

客観性 (Objectivity) を考慮したレオロジー 方程式について*

RHEOLOGICAL EQUATION BASED ON OBJECTIVITY

桜井 春 輔**
By Shunsuke Sakurai

要 旨 材料のマクロレオロジー的挙動を表わすために、しばしばレオロジー方程式が用いられる。Kelvin body や Maxwell body に対する方程式は、その代表的なものであろう。しかしながら、一般的に使用されている、それらの方程式は客観性 (Objectivity) を満足していないので、その応用をあやまった場合は、物理的に意味のないものとなる恐れがある。著者は Objectivity を満足した Kelvin body と Maxwell body に対するレオロジー方程式の提案を行ない、例題を用いて、Objectivity を無視した場合と、ここに提案された Objectivity を考慮した場合の差異について考察を行なった。

1. ま え が き

1950 年代になって材料の組成方程式 (Constitutive equation) の研究が非常に活発になり、多くの新しい方程式が提案されてきた。

一般に履歴を考慮した材料の組成方程式はつぎのように表わされる¹⁾。

$$F_{\alpha\beta}[x^L, L(\tau); A_{\lambda\mu}^{(1)}(\tau), \dots, A_{\lambda\mu}^{(N)}(\tau); t_{\lambda\mu}(\tau), t_{\lambda\mu}^{(1)}(\tau), \dots, t_{\lambda\mu}^{(M)}(\tau)] = 0 \quad (N \geq M) \quad (1)$$

$F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}$ を考慮すれば、式 (1) は、6 個の方程式を意味する。ここで、 x^L は displacement gradient, $A_{\lambda\mu}^{(N)}(\tau)$ は N 次の Rivlin-Ericksen tensor, $t_{\lambda\mu}$ は stress tensor, そして $t_{\lambda\mu}^{(M)}$ は M 次の rate of stress tensor を表わす。また $[\tau=0, t]$ は関数の範囲を示す。

いまもし材料が rate of stress に無関係であるとすれば、式 (1) は Green-Rivlin material に対する組成方程式となり、そのうちで、

$$t_{pq} = F_{pq}[x^k, K; A_{lm}^{(1)}, A_{lm}^{(2)}, \dots, A_{lm}^{(N)}] \quad (2)$$

と表わされるのは、Kelvin 型の材料に対するものである。特に、

$$t_{pq} = F_{pq}[x^k, K; A_{lm}^{(1)}] \quad (3)$$

を nonlinear Kelvin material という¹⁾。また displace-

ment gradient に、無関係な方程式として、Rivlin-Ericksen Eluid がある。すなわち、

$$t_{pq} = F_{pq}[A_{lm}^{(1)}, A_{lm}^{(2)}, \dots, A_{lm}^{(N)}] \quad (4)$$

この場合、もし、

$$t_{pq} = F_{pq}[A_{lm}^{(1)}] \quad (5)$$

と表わされるなら、これは Stokesian Fluid となる。

一方材料が rate of stress によって影響を受ける場合には、つぎの組成方程式が注目される。すなわち stress も strain も履歴に無関係であるとすれば、

$$F_{pq}[x^k, K; A_{lm}^{(1)}, A_{lm}^{(2)}, \dots, A_{lm}^{(N)}; t_{lm}, t_{lm}^{(1)}, \dots, t_{lm}^{(M)}] = 0 \quad (N \geq M) \quad (6)$$

このなかで、特に、

$$t_{pq} = F_{pq}[x^k, K, A_{lm}^{(1)}, t_{lm}^{(1)}] \quad (7)$$

を nonlinear Maxwell-Kelvin material と呼ぶ¹⁾。いま rate of deformation d_{lm} が、

$$d_{lm} = \frac{1}{2} A_{lm}^{(1)} \quad (8)$$

と表わされることを考慮すれば、式 (7) の特殊な場合としてつぎの方程式が得られる。

$$t_{pq} = F_{pq}[d_{lm}, t_{lm}^{(1)}] \quad (9)$$

これは Noll によって hygrosteric material と名づけられて研究されている²⁾。また式 (9) の特例として、

$$t_{pq} = F_{pq}[d_{lm}] \quad (10)$$

と表わされるものは Truesdell が Hypo-elastic material と名づけて研究している³⁾。

これらの材料が工学的にいかなる材料を表わしているかということになると、はなはだ疑問が多い。したがって工学的には、物理的意味付けの明らかな Hooke's law にしたがう spring と Newtonian Fluid を代表する dashpot を、いくつか並列または直列に組み合わせた rheological model によって得られる組成方程式を用いるのが一般的である。またこの場合の組成方程式はレオロジー方程式 (Rheological equation) と呼ばれ、一次元的な応力とひずみの関係式を表わす。このレオロジー方程式は一般的につぎのように表わされる。すなわち、

$$F(\epsilon, \epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}, \dots, \epsilon^{(N)}, \sigma, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots, \sigma^{(M)}) = 0 \quad (11)$$

ここで、 ϵ は strain, $\epsilon^{(N)}$ は N 次の rate of strain,

* 第 16 回応用力学連合講演会にて一部発表

** 正会員 Ph.D. 神戸大学助教授 工学部土木工学教室

σ は stress そして $\sigma^{(M)}$ は M 次の rate of stress を表わす。

このレオロジー方程式は線型であり、したがって比較的容易に構造物内の応力やひずみの分布を求め得る利点がある⁴⁾。この代表的 model として応力制御クリープ試験によって求められる応力-ひずみ関係を表現するのに適した Kelvin model と、ひずみ制御のリラクゼーション試験によって得られる応力-ひずみ関係を表現するのに適した Maxwell model とがある。

これらの model の定数は実験によって求められるわけであるが、その結果得られた応力-ひずみ関係式を、同じ材料からなる構造物の解析に適用する場合に、その関係式は、客観性 (Objectivity) を満足していなければならない。すなわち、実験において観測者の位置および状態に左右されず model の定数は一定でなければならない。もし応力-ひずみ関係式が客観性を満足していない場合には、解析すべき構造物の変形状態と同じ状態のもとで実験を行ない、応力-ひずみ関係式を求めなければならない。すなわち、単純曲げを受ける構造物であれば、材料を単純曲げの状態のもとで実験を行ない、その結果は、ねじれの生ずる場合には適用できないという不都合が生ずるわけである。

2. 客観性の原理¹⁾

材料の物理的性質を実験的に求める際には、観測者の運動が、その測定結果にどのように影響をおよぼしているかを知る必要がある。もしこれらの物理的性質が観測者の運動に無関係に求まるなら、ある特定の状態、いかえれば、特定の座標を考慮することによって求められた測定結果は、他のあらゆる座標に対する値を求めるに十分であるといえる。物理的な法則を公式化する場合には、その物理量は、観測者すなわち座標から独立でなければならない。そのような物理量を客観性を満足しているという。たとえば、距離や角度はいかなる座標のもとでも独立であるので客観性を満足した物理量であるといえる。

いま、一つの座標系 (この論文では説明を簡単にするために座標系はすべてカルテジアン直交座標系を用いる) において、点 x_i を考慮すれば、その同じ点はこの座標系において x_i' として表わされるとする。 x_i と x_i' との関係は、その両者において距離と角度は変化しないものとする。この場合の最も一般的な両者の変換の式は、つぎのように書き表わされる。ただしカルテジアン直交座標系においては共変テンソルと反変テンソルの区別がないので以下すべてカルテジアンテンソル記号法を用いる。

$$x_k' = a_{ki}(t)x_i + b_k(t) \dots\dots\dots(12)$$

$$a_{ki}a_{mi} = a_{ik}a_{lm} = \delta_{km} \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 a_{ki} は方向余弦を、また δ_{km} は Kronecker's delta を表わす。 $a_{ki}(t)$ と $b_k(t)$ は、それぞれ一つの座標系から他の座標系への回転と平行移動を表わす。方向余弦は時間だけの関数であるから、式 (13) を時間で微分すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{ki}}{dt} a_{mi} &= -a_{ki} \frac{da_{mi}}{dt} \\ \frac{da_{ik}}{dt} a_{lm} &= -a_{ik} \frac{da_{lm}}{dt} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

となる。

なお、この論文において時間での微分はすべて material time derivative を表わす。

式 (12) からつぎのことが明らかになる。すなわち二つの運動 $x_k(X, t)$ と $x_k'(X, t)$ の間に、

$$x_k'(X, t) = a_{ki}(t)x_i(X, t) + b_k(t) \dots\dots\dots(15)$$

なる関係が成立する時この二つの運動は客観的に等価であるといえる。ここに X は Lagrangian coordinates を表わす。この二つの等価な運動は、座標系に関してのみ異なって見えるのである。

一般的には、テンソルとして表わされる量は客観性を満足しているといえる。たとえば二つの運動において、ベクトル V と二次のテンソル \tilde{S} がそれぞれ、

$$v_k'(X, t) = a_{ki}(t)v_i(X, t) \dots\dots\dots(16)$$

$$S_{ki}'(X, t) = a_{km}(t)a_{in}(t)S_{mn}(X, t) \dots\dots\dots(17)$$

によって関係づけられている場合、 V と \tilde{S} はそれぞれ客観性を満足している。

いま、式 (15) において a_{ki} と b_k が時間に関係なく一定であると仮定すれば、式 (15) の両辺を時間で微分して求まる速度ベクトルは、式 (16) のように表わされたがって客観性を満足することになる。しかし一般的には a_{ki} と b_k は時間の関数となるので、式 (15) の両辺を時間で微分して、

$$v_k' = a_{ki}v_i + \frac{da_{ki}}{dt}x_i + \frac{db_k}{dt} \dots\dots\dots(18)$$

となる。式 (18) より明らかのように速度ベクトルは客観性を満足しない。同様に式 (17) の両辺を時間で微分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dS_{ki}'}{dt} &= a_{km}a_{in} \frac{dS_{mn}}{dt} + \frac{da_{km}}{dt} a_{in} S_{mn} \\ &+ a_{km} \frac{da_{in}}{dt} S_{mn} \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

となり、テンソルを時間で微分した場合、もはやそれは客観性を満足しないのである。しかし方向余弦が時間に関係なく一定な場合には、式 (17) と式 (19) を比較することにより明らかのように、テンソルを時間で微分したのもまたテンソルであり、したがって客観性を満足していることになる。

3. 客観性を無視したレオロジー方程式

式 (1)~(10) に示した組成方程式においては、客観性

を満足するように定義されている。しかし式 (11) のレオロジー方程式においては客観性を考慮していないのが普通である。また前者は, anisotropic material に対しても用いられ得ることを示しているが, 後者は一次元応力状態に対する方程式である。しかし, もし材料を等質等方性と仮定し, その体積変化は応力テンソルの等方成分によってのみ左右され, また材料の変形は応力テンソルの偏差成分のみの関数であるとすれば, 式 (11) で示されるレオロジー方程式は, 三次元応力状態のものでつぎのように表わされる⁴⁾。

$$PS_{ij} = Qe_{ij} \dots\dots\dots(20)$$

$$P'\sigma_{ii} = Q'\epsilon_{ii} \dots\dots\dots(21)$$

ここに, σ_{ij} と ϵ_{ij} は応力およびひずみテンソルの成分を表わし, また S_{ij} と e_{ij} は, それぞれ偏差応力と偏差ひずみを表わし, それらはつぎのように定義される。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \dots\dots\dots(22)$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \dots\dots\dots(23)$$

P, Q, P' そして Q' は時間に関する線型オペレーターでありつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^p a_n \frac{d^n}{dt^n}, \quad Q = \sum_{n=0}^q b_n \frac{d^n}{dt^n} \\ P' &= \sum_{n=0}^{p'} c_n \frac{d^n}{dt^n}, \quad Q' = \sum_{n=0}^{q'} d_n \frac{d^n}{dt^n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ここに, a_n, b_n, c_n そして d_n は材料の粘弾性的性質を表わす定数である。

式 (20) および式 (21) の形で無限に考えられるレオロジー方程式の中で, 特に工学的にはつぎの二つの方程式が注目されている。すなわち Kelvin model と Maxwell model に対する方程式で, それぞれはつぎのように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= 2G e_{ij} + 2\eta \frac{de_{ij}}{dt} \\ \sigma_{ii} &= 3K \epsilon_{ii} \end{aligned} \right\} \text{(Kelvin model)} \dots\dots\dots(25)$$

$$\left. \begin{aligned} 2G \frac{de_{ij}}{dt} &= \frac{dS_{ij}}{dt} + \frac{G}{\eta} S_{ij} \\ \sigma_{ii} &= 3K \epsilon_{ii} \end{aligned} \right\} \text{(Maxwell model)} \dots\dots\dots(26)$$

ここに, G, η そして K は材料によって定まる定数である。なお, 体積変化は弾性的であると仮定している。したがって K は bulk modulus を表わす。

式 (25) および式 (26) には, それぞれ偏差ひずみを時間で微分した項, および偏差応力を時間で微分した項を含んでいる。応力テンソルとひずみテンソルは客観性を満足しているが, それらを時間で微分した項は, さきにも述べたように一般には客観性を満足しないので, それらを含んでいる Kelvin model と Maxwell model に対する式 (25) および式 (26) のレオロジー方程式は明らかに客観性を満足していない。したがって, これら

の方程式は材料の物理的性質を表現するのに適当でないといえる。

4. 変形速度と応力フラックス

変形速度 (Rate of deformation) はつぎのように定義される。

$$d_{kl}' \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k'}{\partial x_l'} + \frac{\partial v_l'}{\partial x_k'} \right) \dots\dots\dots(27)$$

このように定義された変形速度が客観性を満足することは, つぎの証明によって明らかである。いま Eulerian coordinates を \mathbf{x} として表わすとすれば, 二つの運動において, それぞれの速度 v_k' と v_k は,

$$v_k' = v_k'(\mathbf{x}', t), \quad v_k = v_k(\mathbf{x}, t) \dots\dots\dots(28)$$

として書き表わされるので, 式 (18) を考慮すれば,

$$\frac{\partial v_k'}{\partial x_l'} = a_{km} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_l'} + \frac{d a_{km}}{dt} \frac{\partial x_m}{\partial x_l'} \dots\dots\dots(29)$$

式 (12) において両辺に a_{km} を乗じて, さらに式 (13) を考慮すれば,

$$x_m = a_{km}(x_k' - b_k) \dots\dots\dots(30)$$

したがって,

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_l'} = a_{ln} \dots\dots\dots(31)$$

式 (31) を式 (29) に代入すれば,

$$\frac{\partial v_k'}{\partial x_l'} = a_{km} a_{ln} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} + \frac{d a_{km}}{dt} a_{lm} \dots\dots\dots(32)$$

式 (32) を式 (27) に代入し, 式 (14) に示す関係を用いれば, 変形速度はつぎのように表わされる。

$$d_{kl}' = a_{km} a_{ln} d_{mn} \dots\dots\dots(33)$$

式 (33) より明らかなように d_{mn} は二次のテンソルであり, したがって客観性を満足している。

一方渦動度 (Vorticity) は次のように定義される。

$$\omega_{kl}' \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k'}{\partial x_l'} - \frac{\partial v_l'}{\partial x_k'} \right) \dots\dots\dots(34)$$

いま式 (32) を式 (34) に代入し, 式 (14) の関係を考慮すれば, 渦動度はつぎのように表わされる。

$$\omega_{kl}' = a_{km} a_{ln} \omega_{mn} + \frac{d a_{km}}{dt} a_{lm} \dots\dots\dots(35)$$

したがって渦動度が客観性を満足しないことは明らかである。

さて, 先にも述べたように偏差応力を時間で微分した偏差応力速度 dS_{ij}/dt は客観性を満足しないので, つぎに客観性を満足する偏差応力フラックス \hat{S}_{ij} を定義する。

客観性の原理によれば, 偏差応力フラックスは二つの等価な運動においては, つぎのように変換されなければならない。すなわち,

$$\hat{S}_{kl}' = a_{km} a_{ln} \hat{S}_{mn} \dots\dots\dots(36)$$

一方偏差応力 S_{ij} は客観性を満足しているのでつぎの式が成立する。

$$S_{kl}' = a_{km} a_{ln} S_{mn} \dots\dots\dots(37)$$

式 (37) の両辺を時間で微分すれば,

$$\frac{dS'_{kl}}{dt} = a_{km}a_{ln} \frac{dS_{mn}}{dt} + \frac{da_{km}}{dt} a_{ln} S_{mn} + a_{km} \frac{da_{ln}}{dt} S_{mn} \dots\dots\dots(38)$$

いま式 (35) の両辺に a_{lr} を乗ずることによって得られる

$$da_{kl}/dt = a_{ml}\omega_{km}' - a_{km}\omega_{ml} \dots\dots\dots(39)$$

の関係を考慮すれば, 式 (38) はつぎのように書き表わされる。

$$\frac{dS_{kl}'}{dt} + S_{km}'\omega_{ml}' - S_{ml}'\omega_{km}' = \left(\frac{dS_{mn}}{dt} + S_{mr}\omega_{rn} - S_{rn}\omega_{mr} \right) \times a_{km}a_{ln} \dots\dots\dots(40)$$

したがって偏差応力フラックスを,

$$\hat{S}_{kl} \equiv \frac{dS_{kl}}{dt} + S_{km}\omega_{ml} - S_{ml}\omega_{km} \dots\dots\dots(41)$$

と定義すれば, これは明らかに式 (36) を満足している。すなわち客観性を満足していることになる。これは一般には, 2次のテンソルの時間での微分を表わし Zaremba によって最初に導かれたものであるが, Jaumann's stress rate と呼ばれる⁵⁾。しかし式 (41) に示す応力フラックスは, 客観性を満足する唯一のものではなく他の型の応力フラックスも求めることができるであろう¹⁾。

5. Kelvin model と Maxwell model に対する客観性を考慮したレオロジー方程式

式 (25) および式 (26) に示す Kelvin model と Maxwell model に対するレオロジー方程式は, 工学的に, しばしば用いられるものであるが, 先に述べたように客観性を無視している。したがって著者はここに, これらの式のかわりに客観性を満足するレオロジー方程式を提案する。ここに用いられる手続きは, 式 (1)~(10) に示された組成方程式において客観性を満足させるためにとられる手続きと同じである。

すなわち式 (25) および式 (26) に含まれている偏差ひずみを時間で微分した項, および偏差応力を時間で微分した項を, それぞれ偏差変形速度と偏差応力フラックスで置き換えて求めるのである。したがって求めるレオロジー方程式は, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= 2G\epsilon_{ij} + 2\eta d_{ij}^* \\ \sigma_{ii} &= 3K\epsilon_{ii} \end{aligned} \right\} \text{(Kelvin model)} \dots\dots\dots(42)$$

$$\left. \begin{aligned} 2Gd_{ij}^* &= \hat{S}_{ij} + \frac{G}{\eta} S_{ij} \\ \sigma_{ii} &= 3K\epsilon_{ii} \end{aligned} \right\} \text{(Maxwell model)} \dots\dots\dots(43)$$

と書き表わされる。ここに d_{ij}^* は偏差変形速度を表わしつぎのように定義される。

$$d_{ij}^* = d_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d_{kk} \dots\dots\dots(44)$$

テンソルの和もまたテンソルであることを考慮すれば, 式 (42) および式 (43) は客観性を満足したレオロジー方程式である。

なお式 (43) を式 (9) と比較することによって, ここで得られた Maxwell model に対する客観性を考慮したレオロジー方程式における, 偏差応力と偏差変形速度との関係は Noll の提案する hygrosteric material の組成方程式と同形であることが明らかとなる。すなわち, ここで提案する Maxwell model によって表わされる材料は hygrosteric material の一種と考えられる。

変形速度は, 先にも述べたように,

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots(45)$$

として定義される。ここに x_i は Eulerian coordinates を表わす。一方, ひずみを時間で微分すれば,

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right) \dots\dots\dots(46)$$

として表わされる。ここに X_i は Lagrangian coordinates を示す。さて, 式 (45) と式 (46) より明らかなように, x_i と X_i の差が非常に小さい場合, いい換えれば変位が微小な場合には, 変形速度と, ひずみを時間で微分したひずみ速度との差は無視できる。したがって微小変位の場合には, 式 (42) に示す Kelvin model に対するレオロジー方程式のかわりに, 式 (25) に示すレオロジー方程式を用いても客観性は近似的に満足されていることになる。もちろん変位の大きい場合, Kelvin model に対しては式 (42) を用いなければならない。

6. 例 題

式 (42) と式 (43) において提案された客観性を満足するレオロジー方程式と, 式 (25) および式 (26) に示される客観性を無視した工学的なレオロジー方程式の差異を検討するために以下に具体的な例題を示す。

(1) 非圧縮性の Kelvin body が単純引張りを受ける場合のクリープ

この場合のレオロジー方程式は式 (42) より,

$$d_{ij} + \frac{G}{\eta} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2\eta} S_{ij} \dots\dots\dots(47)$$

となる。いま, 変位は大きいと仮定すれば, 式 (47) に含まれているひずみ ϵ_{ij} としてつぎの式によって定義される Eulerian finite strain を用いなければならない。すなわち,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

式 (48) において u_i は変位を表わし,

$$u_i = x_i - X_i \dots\dots\dots(49)$$

として定義される。ここに, X_i は Lagrangian coordinates を表わす。

物体が単純引張りによってクリープを生ずる場合の偏

差応力成分は、

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}P & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}P & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}P \end{bmatrix}, (P > 0) \dots\dots(50)$$

として表わされる。ここに、 P は単軸引張り応力を表わし、この場合は定数である。いま、荷重方向の変位が時間とともに、どのように増加するかを調べる。式(47)のレオロジー方程式は荷重方向に対して、

$$d_{11} + \frac{G}{\eta} \epsilon_{11} = \frac{P}{3\eta} \dots\dots(51)$$

と表わされる。いま、荷重方向に直角な方向の変位は、荷重方向に一定であると仮定して、式(45)と式(48)を式(51)に代入すれば、

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{G}{\eta} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\} = \frac{P}{3\eta} \dots\dots(52)$$

いま、つぎの関係、すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{d(X_i + u_i)}{dt} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dots\dots(53) \end{aligned}$$

を考慮すれば、式(52)は、つぎのように書き表わされる。

$$\frac{dE_1}{dt} + \frac{G}{\eta} \left(E_1 - \frac{1}{2} E_1^2 \right) = \frac{P}{3\eta} \dots\dots(54)$$

ここに、 E_1 は $E_1 = \partial u_i / \partial x_i$ と定義される displacement gradient を表わす。式(54)を解くことによって E_1 を時間の関数として求めることができる。ただし、微小変位の場合には、 E_1^2 が E_1 に比較して、非常に小さく無視でき、また Lagrangian coordinates と Eulerian coordinates とは近似的に等しいと見なされる。したがって式(54)は線型微分方程式となり、その解は客観性を無視した工学的なレオロジー方程式(式(25))において微小変位を仮定して求めた解と等しくなるのは当然である。

いま初期条件として、

$$E_1 = 0, \text{ at } t = 0 \dots\dots(55)$$

を仮定すれば、式(54)の一般解はつぎのように表わされる。

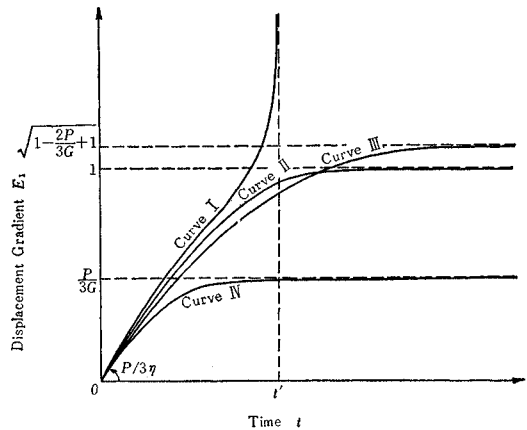
① $2P > 3G$ のとき、

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{\frac{2P}{3G}} - 1 \\ &\times \tan \left(\frac{G}{2\eta} \sqrt{\frac{2P}{3G}} - 1 t - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{2P}{3G}} - 1} \right) + 1 \end{aligned} \dots\dots(56)$$

② $2P = 3G$ のとき、

$$E_1 = -\frac{2\eta}{Gt + 2\eta} + 1 \dots\dots(57)$$

図-1 Kelvin body の単純引張りにおけるひずみ



③ $2P < 3G$ のとき、

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 - \frac{2P}{3G}} \\ &\times \coth \left(-\frac{G}{2\eta} \sqrt{1 - \frac{2P}{3G}} t - \coth^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2P}{3G}}} \right) + 1 \end{aligned} \dots\dots(58)$$

これらを図示すれば 図-1 のようになる。式(56)、式(57)および式(58)は図中において、それぞれ Curve I, Curve II そして Curve III として表わされている。

また E_1^2 を無視した場合の解は、

$$E_1 = \frac{P}{3G} (1 - e^{-(G/\eta)t}) \dots\dots(59)$$

となる。これは Curve IV として図に示す。

図より明らかなように、これらの曲線は時間とともに次第にその差が表われ、特に $2P > 3G$ の場合には、時間、

$$t' = \frac{1}{\frac{G}{2\eta} \sqrt{\frac{2P}{3G}} - 1} \left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{2P}{3G}} - 1} \right) \dots\dots(60)$$

において、 E_1 の値は無限大となる。すなわち、単軸引張り力 P が $(3/2)G$ より大きくなると材料は降伏すると考えられる。一方 $2P \leq 3G$ の場合には、 E_1 は時間とともに $\sqrt{1 - \frac{2P}{3G}} + 1$ に接近し、また微小変位を仮定した客観性を無視したレオロジー方程式から得られた Curve IV は時間とともに $P/3G$ に収斂する。いま、 $P/3G < 1/2$ の関係を考慮すれば、客観性を考慮したレオロジー方程式より得られた Curve II または Curve III は、その最終値において Curve IV の2倍以上大きく表われることになる。

(2) Maxwell body が単純せん断を受ける場合のリラクゼーション

カルテジアン直交座標系 x_i において、それぞれの方向の速度成分をつぎのように仮定する。

$$v_1 = \lambda x_2, v_2 = v_3 = 0, (\lambda: \text{定数}) \dots\dots(61)$$

この場合の変形速度成分は,

$$d = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(62)$$

となる。一方渦動度は,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(63)$$

と表わされる。式(41)に定義された偏差応力フラックスの各成分は、式 (63) を考慮すれば、つぎのように表わされる。ただし、応力テンソルが対称のため偏差応力フラックスもまた対称性を示す。

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_{11} &= dS_{11}/dt - \lambda S_{12} \\ \hat{S}_{12} &= dS_{12}/dt + \lambda S_{11}/2 - \lambda S_{22}/2 \\ \hat{S}_{13} &= dS_{13}/dt - \lambda S_{23}/2 \\ \hat{S}_{22} &= dS_{22}/dt + \lambda S_{12} \\ \hat{S}_{23} &= dS_{23}/dt + \lambda S_{13}/2 \\ \hat{S}_{33} &= dS_{33}/dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64)$$

式 (62) と式 (64) を、客観性を考慮した Maxwell model に対するレオロジー方程式 (43) に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} dS_{11}/dt - \lambda S_{12} + GS_{11}/\eta &= 0 \\ dS_{12}/dt + \lambda S_{11}/2 - \lambda S_{22}/2 + GS_{12}/\eta &= G\lambda \\ dS_{13}/dt - \lambda S_{23}/2 + GS_{13}/\eta &= 0 \\ dS_{22}/dt + \lambda S_{12} + GS_{22}/\eta &= 0 \\ dS_{23}/dt + \lambda S_{13}/2 + GS_{23}/\eta &= 0 \\ dS_{33}/dt + GS_{33}/\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

式 (65) は連立微分方程式であり、これを解くことにより、応力分布を求めることができる。例として垂直応力 S_{11} とせん断応力 S_{12} を求める。

式 (65) の第 1 番および第 4 番目の式から、

$$\left. \begin{aligned} dS_{11}/dt + GS_{11}/\eta &= -dS_{22}/dt - GS_{22}/\eta \\ &= \lambda S_{12} = F(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(66)$$

なる関係式を得る。ここに $F(t)$ は時間の関数である。したがって式 (66) は、

$$\left. \begin{aligned} dS_{11}/dt + GS_{11}/\eta &= F(t) \\ dS_{22}/dt + GS_{22}/\eta &= -F(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(67)$$

と書き表わされる。いま、初期条件として $S_{11} = S_{22} = 0$ を考慮すれば、式 (67) より、

$$S_{11} = -S_{22} \dots\dots\dots(68)$$

の関係を得る。

式 (65) の第 1 番および第 2 番目の式より S_{12} を消去して、式 (68) の関係を考慮すれば、つぎの方程式を得る。

$$\frac{d^2 S_{11}}{dt^2} + \frac{2G}{\eta} \frac{dS_{11}}{dt} + \left(\lambda^2 + \frac{G^2}{\eta^2} \right) S_{11} = G\lambda^2 \dots\dots\dots(69)$$

式 (69) の一般解は、

$$S_{11} = e^{-(G/\eta)t} (C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t) + G \left/ \left\{ 1 + \left(\frac{G}{\lambda\eta} \right)^2 \right\} \right. \dots\dots\dots(70)$$

として表わされる。ここに、 C_1 および C_2 は積分定数である。いま、初期条件として $S_{11} = dS_{11}/dt = 0$ を仮定すれば、結局式 (69) の解はつぎのように表わされる。

$$S_{11} = -e^{-(G/\eta)t} \times \left\{ \frac{G}{1 + \left(\frac{G}{\lambda\eta} \right)^2} \cos \lambda t + \frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2} \sin \lambda t \right\} + \frac{G}{1 + \left(\frac{G}{\lambda\eta} \right)^2} \dots\dots\dots(71)$$

ここで興味のあることは、単純せん断においても式 (71) に示すような垂直応力 S_{11} が存在することである。これは有限変位の理論と一致し客観性を無視したレオロジー方程式を用いた場合には存在しない応力である。Truesdell も彼の Hypo-elasticity において同様の結果を得ている⁹⁾。

つぎに、せん断応力 S_{12} は、式 (71) を式 (65) の第 1 番目の式に代入してつぎのように得られる。

$$S_{12} = e^{-(G/\eta)t} \times \left\{ -\frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2} \cos \lambda t + \frac{G}{1 + \left(\frac{G}{\lambda\eta} \right)^2} \sin \lambda t \right\} + \frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2} \dots\dots\dots(72)$$

この場合、垂直応力 S_{11} の初期条件を与えることによりせん断応力 S_{12} の初期条件は自動的に決定される。この場合の S_{12} の初期条件は式 (72) より、

$$S_{12} = 0, \quad \frac{dS_{12}}{dt} = \frac{\lambda G + \frac{G^3}{\lambda\eta^2}}{1 + \left(\frac{G}{\lambda\eta} \right)^2} \dots\dots\dots(73)$$

となっている。このことは、また、 S_{12} に対する初期条件を与えるなら S_{11} に対する初期条件は自動的に定まるということの意味している。

いま、式 (70) を式 (65) の第 1 番目の式に代入すれば、

$$S_{12} = e^{-(G/\eta)t} \{ C_3 \cos \lambda t + C_4 \sin \lambda t \} + \lambda\eta \left/ \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2 \right\} \right. \dots\dots\dots(74)$$

となる。ここで、 C_3 および C_4 は定数である。初期条件として $S_{12} = dS_{12}/dt = 0$ を仮定すれば、これらの定数が決定され、せん断応力 S_{12} はつぎのように求まる。

$$S_{12} = e^{-(G/\eta)t} \times \left\{ -\frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2} \cos \lambda t - \frac{G}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2} \sin \lambda t \right\} + \frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G} \right)^2} \dots\dots\dots(75)$$

いま、もし客観性を無視したレオロジー方程式 (26) を用いるとすれば、この場合のせん断応力 S_{12} はつぎの微分方程式の解として求まる。すなわち、

$$dS_{12}/dt + GS_{12}/\eta = G\lambda \dots\dots\dots(76)$$

初期条件として $S_{12}=0$ を仮定すれば、式 (76) の解は、

$$S_{12} = \lambda\eta(1 - e^{-(G/\eta)t}) \dots\dots\dots(77)$$

となる。この場合の初期応力速度は、

$$dS_{12}/dt = \lambda G$$

となっている。

いま、客観性を考慮したレオロジー方程式より導かれた式 (74) に示すせん断応力 S_{12} と式 (77) の客観性を無視した場合の応力とを比較するために、式 (77) の場合と同じ初期条件、すなわち、

$$S_{12}=0, \quad dS_{12}/dt = \lambda G$$

を用いて式 (74) の定数を決定すれば、その結果は、

$$S_{12} = e^{-(G/\eta)t} \times \left[-\frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G}\right)^2} \cos \lambda t + \left\{ G - \frac{G}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G}\right)^2} \right\} \sin \lambda t \right] + \frac{\lambda\eta}{1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G}\right)^2} \dots\dots\dots(78)$$

となる。

以上において求めた結果、すなわち式 (72), (75), (77) および式 (78) の差異を明確にするため図示したのが図-2 である。ただし材料の物理的性質を表わす定数、 G および η は、岩塩の三軸圧縮応力状態でのクリープ試験によって求められた値⁷⁾ の概略値、すなわち、

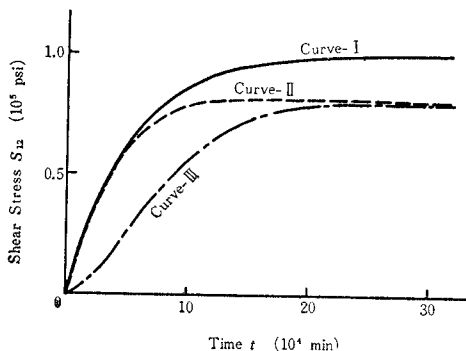
$$G = 0.2 \times 10^8 \text{ psi}, \quad \eta = 1.0 \times 10^{10} \text{ psi-min}$$

を用い、また λ としては、

$$\lambda = 10 \times 10^{-6} \text{ 1/min}$$

を仮定した。この例題においては、式 (72) より求めた結果と式 (78) のそれとは偶然に一致しているが、一般には異なった曲線を示す。図の Curve I は客観性を無視したレオロジー方程式から得られた式 (77) を用いて数値計算を行なった結果である。また Curve II は、式 (78) より求めた結果である。Curve I の初期条件と Curve II のそれとは等しい。すなわち、

図-2 Maxwell body の単純せん断におけるせん断応力



$$S_{12}=0, \quad dS_{12}/dt = 2 \text{ psi/min}$$

したがって、この例題の運動の初期において両者が一致するのは当然である。しかし時間の経過とともに、両者の差があらわれる。図において Curve III は式 (75) を用いた場合、すなわち初期条件として $S_{12} = dS_{12}/dt = 0$ を与えた場合の解である。

これらの結果から明らかなように、客観性を考慮したレオロジー方程式を用いる場合、せん断応力 S_{12} は、その初期条件として S_{12} と dS_{12}/dt を与えなければ一義的に定まらず、 S_{12} の初期条件のみによってせん断応力の決定される客観性を無視した場合と異なる。しかし前者は初期条件には無関係に、時間の経過につれて、 $\lambda\eta \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda\eta}{G}\right)^2 \right\}$ に収斂し、後者は $\lambda\eta$ に近づく。したがって、もし $(\lambda\eta/G)^2$ が 1 に比較して非常に小さい場合最終応力としては、客観性を満足したレオロジー方程式を用いても、客観性を無視した場合と近似的に等しくなる。

7. 結 論

(1) Kelvin body に対して、もし変位の大きい場合には、変形速度 (Rate of deformation) と有限ひずみ (Eulerian finite strain) が、ひずみ速度とひずみにかわって考慮されるべきである。

(2) Kelvin body に対して、もし変位の微小な場合には、客観性を無視したレオロジー方程式を用いても、一般には、近似的に正しい結果を与えるといえる。しかし、単純引張において、客観性を無視したレオロジー方程式によって得られる displacement gradient の最終値は有限変位の仮定にもとづく客観性を考慮したレオロジー方程式による値の 1/2 以下にすぎない。したがって単純引張における displacement gradient の最終値を問題とするかぎり客観性を考慮したレオロジー方程式によるべきである。

(3) Kelvin body の単純引張りにおいて引張り応力 P が $3G/2$ より大きくなると材料は降伏すると考えられる。

(4) Maxwell body に対しては、応力フラックスが応力速度にかわって考慮されるべきであり、また変形速度がひずみ速度のかわりに用いられるべきである。この場合は、Kelvin body のように微小変位の仮定のもとで客観性を無視したレオロジー方程式が近似的に正しい結果を与えるという保証はない。

(5) 例題から明らかなように Maxwell body に対して、単純せん断を生ぜしめるためには、垂直応力を作らせなければならない。

(6) Maxwell body の単純せん断において、一義的に応力を決定するためには、初期条件として応力のほかに応力速度を与えなければならない。これは客観性を無

視したレオロジー方程式を用いた場合と異なる。

この研究において常に有益な助言を与えて下さった神戸大学土木工学教室の笹助教授に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Eringen, A.C. : "Nonlinear Theory of Continuous Media", McGraw-Hill book Co., New York, 1962
- 2) Noll, W. : "On the Continuity of the Solid and Fluid States", J. Rational Mech. and Analysis, Vol. 4, 1955, pp. 3-81
- 3) Truesdell, C. : "Hypo-elasticity", J. Rational Mech. & Analysis, Vol. 4, 1955, pp. 83-133, and pp. 1019-1020.
- 4) Lee, E.H. : "Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies", Quart. Appl. Math., Vol. 13, 1955, pp. 183-190
- 5) Malvern, L.E. : "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Dept. of Applied Mechanics, Michigan State University, East Lansing, Michigan, 1962
- 6) Truesdell, C. : "Hypo-Elastic Shear", J. Appl. Phys. Vol. 27, No. 5, 1956, pp. 441-447
- 7) Sakurai, S. : "Time-dependent Behavior of Circular Cylindrical Cavity in Continuous Medium of Brittle Aggregate", Ph.D. dissertation submitted to Michigan State University, 1966
- 8) Truesdell, C. : "The Simplest Rate Theory of Pure Elasticity", Comm. Pure & Appl. Math., Vol. 8, 1955, pp. 123-132
- 9) Cotter, B.A. and Rivlin, R.S. : "Tensors Associated with Time-dependent Stress", Quart. Appl. Math., Vol. 13, 1955, pp. 177-182
- 10) Naghdi, P.M. and Wainwright, W.L. : "On the Time Derivative of Tensors in Mechanics of Continua", Quart. Appl. Math. Vol. 19, 1961, pp. 95-109
- 11) Green, A.E. : "Simple Extension of a Hypo-elastic Body of Grade Zero", J. Rational Mech. & Analysis, Vol. 5, No. 4, 1956, pp. 637-642
- 12) 森 芳郎 : "レオロジー", 応用力学講座 13, 共立出版 1960

(1966.10. 7・受付)