353	-0.0485	0.3060	-0.0386	-0.2945	0.6506	0.5293
7	0.4275	-0.0086	0.2380	0.0193	-0.0008	-0.4824	0.7263
AOV							
S V	S S	D E	F	L A S T	0	-	9.264
0	10727.80	1	7770.00	*	1	21.130	
1	508.94	1	368.00	*	2	5.712	
2	0.10	1	0.01		3	-45.830	
3	9045.67	1	6550.00	*	4	38.140	
4	60.38	1	43.71	*	5	8.707	
5	12.51	1	9.06	*	6	7.352	
6	29.48	1	21.31	*	7	28.050	
7	627.53	1	454.00	*			
E U	161.52	118	(1.175)				
E	161.41	117	(1.176)				
T	21173.90	125					

び回帰係数の不偏推定値(SB)を同時に計算する。

つぎに相関係数マトリックス R の固有値ベクトル(VAL)および固有マトリックス(VEC)を求める。固有マトリックスを方向余弦マトリックス L とし、 L により標準化された X 座標系を U 座標系に変換すれば、 u_i 軸の方向余弦 l_{ij} は固有マトリックスにおける第 i 列

のベクトルによって表わされる。たとえば u_3 軸の標準化された t_3 軸に対する方向余弦は 0.4615 である(表-2)。

新因子 u_i ($i=1, 2, 3, \dots, 7$) に対してつぎの線型回帰模型

を考える。ここに b_0 は定数項, b_i は u_i にかかる偏回帰係数である。式(47)に対する正規方程式の係数マトリックスは、固有値ベクトルを対角要素とする対角マトリックスであり、固有値ベクトルの大きいものより順に第1主成分、第2主成分、……といわれる。この場合の第1主成分は u_3 軸である。

また式(47)の重回帰模型に対して帰無仮説により有意性検定を行なう。その分散分析表(AOV)は**AOV表-2**にしたがって表-2にプリントされる。 u_2 を除く各因子が高度に有意であることがわかる。なお SS_{EU} は u_2 を除く有意な因子とたわみ δ との重回帰における残差平方和であり、F欄のカッコ内の数値はその不偏分散の平方根である。有意な因子の偏回帰係数の不偏推定値(B)も同時にプリントされる。

さてつぎには昭和 35 年 7 月 26 日より昭和 41 年 3 月 31 日までの 131 組の資料を各年度ごとに分割し、各年度ごとにふたたび資料を標準化し、先に誘導された有意な因子に対する変換マトリックス L_1 (マトリックス L より、第 2 列目の先に棄却された u_2 に対する方向余弦 l_2 を除いた方向余弦) によって

にしたがい、 U_1 座標系 (U 座標系より u_2 軸を取り除いた直交座標系) における値に変換する。ここに変数マトリックス X_j として、さきに標準化された値を使用しなければ回帰係数の差の検定が不可能となるであろう。さて第 j 年度に対して次式

$$\delta_j = b_{0,j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^7 b_{i,j} u_{i,j} + e_j \quad \dots \dots \dots \quad (49)$$

なる線型回帰模型を立てるとき、上式の偏回帰係数 $b_{0,j}$, $b_{i,j}$ ($i=1, 3, 4, \dots, 7$) の不偏推定値 (BS) は式 (49) に対する正規方程式より容易に誘導される。同時に正規方程式の係数マトリックスの対角要素 (C) および残差平方和 (SES) を求めた結果を表-3 に示す。

なおこの場合の正規方程式は有意な p' 個の U_1 因子に対して新たに通し番号を付けるとき、

$$\begin{bmatrix} n_j & \Sigma u_{1,j} & \Sigma u_{2,j} \cdots \Sigma u_{p',j} \\ \Sigma u_{1,j} & U'_{1,j} U_{1,j} & b_{0,j} \\ \Sigma u_{2,j} & & b_j \\ \vdots & & \\ \Sigma u_{p',j} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma \delta_j \\ U'_{1,j} \boldsymbol{\delta}_j \\ \vdots \\ b_j \end{bmatrix} \quad (50)$$

であり、上式において、

表-3 綾北ダムの主成分分析出力データ(3)

B S	35	36	37	38	39	40
年度	35	36	37	38	39	40
u_0	-9.792	-8.793	-7.926	-8.969	-9.727	-7.854
1	29.27	19.28	29.31	20.03	11.74	13.84
3	-45.40	-46.45	-45.44	-41.77	-46.22	-42.17
4	58.94	2.303	34.94	-64.83	71.33	52.60
5	15.74	15.44	30.92	15.07	6.666	7.181
6	12.08	10.91	17.56	23.13	12.66	6.302
7	32.21	26.69	27.00	15.67	17.89	15.93
C						
u_0	0.08335	0.05076	0.1957	0.3021	0.07154	0.2043
1	5.683	3.602	14.27	77.03	6.477	20.50
3	1.868	1.281	2.138	9.684	1.949	5.938
4	272.2	223.5	62.47	5991.0	975.5	1767.0
5	40.80	37.02	98.82	96.99	22.15	73.22
6	15.24	12.55	35.02	59.99	11.39	111.9
7	21.85	9.539	17.13	51.44	8.455	50.23
SES						
	7.33	15.89	27.25	4.790	4.697	22.55
N						
	33	32	17	13	22	14

$$\mathbf{U}'_{1..j} \mathbf{U}_{1..j} = (\mathbf{X}_j \mathbf{L}_1)' (\mathbf{X}_j \mathbf{L}_1) = \mathbf{L}'_{1..j} (\mathbf{X}'_{j..j} \mathbf{L}_1) \quad \dots \dots \dots (51)$$

$$\mathbf{U}'_{1..j} \boldsymbol{\delta}_j = (\mathbf{X}_j \mathbf{L}_1)' \boldsymbol{\delta}_j = \mathbf{L}'_{1..j} (\mathbf{X}'_{j..j} \boldsymbol{\delta}_j) \quad \dots \dots \dots (52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'_{1..j} \mathbf{I}_n &= \begin{pmatrix} \Sigma u_{1..j} \\ \Sigma u_{2..j} \\ \vdots \\ \Sigma u_{p'..j} \end{pmatrix} = (\mathbf{X}_j \mathbf{L}_1)' \mathbf{I}_n = \mathbf{L}'_{1..j} \mathbf{X}'_{j..j} \mathbf{I}_n \\ &= \mathbf{L}'_{1..j} \begin{pmatrix} \Sigma x_{1..j} \\ \Sigma x_{2..j} \\ \vdots \\ \Sigma x_{p..j} \end{pmatrix} \quad \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

ここに \mathbf{I}_n は n 行単位ベクトルであり、かくして偏回帰係数の不偏推定値の電子計算が可能となる。

表-4 における (F 1) は式 (38) の $\beta_{i..j}=0$ とした

表-4 綾北ダムの主成分分析出力データ(4)

F 1	35	36	37	38	39	40
u_0	4083.00	2396.00	117.80	333.50	4223.00	93.72
1	555.00	162.30	22.09	6.52	67.95	2.90
3	391.60	2649.00	354.40	225.60	3500.00	92.96
4	45.29	0.04	7.17	0.88	16.65	0.49
5	21.55	10.13	3.55	2.93	6.41	0.22
6	33.98	14.92	3.23	11.17	44.93	1.11
7	168.50	117.40	15.61	5.98	120.80	1.57
F 1 A	4.13	4.26	4.95	5.99	4.59	5.59
F 2	35	36	37	38	39	40
u_0	0.00	16.34	12.99	4.64	0.09	14.42
1	0.00	23.61	0.00	2.73	86.18	10.04
3	0.00	0.12	0.00	1.23	0.11	0.47
4	0.00	14.21	1.79	6.46	0.42	0.02
5	0.00	0.00	1.72	0.00	4.46	0.71
6	0.00	0.11	0.62	4.29	0.04	0.29
7	0.00	2.13	0.73	9.86	23.07	4.06
F 2 A	—	4.00	4.02	4.09	4.05	4.09
F 3	35	36	37	38	39	40
1.00	2.26	9.67	2.83	1.11	11.43	
1.76	1.84	2.11	2.41	1.99	2.31	
F 3 A	1.76	1.84	2.11	2.41	1.99	2.31

左辺の値を各年度別にとりまとめたものであり、(F 1 A) は有意水準 5% における $F_a(1, n_j - p' + 1; 0.05)$ で、これより大きい (F 1) に対応する表-3 における (BS) 表の値が有意である。たとえば昭和 36 年度の u_4 の偏回帰係数 $b_{4..2}$ は有意でない。この有意と判定された $b_{i..j}$ を有意でない $b_{i..j}$ と識別するために表-3 の (BS) 表の有意な $\hat{b}_{i..j}$ の下にアンダーラインを付した。同様にして (F 2) は式 (44) の左辺の値で (F 2 A) は $F_a(1, n_j + n_1 - 2p' + 1; 0.05)$ であり (F 2 A) < (F 2) を満足する偏回帰係数 $b_{i..j}$ と $b_{i..1}$ の間に差異があると判定される。この差異があると判定された $b_{i..j}$ に対して、同じく表-3 の (BS) 表の $\hat{b}_{i..j}$ の下に 2 本のアンダーラインを付してある。(F 3) は式 (45) の左辺の値であり、(F 3 A) は $F_a(n_j - p' + 1, n_1 - p' + 1; 0.05)$ である。

表-3 の (BS) 表によって有意な $b_{i..j}$ の挙動を調べてみよう。

(1) u_3 軸の偏回帰係数 $b_{3..j}$ はすべての年度において有意である。

また表-2 から、この u_3 軸の固有値 (VAL) は 4.307 で第 1 主成分であり、第 2 主成分である u_1 の固有値 1.140、第 3 主成分である u_2 の固有値 0.7975 よりはるかに大きい値であることがわかる。しかも u_3 の回帰係数 $\hat{b}_{3..j}$ の値は、 $\hat{b}_{1..j}, \hat{b}_{2..j}$ の 2 倍近い値であるから、この u_3 成分はたわみ δ に対してもっとも顕著な効果をおよぼしていると判断することができるであろう。

表-2 の方向余弦マトリックス表 (VEC) の第 3 列の値すなわち u_3 軸の x 軸に対する方向余弦は、 u_3 軸が主に堤体平均温度および温度こう配によって構成された軸であることを示す。 x 因子は式 (21) によって標準化されているから、方向余弦の値は x_1, x_2, \dots, x_7 因子の u_3 成分に対する効果を意味するのである。

したがって、 u_3 すなわち温度荷重に関する成分は、たわみに対して支配的効果をおよぼしているものと考えられる。

温度の条件が、堤体平均温度と温度こう配の和としてしかたらえられないのは、両者の間の相関が顕著でこれを分離することが不可能であることを意味する。

u_3 軸の方向余弦の値をくわしくみると、温度こう配 (x_4, x_5, x_6) の方向余弦が、堤体平均温度 (x_1, x_2, x_3) の方向余弦より小さく、また x_1 より x_2, x_3 の方向余弦が、 x_6 より x_5, x_4 の方向余弦が大きいことがわかる。したがって、温度こう配より堤体平均温度のたわみにおよぼす効果が大きく、また下部標高堤体平均温度より上部標高堤体平均温度が、上部標高温度こう配より下部標高温度こう配がたわみに対して顕著な効果をおよぼすものと推察されるのである。

そしてこの温度軸に関する偏回帰係数 $b_{3..j}$ の値は、

初年度の $b_{1,j}$ と差異がなく、すなわち温度荷重によるたわみはきわめて安定した挙動をくり返しているものと考えられるであろう。

なお、 u_3 軸の温度荷重に関する方向余弦はすべて正であり、 $\hat{b}_{3,j}$ は負であるから正の温度荷重によりたわみは負の方向すなわち上流方向にたわむことがわかる(下流側温度が上流側より大きい温度こう配を正とした)。

(2) 第3主成分 u_7 は表-2の方向余弦表(VEC)の第7列の値から、堤体平均温度と温度こう配の方向余弦が消殺され、主として水圧荷重を表わすものと考えられる。

表-3の u_7 の偏回帰係数 $\hat{b}_{7,j}$ の変動から、水圧荷重によるたわみは昭和38度より急激に小さくなり、初年度の約半分になっているものと考えられる。これは37年度より38年度にかけて、なんらかの外荷重に対する綾北ダムの抵抗の構造形式の変化があったことを意味する。

水圧荷重によるたわみがこのように小さくなる理由としてつぎの諸点が考えられる。

① El. 248 より上部の片持ばり要素にクラックが生じたこと。

片持ばり要素にクラックが入り、たとえばもし片持ばり要素の剛度が零となれば、水圧荷重による下部アーチの変位の上方への伝達が不可能となりトップアーチクラウンのたわみは零となる。このように片持ばり剛度が小さくなるほど、たわみ δ は小さくなるのである。

片持ばりの剛度の低下は、堤体平均温度によるたわみを増大せしめ、温度こう配によるたわみを減少させる。したがって両者相殺して、温度荷重によるたわみの変動は認められないであろう。いずれにしても片持ばりの剛度の低下が温度荷重によるたわみにおよぼす効果は小さいものと考えられる。

② コンクリートあるいは基礎岩盤の弾性係数の増大。

土木研究所の飯田隆一氏によれば重力ダムにおいても水圧荷重によるたわみがしだいに減少する現象が観察されるとのことであり、その理由としてコンクリートが打設後長期にわたり漸次硬化していくこと^{11),12)}、基礎岩盤の圧密、締まり的圧縮現象が進行していくこと¹³⁾などが考えられる。ただし温度荷重によるたわみにはコンクリートと基礎岩盤の弾性係数の比 E_c/E_r が影響をおよぼし、 E_c が単独にたわみに影響しない。したがって E_c/E_r を一定にしたまま、 E_c および E_r がともに増大すれば、温度荷重によるたわみは変化しないはずである。

③ たわみ δ は El. 248 に対する El. 298 の相対たわみである。しかるに、通常水圧の低いとき下部標高(El. 248付近)のアーチには水圧荷重により上部より大きい圧縮応力が作用する。Davis-Granvillの法則¹⁴⁾によ

れば、クリープは応力に比例するから下部アーチのクリープは上部アーチのクリープより大きく、水圧荷重による相対たわみは小さくなるのであろう。しかしながらもしクリープについてボルツマンの重畠原理¹⁵⁾が許されるなら、温度荷重による応力は周期的に絶対値の近似的に等しい圧縮および引張応力をくり返しており、打設後相当の時日を経ていることなどから、下流および上流へのクリープによる変位を等しいものと仮定すれば、正、負のクリープが相殺されて年間のクリープの変位は零となるのであろう。

④ ①, ②, ③ の現象が同時に進行する。

(3) 第2主成分である u_1 は判然と断定できないが、 u_7 と同様主として水圧荷重の影響の大きい成分と考えられ、 u_1 によるたわみはしだいに遞減する。

(4) 要するにたわみ δ と各因子との間の回帰平面は、決して安定したものでなく、アーチダムの外荷重に対する抵抗の構造形式の変動とともに刻々変動していくものと考えられる。そしてこの回帰係数 $\hat{b}_{i,j}$ の値の動きを観察し、異常があれば警戒を要し、その原因を究明する必要があるように思われる。

(5) (F3) 表は残差平方和の動きを観察することによって、たわみの挙動の異常性を検出するために計算、作成されたものである。これによれば昭和37年度および昭和40年度に異常があることがわかる。

39年度の(F3)の値がきわめて小さいことから、計器自身の精度の低下は考えられない。計器の精度はいったん低下すれば容易に回復しないであろう。

37年度の(F3)の値が大きいのはこの年度において水位によるたわみを低下せしめる何らかの原因が大きく進行しつつあったためではないかと考えられる。

(6) 昭和40年度において有意な因子は定数項と u_3 軸すなわち温度軸のみでその他はすべて有意であるとはいえない。40年度夏季に指示計が故障し3ヶ月にわたり欠測があり十分な資料が得られなかつたためと考えられるが、41年度の解析の結果を整理しなければ、現在その理由について断定することはむずかしい。40年度の(F3)の値が大きい理由についても同様である。

水圧荷重によるたわみが年々小さくなることを確認するために、主成分分析に使用した綾北ダムの資料を各年度ごとに分割し、各年度ごとに式(46)の線型回帰模型を考え、U座標系に変換することなくX座標系において各因子の有意性を帰無仮説によって検定した。その有意な因子と δ の回帰関係を各年度ごとに示せばつぎのとおりである。

昭和35年度

$$\begin{aligned}\hat{\delta} = & -8.72 + 1.75(t_1 - 11.62) - 2.00(t_2 - 11.10) \\ & - 4.51(\alpha_2 + 0.05) + 0.002403(h - 225)^2 \\ & \dots \dots \dots \quad (54)\end{aligned}$$

$$S_E = 4.997(0.422) \quad C_h = 2.330 \times 10^{-7} \quad N = 33$$

昭和 36 年度

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= -4.35 - 0.832(t_2 - 11.10) - 6.05(\alpha_1 + 0.03) \\ &\quad - 3.23(\alpha_2 + 0.05) + 0.001318(h - 225)^2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (55)$$

$$S_E = 15.57(0.746) \quad C_h = 9.583 \times 10^{-9} \quad N = 32$$

昭和 37 年度

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= 4.00 + 1.64(t_1 - 11.62) - 1.46(t_2 - 11.10) \\ &\quad - 7.02(\alpha_1 + 0.03) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (56)$$

$$S_E = 43.02(1.819)$$

昭和 38 年度

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= 0.165 - 0.409(t_1 - 11.62) - 12.1(\alpha_1 + 0.03) \\ &\quad \dots \dots \dots (57) \end{aligned}$$

$$S_E = 9.399(0.969)$$

昭和 39 年度

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= -3.49 + 0.558(t_1 - 11.62) - 1.27(t_3 - 11.87) \\ &\quad - 2.88(\alpha_2 + 0.05) - 1.37(\alpha_3 + 0.13) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (58)$$

$$S_E = 3.118(0.4283)$$

昭和 40 年度

$$\begin{aligned} \hat{\delta} &= 0.648 - 1.14(t_1 - 11.62) - 11.5(\alpha_1 + 0.03) \\ &\quad \dots \dots \dots (59) \end{aligned}$$

$$S_E = 34.61(1.774)$$

ここに S_E は残差平方和、その右のカッコ内の数値は不偏分散の平方根、 C_h は水圧荷重の回帰係数に対する正規方程式の係数マトリックスの逆マトリックスの対角要素である。N は資料組数である。これよりつぎの事項が考察される。

(1) 35 年度と 36 年度における水圧荷重にかかる回帰係数の不偏推定値は 0.002403, 0.001318 で 36 年度の方が小さくなる。この両値の差の検定を行なうことが

可能であるとして、式 (44) 左辺の値を計算すれば、13.00 を得る。しかるに

$$F_{\alpha}(1, N_{35} + N_{36} - p'_{35} + p'_{36}; 0.05) = 4.02$$

であるから、両者の間に明らかに差があり、35 年度より 36 年度にかけて水位によるたわみが小さくなるものと判断される。ただし p' は定数項を含む有意な因子数である。

(2) 37, 38, 39, 40 年度の水圧荷重に関する回帰係数 b_h は、帰無仮説検定の結果有意ではないと判定された。38, 40 年度においては不偏分散の平方根が大きく水圧荷重によるたわみの持分がこの全体の残差の中に埋没して有意ではないと判定された可能性も考えられるが、39 年度の不偏分散は、36 年度より小さいにもかかわらず b_h が有意でないのは、明らかに 39 年度の b_h が 35, 36 年度に比してきわめて小さい値をとるためである。

(3) 昭和 37 年度において定数の値が急に大きくなるのは、この中に検出不可能な水圧荷重によるたわみが含まれているためと考えられる。また 37 年度より 40 年度にかけて定数値が小さくなるのは、水圧荷重によるたわみがだいに小さくなることなどの流動変形の存在を示唆するものである。

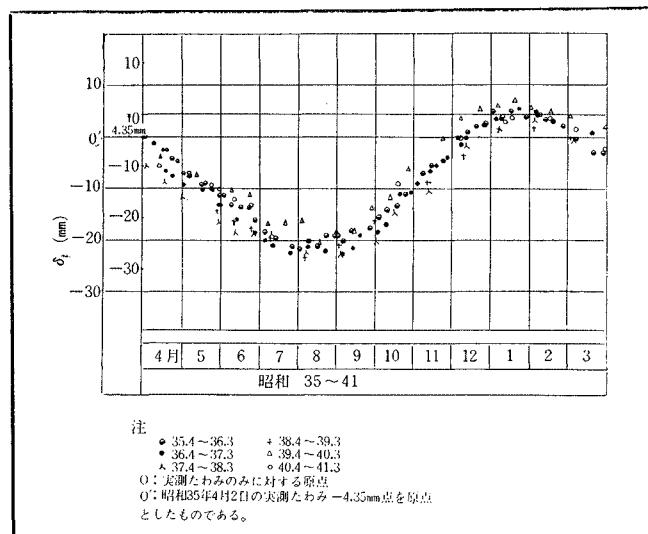
(4) 水圧荷重によるたわみの差の検定は、このようにいろいろ問題はあるが主成分分析によらなくても可能である。しかし温度荷重によるたわみの差の検定はもはや不可能で、式 (54)～(59) より明らかにように t, α の回帰係数は年々大きく変わり、一見温度荷重によるたわみが刻々変動しつつあるように思われるが、これは温度荷重相互の相関性のためであって、この温度荷重によるたわみの和をとってみれば図-1 のとおりとなり、実はきわめて安定した挙動をくり返しているのである。

5. 結論

(1) 確定変数相互の相関が顕著である場合の重回帰分析における多重共線性の問題を解決する一手法として、主成分分析により相互の相関係数を零とする新因子を見出し、この新因子と從属観測変量との間の重回帰構造模型に対して帰無仮説による有意性検定を行なう理論と計算法と重回帰における差の検定法を明らかにした。

(2) 綾北ダムのたわみに影響をおよぼす堤体平均温度、温度こう配、水圧荷重等の諸因子に対して主成分分析を行ない新因子を求め、新因子のたわみに対する有意性を検定した。有意な因子は相互に独立であり、その偏回帰係数の推定値の分散はき

図-1 綾北ダムの温度荷重によるたわみ δ_t



わめて小さくなるから、この新因子の回帰係数の動きを時系列の中でとらえることによって、回帰係数の時間的変動すなわちアーチダムの信頼度の検定が可能となつた。

(3) アーチダムの外荷重に対する抵抗の構造形式は決して安定したものではなく、刻々変動していることが観察された。綾北ダムにおいては水圧荷重によるたわみがたん水後しだいに小さくなるものと考えられ、この原因について若干の考察を行なつた。しかし温度荷重に対しては安定した挙動をくり返しているようである。

主成分分析を行なわないで、実測された諸因子とたわみとの回帰構造模型に対して、帰無仮説による有意性の検定を行ない、外荷重に対する抵抗の構造形式の変動を確認した。

(4) 綾北ダムのたわみに対して、堤体平均温度および温度こう配によって構成される第1主成分が、支配的效果をおよぼしていることが推察された。しかも第1主成分の中で堤体平均温度の影響が温度こう配より大きく、かつ上部堤体平均温度および下部温度こう配の効果が顕著であると考えられた。

(5) 残差平方和の時系列的変動から、アーチダムの信頼度の検定を試みた。

最後に本研究を取りまとめるにあたりご指導を賜った熊本大学工学部 福井武弘教授、理学部 稲葉三男教授、筆者が土木研究所在勤中アーチダムの挙動解析に主成分分析の適用を提唱され、筆者にその研究を進められた土木研究所現技術管理室 中村慶一室長、資料を提供された宮崎県企業局に深甚なる謝意を表する。なお電子計算には熊大 FACOM-231 を使用した。

参考文献

- 1) Nakamura, K., Iida, R., Miike, R. : "Analysis on Behaviour of Arch Dam by Multivariate Analytical Method", VIIIth Congress on Large Dam, Edinburgh, Great Britain May 1964.
- 2) 中村慶一：“河川工学における情報量解析の応用に関する研究”，土木研究所報告，118号の1，昭和38年6月。
- 3) 岸根卓郎：“理論、応用統計学”，養賢堂，昭和41年，p. 146。
- 4) 中山伊知郎編：“現代統計学大辞典”，東洋経済新報社，1962, p. 576.
- 5) 中村慶一：“技術者のための統計解析”，山海堂，1965, p. 100~107.
- 6) Kendall, M.G. : "A Course in Multivariate Analysis" Charles Griffin 1965, p. 13~18
- 7) Anderson : "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis", Wiley 1958.
- 8) 北川敏男編：“多変量解析論、情報科学講座 A 5-3”，共立出版、昭和41年
- 9) Rocha, M., Serafin, J.L., da Silveira, A.F., Guerreiro, M.Q. : "A Method of Quantitative Interpretation of the Results Obtained in Observation of Dams", R. 36 the VIth Congress on Large Dam, New York, 1958.
- 10) 中村慶一・飯田隆一・三池亮次・古屋久和：“実測資料によるアーチダムの挙動解析—たわみの解析ー”，土木研究所報告、第121号の1、昭和39年7月。
- 11) 近藤泰夫・坂 静雄監修：“コンクリート工学ハンドブック”，朝倉書店、昭和40年10月, p. 289.
- 12) “ダム設計基準 第4章アーチダム”，1965年5月改定，日本大ダム会議, p. 5.
- 13) J. タロブル(岡本舜三・吉越盛次監修・進藤一夫訳)：“岩盤力学”，森北出版、昭和42年1月, p. 71.
- 14) 岡田 清：“コンクリートのクリープ”，コンクリートパンフレット 第29号、日本セメント技術協会、昭和28年, p. 21.
- 15) 山本三三三：“レオロジー”，新物理学進歩シリーズ8，横書店、1964年4月, p. 20.

(1967.6.2・受付)