

# 剛なダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉 長方形箱桁の曲げねじりについて\*

## ON TORSION BENDING OF THIN WALLED RECTANGULAR BEAMS WITH EQUI-DISTANT RIGID DIAPHRAGMS

能 町 純 雄\*\*  
By Sumio G Nomachi

### 1. 緒 言

開断面と閉断面を問わず補剛ダイヤフラムがなければ薄肉断面部材は特にねじれをうける場合、断面が変形することが折板構造理論などによる研究で明らかにされている<sup>1),2),3),14)</sup>。また補剛ダイヤフラムを1個とりつけた薄肉断面部材についてその補剛効果の著しいことも研究されている<sup>1),9)</sup>。

しかし一般には薄肉断面部材は変形後も断面形は変形前の形を保持するという仮定の上立つ曲げ理論と曲げねじり理論によっていわゆる立体的に解析されている。この場合曲げねじりによるそり応力の計算が必要になるが、これについてはそり応力がねじれ角の二次微係数に比例するとする Wagner<sup>5)</sup> 以来の考え方で、ねじれ角の二次微係数とは別個なスパン方向の関数に比例するとする Benscoter<sup>9)</sup> らの理論がある。いずれの理論においても断面におけるそり応力の分布は単純ねじれの場合の Saint Venant あるいは Bredt のそり分布を用いてせん断中心によって議論を進めているが部材の変形前後を通じて断面の形の保存されることを仮定している。これは無限に剛なダイヤフラムが連続的に取り付けられていることになる。しかし実際ではダイヤフラムの数は有限でたとえその剛度が無限であっても断面形は部分的にしか保持されない。ではダイヤフラムの個数と断面形保持の関係はどのようになるか？ これは興味ある問題である。この解に対する一つのアプローチとして無限に剛なダイヤフラム（横壁）で  $n$  等分される断面頂点はヒンジ結合された二軸対称薄肉長方形断面の箱桁が上部両側で偶力をうける場合を考える。これは一種の折板構造で三せん断力公式を始め種々の解法があるが、折板の断面力に注目して折板接合部の適合をとる方法と折板の変形から出発して断面力を誘導する形式とに大別できる。いずれも折板軸の両端を単純支持としてフーリエ変換された折板の各量についてつりあいや適合を論じていくものが多い。また Böttger は折板のたわみのせん断の項を無視して一端固定他端支持や二連続の折板構造、またこれにプレストレスを導入した場合、さらに Wlassow の方法に準

拠した剛結折板の節点曲げモーメントについての実用公式を与えている<sup>10)</sup>。しかしこれらの方法で多数のダイヤフラムで区画される折板構造物を解くには、 $n$  個の余力の決定のほか断面についてのフーリエ級数の収れんとりわけ解析の結果を得て理論的考察を行なうことがむずかしいので、ここでは折板要素の軸方向変位が直線性を保つという仮定から出発した変形公式を用いてダイヤフラム節点におけるそり応力の定差分方程式を誘導し、議論を進めることにする。この変形公式は DeFrie-Skene と Scordelis が単純支持折板構造の行列表示のために別途に誘導した基礎公式と同様なものとなっている<sup>11),12)</sup>。

### 2. 細長い長方形板における変位せん断方程式<sup>7)</sup>

構成された断面の壁部材  $AB$  を取り出し 図-1 のように深さの方向を  $s$ 、軸長方向を  $x$ 、それぞれの方向の変位を  $w, u$  とする。 $s, x$  方向の法線断面を  $p_s, p_x$ 、せん断流を  $q$  とするとつりあいの方程式は、

$$\frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

また、

$$p_x = Et_1 \dot{u} \dots\dots\dots(3)$$

$$q = Gt_1 \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \dot{w} \right) \dots\dots\dots(4)$$

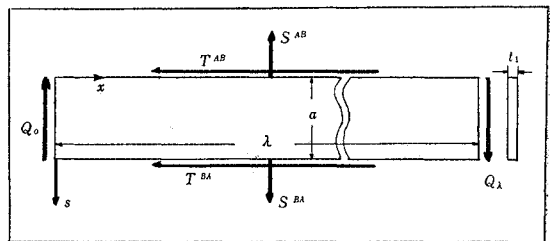
ここに、

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$u$  については平面保持を仮定して

$$u = u^A \left( 1 - \frac{s}{a} \right) + u^B \frac{s}{a} \dots\dots\dots(5)$$

図-1 折板要素  $AB$  について



\* 土木学会第 21 回年次学術講演会にて一部発表  
\*\* 正会員 工博 室蘭工業大学教授 土木工学科

したがって式 (2), (3), (5) より

$$q = T^{AB} - E\ddot{u}At_1 \left( s - \frac{s^2}{2a} \right) - E\ddot{u}^B t_1 \frac{s^2}{2a} \dots\dots (6)$$

また  $s=a$  で  $q = -T^{BA}$  であるから

$$T^{AB} + T^{BA} = \frac{Eat_1}{2} (\ddot{u}^A + \ddot{u}^B) \dots\dots (7)$$

この場合  $T^{AB}$ ,  $T^{BA}$  は図-1の向きを正とする。また式 (6) を式 (1) に代入して  $s$  で 0 から  $a$  まで積分すれば、

$$\dot{T}^{AB} = \frac{Eat_1}{6} (2\ddot{u}^A + \ddot{u}^B) + \frac{S^{AB} - S^{BA}}{a} \dots\dots (8)$$

上式を  $x$  で積分すると、

$$T^{AB} = \frac{Eat_1}{6} (2\dot{u}^A + \dot{u}^B) + \frac{\bar{S}^{AB} - \bar{S}^{BA}}{a} + C^{AB} \dots\dots (9)$$

$C^{AB}$  は  $x$  について定数である。上式と式 (7) から

$$T^{BA} = \frac{Eat_1}{6} (2\dot{u}^B + \dot{u}^A) + \frac{\bar{S}^{BA} - \bar{S}^{AB}}{a} - C^{AB} \dots\dots (10)$$

上式中  $\bar{S}^{AB} = \int S^{AB} dx$  を示す。この式 (9), (10) はラーメン構造におけるたわみ角公式のようなものであり変位せん断公式と名づけることにする。

両端における深さ方向のせん断力は

$$(Q)_{x=0} = \int_0^a q_{x=0} ds = \bar{S}_0^{AB} - \bar{S}_0^{BA} + aC^{AB} \dots\dots (11)$$

$$(Q)_{x=t} = \int_0^a q_{x=t} ds = \bar{S}_t^{AB} - \bar{S}_t^{BA} + aC^{AB} \dots\dots (12)$$

変位  $w$  は  $s$  の関数となるが、簡単のため式 (4) に (5) を代入して、その平均値をとることにする。

$$Gt_1 \dot{w}^{AB} = \frac{Gt_1}{a} \int_0^a \dot{w} ds = \frac{1}{a} \int_0^a q ds + \frac{Gt_1}{a} (u^A - u^B) \\ \therefore Gt_1 \dot{w}^{AB} = \frac{Gt_1}{a} (u^A - u^B) + \frac{\bar{S}^{AB} - \bar{S}^{BA}}{a} + C^{AB} \dots\dots (13)$$

### 3. 2 軸対称断面における基本的考察

図-3 のような断面と荷重状態では回転の中心は図心と一致し各頂点の軸方向変位はつぎのようになることがただちに知れる。

$$u = u^A = u^C = -u^B = -u^D$$

図-2  $r-1, r$  区間と  $r, r+1$  区間と節点  $r$  のつりあい

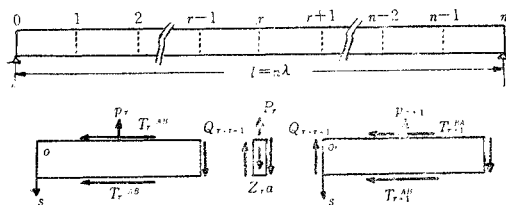
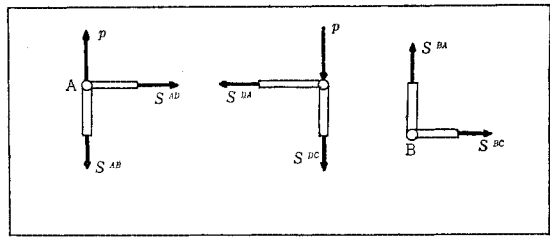


図-4 頂点のつりあい



またせん断流は

$$T^{AB} = T^{CD}, T^{CB} = T^{AD}$$

さらに各頂点の力のつりあいから  $\bar{S}$  は図-4 のようになり、ただちに求められる。すなわち

$$S^{AD} = 0, S^{AB} = p, S^{BC} = 0, S^{CD} = 0$$

以上の結果を用いて部材  $AB, AD$  における変位せん断方程式は、

$$T^{AB} = \frac{Eat_1}{6} \ddot{u} + \frac{\bar{p}}{a} + C^{AB} \dots\dots (14)$$

$$T^{AD} = \frac{Ebt_2}{6} \ddot{u} + C^{AD} \dots\dots (15)$$

頂点Aにおけるせん断流の相等から、 $T^{AB} + T^{AD} = 0$  となる。すなわち

$$K\ddot{u} + \frac{\bar{p}}{a} + C^{AB} + C^{AD} = 0 \dots\dots (16)$$

ただし

$$K = \frac{E(at_1 + bt_2)}{6}$$

上式中  $C^{AB}, C^{AD}$  が  $x$  について定数なることに留意し上式を  $x$  について1度微分して2度積分すると節点  $r-1, r$  で区切られる第  $r$  区間では

$$K\dot{u} + \frac{\bar{p}_r}{a} - K\dot{u}_{r-1} \frac{\lambda-x}{\lambda} - K\dot{u}_r \frac{x}{\lambda} = 0 \dots\dots (17)$$

ただし  $\dot{u}_r$  は節点  $r$  における頂点Aのそりひずみである。さらに式 (17) を  $x$  で2度積分すると

$$K\ddot{u} + \frac{\bar{p}_r}{a} + K\ddot{u}_{r-1} \frac{\lambda^2}{6} \left\{ \left( \frac{x}{\lambda} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{\lambda} \right)^2 + 2 \frac{x}{\lambda} \right\} \\ + K\ddot{u}_r \frac{\lambda^2}{6} \left\{ \left( \frac{x}{\lambda} \right) - \left( \frac{x}{\lambda} \right)^3 \right\} - Ka_{r-1} \frac{\lambda-x}{\lambda} \\ - K\ddot{u}_r \frac{x}{\lambda} = 0 \dots\dots (18)$$

ただし  $\bar{p}, \bar{p}$  は  $x=0, x=\lambda$  で0になるように積分定数を定める。いま式 (17) を  $x$  で1度微分して式 (14) と

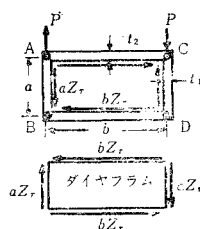
図-3  $r$  ダイアフラム くらべると、

$$C_r^{AB} + C_r^{AD} = -\frac{K}{\lambda} \Delta \dot{u}_{r-1} \dots\dots (19)$$

ただし、

$$\Delta F_r = F_{r+1} - F_r$$

また  $u_r$  は  $(r, r-1)$  区間で計算しても  $(r, r+1)$  区間で計算しても同じ値



であることから式 (18) を微分して各区間の  $u_r$  を求め、

$$\frac{\lambda Ka}{6} (d^2 \ddot{u}_{r-1} + 6 \dot{u}_r) = \frac{Ka}{\lambda} d^2 \ddot{a}_{r-1} - \overset{=}{p}_{r,r+1} + \overset{=}{p}_{r,r-1} \dots \dots \dots (20)$$

上式中  $\overset{=}{p}_{r,r-1}$  は  $r$  点における  $r-1$  方向区間の荷重による値を示す。

#### 4. 節点における力のつりあいと断面の回転

壁部材  $AB$  の節点  $r$  におけるせん断力のつりあいはダイヤフラムによる抵抗せん断力を  $Z_r$ 、この位置に作用する集中力を  $P_r$  とすれば、図-2 の下図から

$$Q_{r,r-1}^{AB} - Q_{r,r+1}^{AB} = aZ_r - P_r$$

公式 (11) を用いて上式は、

$$a d C_r^{AB} = \bar{p}_{r,r-1} - \bar{p}_{r,r+1} - aZ_r + P_r \dots \dots (21)$$

ダイヤフラムの抵抗せん断力はそれ自身 図-3 のようにつりあうから壁部材  $AD$  について節点  $r$  部分の力のつりあいをとれば、

$$b d C_r^{AD} = -bZ_r \dots \dots \dots (22)$$

つぎに部材  $AB, AD$  の  $s$  方向の変位は公式 (13) から

$$Gt_1 a \dot{w}^{AB} = 2 Gt_1 u + \bar{p}_r + C_r^{AB} a$$

$$Gt_2 b \dot{w}^{AD} = 2 Gt_2 u + C_r^{AD} b$$

部材  $AB, AD$  の時間回り回転を  $\varphi^{AB}, \varphi^{AD}$  とすれば

$$2 Gt_2 b \dot{w}^{DA} = Gt_2 a b \dot{\varphi}^{AB} = -4 Gt_2 u - 2 b C_r^{AD} \dots \dots \dots (23)$$

$$2 Gt_1 a \dot{w}^{AB} = Gt_1 a b \dot{\varphi}^{AD} = 4 Gt_1 u + 2 \bar{p}_r + 2 a C_r^{AB} \dots \dots \dots (24)$$

式 (23), (24) を  $x$  について  $r-1$  から  $r$  まで積分し節点では  $\varphi^{AB} = \varphi^{AD} = \varphi$  なることを考慮して  $t_1 \times$  式(23) +  $t_2 \times$  式(24) と式 (23) + 式(24) をつくれば

$$2 Gt_1 t_2 a b d \varphi_{r-1} = -2 \lambda (bt_1 C_r^{AD} - at_2 C_r^{AB}) \dots \dots \dots (25)$$

$$Gab(at_2 + bt_1) d \varphi_{r-1} - 4 G(bt_1 - at_2) d a_{r-1} = 2 \lambda ab (C_r^{AB} - C_r^{AD}) \dots \dots \dots (26)$$

#### 5. 基本差分方程式

前式 (21), (22) を (19) に代入して

$$\frac{K}{\lambda} d^2 \ddot{u}_{r-1} = 2 Z_r - \frac{\bar{p}_{r,r-1} - \bar{p}_{r,r+1}}{a} - \frac{P_r}{a} \dots (27)$$

式 (20), (21) および (24) から

$$2 Gt_1 t_2 a b d^2 \varphi_{r-1} = 2 \lambda Z_r (bt_1 - at_2) + 2 \lambda t_2 (\bar{p}_{r,r-1} - \bar{p}_{r,r+1} + P_r) \dots \dots \dots (28)$$

式 (20), (21), (22) および (26) から

$$G(at_2 + bt_1) d^2 \varphi_{r-1} - \frac{2 G \lambda^2}{3 a b} (bt_1 - at_2) (d^2 \ddot{u}_{r-1} + 6 \dot{u}_r) = \frac{2 \lambda}{a} (P_r - \bar{p}_{r,r+1} + \bar{p}_{r,r-1}) + \frac{4 G (bt_1 - at_2) \lambda}{a^2 b K} (\overset{=}{p}_{r,r+1} - \overset{=}{p}_{r,r-1}) \dots \dots (29)$$

つぎに式 (27), (28) から  $Z_r$  を消去して

$$2 Gt_1 t_2 a^2 b^2 d^2 \varphi_{r-1} - Kab(bt_1 - at_2) d^2 \ddot{u}_{r-1} = b \lambda (bt_1 + at_2) (\bar{p}_{r,r-1} - \bar{p}_{r,r+1} + P_r) \dots (30)$$

式 (29), (30) がこの場合の基本差分方程式であるが、さらに両式から  $\varphi$  を消去すると

$$d^2 \ddot{u}_{r-1} - a \dot{u}_r = -\frac{\alpha (bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2 \lambda} (P_r + \bar{p}_{r,r-1} - \bar{p}_{r,r+1}) + \frac{6 \alpha}{E \lambda a (bt_2 + at_1)} (\overset{=}{p}_{r,r+1} + \overset{=}{p}_{r,r-1}) \dots (31)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{12 r}{n^2 - 2 r}, \quad r = \frac{2 t_1 t_2 l^2}{(1 + \nu)(at_2 + bt_1)(bt_2 + at_1)}, \quad n l = l$$

上式を解けば節点  $r$  における断面頂点のそり応力を  $E \dot{u}_r$  として求めることができる。

いま  $n$  が無限大すなわち  $\lambda$  が 0 となる特別な場合を検討してみよう。微分の定義から、 $r$  を  $x$  とみなせば

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^2 \ddot{u}_{r-1}}{\lambda^2} = \frac{d^3 u}{dx^3}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^2 \varphi_{r-1}}{\lambda^2} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

また、

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (d^2 \ddot{u}_{r-1} + 6 \dot{u}_r) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \lambda^2 \frac{d^3 u}{dx^3} + 6 \dot{u}_r \right) = 6 \frac{du}{dx}$$

$\lambda$  が微小値であるからその区間で荷重は等分布と考えられるので  $q$  を荷重強度とすれば、

$$\overset{=}{p}_{r,r+1} = -\overset{=}{p}_{r,r-1} = \frac{q \lambda^3}{24}$$

$$\therefore \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\overset{=}{p}_{r,r+1} - \overset{=}{p}_{r,r-1}) / \lambda^2 = 0$$

最後に  $m_x$  を  $r$  点を中央点とし  $\lambda$  なる幅に作用する外力トルクの平均値とすれば幅  $b$  のフランジ両端の偶力によってトルクが生じているから

$$b(\bar{p}_{r,r-1} - \bar{p}_{r,r+1} + P_r) / \lambda = m_x$$

とかくことができるので、方程式 (29), (30) の両辺を  $\lambda^2$  で除し  $\lambda \rightarrow 0$  の極限をとれば

$$\left. \begin{aligned} -EI_w f'''' + GJ \varphi'' &= m_x \\ GI_p \varphi'' - GJ \mu^2 I_p f &= m_x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

ただし、

$$f = \frac{4(bt_1 + at_2)}{ab(bt_1 - at_2)} u, \quad J = \frac{2 a^2 b^2 t_1 t_2}{(bt_1 + at_2)}$$

$$I_w = \frac{a^2 b^2 (bt_1 - at_2)^2 (bt_2 + at_1)}{24 (t_1 b + at_2)^2}$$

$$I_p = \frac{ab(bt_1 + at_2)}{2}, \quad \mu = \frac{bt_1 - at_2}{bt_1 + at_2}$$

式 (32) は Bencoter の曲げねじりの微分方程式と同形であり、補剛ダイヤフラムが無限に取付けられた極限では Bencoter 解に一致することを示している。しかしこれは二軸対称形断面についてのみ有効で一般の場合についての証明ではない。

#### 6. 単一トルクが作用する場合

境界条件は両端でそり応力と回転のない単純支持を想定する。すなわち

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_n = 0, \quad \varphi_0 = \varphi_n = 0$$

(1) 任意節点  $c$  に単一トルクが作用する場合

この場合  $p$  による各項は 0 となり方程式 (31) から

$$\dot{u}_r = P \frac{\alpha(bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2 \lambda} F(r, c) \dots\dots\dots(33)$$

上式中  $F(r, c)$  は式 (31) のグリーン関数<sup>9)</sup> で

$$F(r, c) = \begin{cases} \frac{\sinh \beta c \cdot \sinh \beta(n-r)}{\sinh \beta \sinh \beta n}, & r \geq c \\ \frac{\sinh \beta(n-c) \cdot \sinh \beta r}{\sinh \beta \cdot \sinh \beta n}, & r \leq c \end{cases} \dots\dots(34)$$

$$\cosh \beta = \frac{\alpha+2}{2}$$

ここで  $\alpha$  の種々の値について式 (34) を吟味しよう。

$\alpha > 0$  の場合、式 (34) はそのまま計算できる。

$0 > \alpha > -2$  の場合

$$F(r, c) = -\frac{\sin \beta c \cdot \sin \beta(n-r)}{\sin \beta \cdot \sin \beta n}, \quad (r > c) \dots\dots(a)$$

$-2 > \alpha > -4$  の場合

$$F(r, c) = (-1)^{(c-r-1)} \frac{\sin \beta c \cdot \sin \beta(n-r)}{\sin \beta \cdot \sin \beta n} \quad (r > c) \dots\dots(b)$$

$-4 > \alpha$  の場合

$$F(r, c) = (-1)^{(c-r-1)} \frac{\sinh \beta c \cdot \sinh \beta(n-r)}{\sinh \beta \cdot \sinh \beta n} \quad (r > c) \dots\dots(c)$$

となる。ただし

$$\beta = \cosh^{-1} \left| \frac{\alpha+2}{2} \right| \text{ or } \cos^{-1} \left| \frac{\alpha+2}{2} \right|$$

箱桁の形状とダイヤフラム数によって  $\alpha$  が定まるが、 $\alpha$  が (b), (c) にあてはまる場合、単一偶力によるそり応力は節点から節点へ交番減衰する。

(2) 節点  $c$  と  $c-1$  の間に単一偶力が作用する場合

$$\begin{aligned} \dot{u}_r = & \frac{\alpha(bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2 \lambda} \{ \bar{p}_{c, c-1} F(r, c) - \bar{p}_{c-1, c} F(r, c-1) \} \\ & + \frac{6\alpha}{E \lambda a(bt_2 + at_1)} \{ \bar{p}_{c, c-1} F(r, c) \\ & - \bar{p}_{c-1, c} F(r, c-1) \} \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

荷重  $P$  が  $c, c-1$  の間で図-5 のように作用していれば

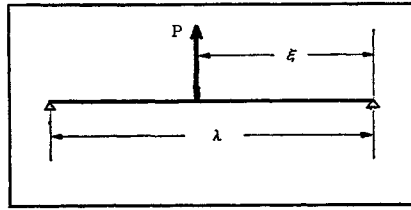
$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{c, c-1} &= P \cdot (1 - \xi), \quad \bar{p}_{c-1, c} = -P \cdot \xi \\ \bar{p}_{c, c-1} &= -\frac{\lambda^2 P \xi (1 - \xi)(2 - \xi)}{6}, \\ \bar{p}_{c-1, c} &= \frac{\lambda^2 P \xi (1 - \xi)(1 + \xi)}{6} \end{aligned} \right\} \dots\dots(36)$$

節点の間の部分の  $\dot{u}$  については公式 (17) を考慮して計算できる。その区間に荷重がない場合は両節点の  $\dot{u}$  値を直線で結んで得られるがその区間に荷重があればこれによるひずみを加えることになる。またそり応力は  $E \times \dot{u}$  によってただちに与えられる。

(3) 中央点に単一偶力が作用する場合の最大そり応力

a)  $n$  が偶数の場合 この場合には中央ダイヤフラ

図-5



$\mu$  点に偶力が作用するから、頂点 A の最大そり応力は解式 (32) によって

$$\sigma_M = P \cdot \frac{(bt_1 - at_2)(1 + \nu)n\sqrt{\alpha}}{4 at_1 t_2 l \sqrt{\alpha + 4}} \tanh \frac{\beta n}{2} \dots(37)$$

これに対する Bencsoter 解は

$$\sigma_B = P \cdot \frac{(bt_1 - at_2)(1 + \nu)}{4 at_1 t_2 l} \sqrt{3r} \tanh \sqrt{3r}$$

ただし、

$$r = \frac{2 t_1 t_2 l^2}{(1 + \nu)(at_2 + bt_1)(at_1 + bt_2)}$$

となるから、 $n \rightarrow \infty$  で  $\alpha \rightarrow 0$  ゆえに  $\beta = \sqrt{\alpha}$  なることを考慮して

$$\sigma_M = \sigma_B \frac{n \tanh(n\beta)/2}{\sqrt{n^2 + r}} \coth \sqrt{3r} \dots\dots(38)$$

とかくことができる。式 (38) は断面形不変の場合の最大そり応力  $\sigma_B$  はダイヤフラムの数  $n$  とこのときの最大そり応力  $\sigma_B$  の関係を与えるもので、右辺の係数はこの荷重状態における断面形保持の程度を  $n$  によって示す関数といえることができる。

b)  $n$  が奇数の場合 この場合単一トルクは補剛ダイヤフラムの中間に作用することとなり、まず解式 (34) と (35) を用いて

$$\begin{aligned} E\dot{u}_{n-1/2} = E\dot{u}_{n+1/2} = & \frac{P\sqrt{\alpha}}{8\sqrt{\alpha+4}} \left\{ \frac{n(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{at_1 t_2 l} \right. \\ & \left. - \frac{3l}{an(bt_2 + at_1)} \right\} \times \left\{ (\coth \beta n - \operatorname{cosech} \beta n) \right. \\ & \cdot \left( \frac{\alpha+4}{2} \right) - \sinh \beta \left. \right\} = \sigma_B \frac{n\sqrt{n^2+r}}{n^2-2r} \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \\ & \cdot \left( \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2+r}} \right) \coth \sqrt{3r} \end{aligned}$$

となる。つぎに式 (17) から中央区画中点のそり応力

$$\sigma_M = E\dot{u}_{n-1/2} + \frac{3Pl}{2na(at_1 + bt_2)}$$

が求まるから先の結果をこの第 1 項に代入して

$$\begin{aligned} \sigma_M = \sigma_B \left[ \frac{n\sqrt{n^2+r}}{n^2-2r} \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \left( \tanh \beta n/2 \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{3r}{n^2+r}} \right) + \sqrt{3r}/n \mu \right] \coth \sqrt{3r} \dots(39) \end{aligned}$$

上式はダイヤフラムで奇数区画に分けられた二軸対称箱桁の中央に単一偶力が作用した場合の荷重点下のそり応力と断面不変の場合、すなわち  $n$  が無限大の場合の応力  $\sigma_B$  との関係を示しているが、中央点に補剛ダイヤフラムのある  $n$  が偶数の中央点荷重における式 (38) にくら

べ複雑な形になっている。大カッコの第3項は局部応力の項でこれは  $n$  が 10 以下では支配的である。荷重項を中心に式 (39) を書き換えると

$$\sigma_M = \frac{3Pl}{2a(bt_2 + at_1)} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\mu n \sqrt{n^2 + r}}{\sqrt{3}r(n^2 - 2r)} \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \cdot \left( \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

なお、奇数区画でその中央区画にのみ分布荷重  $q$  がある場合は  $P=q\lambda$  とおいて

$$\sigma_M = \frac{3Pl}{4a(bt_2 + at_1)} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{2\mu n \sqrt{n^2 + r}}{\sqrt{3}r(n^2 - 2r)} \left( 1 - \frac{r}{\mu n^2} \right) \cdot \left( \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

また  $bt_1 - at_2 = 0$ , すなわち  $\mu = 0$  で式 (40) は

$$\sigma_M = \frac{3Pl}{2a(bt_2 + at_1)} \left\{ \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{3}r(n^2 + r)}{2n(n^2 - 2r)} \cdot \left( \tanh \frac{\beta n}{2} - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right) \right\}$$

上式は  $n$  奇数で中央点偶力に対するそり応力の最大値であるが  $n$  が無限大で 0 となる。

**7. 満載等分布偶力  $qb$  が作用する場合**

この場合両端を除く各補剛ダイヤフラム点における荷重項、式 (31) の右辺は等しく、

$$-\frac{\alpha(bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2 \lambda} (\bar{P}_{r,r-1} - \bar{P}_{r,r+1}) + \frac{6\alpha}{E \lambda a(bt_2 + at_1)} \cdot (\bar{P}_{r,r+1} - \bar{P}_{r,r-1}) = -\frac{\alpha q(bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2} \left( 1 - \frac{r}{\mu n^2} \right)$$

となる。ゆえに式 (31) を解いて

$$E\ddot{u}_r = \frac{q(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} \left( 1 - \frac{r}{\mu n^2} \right) \{ 1 - f(r) \}$$

上式中

$$f(r) = \{ \sinh \beta r + \sinh \beta(n-r) \} / \sinh \beta n$$

したがって  $r-1, r$  の中間でそり応力は

$$\sigma_{r-1,r} = \frac{q(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} \left[ \left( 1 - \frac{r}{\mu n^2} \right) \{ 1 - \xi \cdot f(r) \} - (1 - \xi) \cdot f(r-1) \right] + \frac{12r}{\mu n^2} \xi(1 - \xi) \dots\dots\dots (41)$$

最大そり応力は  $n$  が偶数の場合

$$\sigma_M = \frac{q(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} \left( 1 - \frac{r}{\mu n^2} \right) (1 - \operatorname{sech} \beta n/2) \dots\dots\dots (42)$$

$n$  が奇数の場合

$$\sigma_M = \frac{q(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} \left[ \left( 1 - \frac{r}{\mu n^2} \right) \left\{ 1 - f\left( \frac{n-1}{2} \right) \right\} + \frac{3r}{\mu n^2} \right] \dots\dots\dots (43)$$

この場合、断面不変形理論によれば

$$\sigma_M = \frac{q(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} (1 - \operatorname{sech} \sqrt{3}r)$$

ちなみに Wagner 形式によれば、

$$\sigma_M = \frac{q(1+\nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} [1 - \operatorname{sech}(\sqrt{3}r/\mu)]$$

となり  $r$  の値が大であればほとんど等しい。 $bt_1 = at_2$  の場合、断面不変形理論ではそり応力は 0 となるが、公式 (42), (43) 中

$$\mu = (bt_1 - at_2)/(bt_1 + at_2)$$

であるから有限値を与えることがわかる。

**8. 補剛ダイヤフラムに生ずるせん断力  $Z_r$**

公式 (31) から

$$\begin{aligned} \Delta^2 \dot{u}_{r-1} = & -\frac{\alpha(bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2 \lambda} (P_r + \bar{P}_{r,r-1} - \bar{P}_{r,r+1}) \\ & + \frac{6\alpha}{E \lambda a(bt_2 + at_1)} (\bar{P}_{r,r+1} - \bar{P}_{r,r-1}) + \alpha \dot{u}_r \end{aligned}$$

また式 (27) から

$$\frac{K}{\lambda} \Delta^2 \dot{u}_{r-1} = 2Z_r - \frac{(P_r + \bar{P}_{r,r-1} - \bar{P}_{r,r+1})}{a}$$

両式から  $\Delta^2 \dot{u}_{r-1}$  を消去し

$$\begin{aligned} 2Z_r = & (P_r + \bar{P}_{r,r-1} - \bar{P}_{r,r+1}) \left( \frac{1}{a} - \frac{\alpha K(bt_1 - at_2)}{8 Gat_1 t_2 \lambda^2} \right) \\ & + \frac{\alpha}{\lambda a} (\bar{P}_{r,r+1} - \bar{P}_{r,r-1}) + \frac{\alpha K}{\lambda} \dot{u}_r \end{aligned}$$

したがって単一偶力が節点  $c$  上にある場合は、

$$Z_r = \frac{P_c}{2a} \left( 1 - \frac{n^2 \mu}{n^2 - 2r} \right) + \frac{P}{2a} \frac{12r n^2 \mu}{(n^2 - 2r)^2} F(r,c) \dots\dots\dots (44)$$

ただし、

$$P_c = P \quad (r=c), \quad P_c = 0 \quad (r \neq c)$$

単一偶力が節点  $c-1, c$  の間にあるとき補剛ダイヤフラムが  $r \neq c, r \neq c-1$  にあるとき

$$\begin{aligned} Z_r = & \frac{n^2 \mu \alpha}{2a(n^2 - 2r)} \{ \bar{P}_{c,c-1} F(r,c) - \bar{P}_{c-1,c} F(r,c-1) \} \\ & + \frac{\alpha^2}{a \lambda^2} \{ \bar{P}_{c,c-1} F(r,c) - \bar{P}_{c-1,c} F(r,c-1) \} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

$r=c, r=c-1$  に対してはそれぞれ

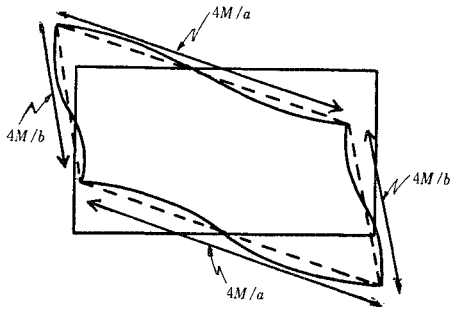
$$\begin{aligned} Z_c = & p_{c,c-1} \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{n^2 \mu}{2a(n^2 - 2r)} \right\} - p_{c,c-1} \frac{\alpha}{2a \lambda^2} \\ & + \frac{n^2 \mu \alpha}{2a(n^2 - 2r)} \{ \bar{P}_{c,c-1} F(c,c) - \bar{P}_{c-1,c} F(c,c-1) \} \\ & + \frac{\alpha^2}{a \lambda^2} \{ \bar{P}_{c,c-1} F(c,c) - \bar{P}_{c-1,c} F(c,c-1) \} \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{c-1} = & -p_{c-1,c} \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{n^2 \mu}{2a(n^2 - 2r)} \right\} - p_{c-1,c} \frac{\alpha}{2a \lambda^2} \\ & + \frac{n^2 \mu \alpha}{2a(n^2 - 2r)} \{ \bar{P}_{c,c-1} F(c,c-1) \\ & - \bar{P}_{c-1,c} F(c-1,c-1) \} \\ & + \frac{\alpha^2}{a \lambda^2} \{ \bar{P}_{c,c-1} F(c,c-1) - \bar{P}_{c-1,c} F(c-1,c-1) \} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

**9. 長方形断面頂点のラーメン剛性による断面内曲げモーメントの近似計算**

Hardy Cross の方法にしたがって既述のヒンジ断面

図-6 頂点曲げモーメントのせん断力



の各折板要素の回転角  $\varphi^{AD}$ ,  $\varphi^{AB}$  を長方形ラーメンの部材回転角として、長方形断面頂点の曲げモーメントを近似的に求めることができる。たわみ角式による簡単な計算の結果、曲げモーメントの近似値  $M$  は

$$M = \frac{Et_1^3 t_2^3}{2(t_1^3 b + t_2^3 a)} (\varphi^{AD} - \varphi^{AB}) \dots\dots\dots (48)$$

いま第  $r$  区画について考えれば、 $r$ ,  $r-1$  点では剛なダイヤフラムによって  $\varphi^{AD} = \varphi^{AB}$  となるので式 (48) は (23), (24) から

$$M_r = \frac{t_1^3 t_2^3}{ab(at_2^3 + bt_1^3)} \left[ \frac{24}{a(at_1 + bt_2)} \bar{p}_r - \frac{2}{t_1} \bar{p}_r (1 + \nu) + \frac{2E\lambda^2}{3} \{ \dot{u}_{r-1} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) + \dot{u}_r (\xi - \xi^3) \} \right] \dots\dots\dots (49)$$

上式の  $M_r$  は第1近似値であるから真値に近づくためにはこの近似値モーメントによって図-6のように断面内に生ずるせん断力を折板要素の荷重としてその応力や曲げモーメントを第2近似値として求め逐次同様の操作をくり返し計算すればよいわけである。図-6 からわかるように折板  $AD$  と  $AB$  に作用する第2次荷重は、ともに  $4M_r$  なる分布偶力をそれぞれ逆向きに生ずるような荷重であるがこれを導入して式 (16) の公式を作るとそり応力の荷重項は  $8M_r$  で表わされる。また式 (23), (24) から断面頂点曲げモーメント式 (49) を作ると荷重項は  $8M_r$  となるのがわかる。ゆえに第2近似値は  $8M_r$  をトルク荷重としたそり応力と曲げモーメントを前記各公式から求めればよい。 $8M_r$  が小さな値であれば第1近似値を与えるヒンジ結合断面の各公式からの数値を剛結長方形断面のものとして用いることができる。

注目している区画にだけ偶力荷重があるときはその区画の  $8M_r$  の合計  $\mathfrak{M}$  すなわち

$$\mathfrak{M} = \int_0^l 8M_r dx \dots\dots\dots (50)$$

その区画の偶力荷重の全体とくらべることによって第1近似値の精度をみる目安にできる。

大きな断面変形は中央部の区画の中心に点偶力が作用した場合その荷重直下に生ずるから  $n$  が奇数で中央点に偶力荷重  $Pb$  が作用するその荷重点の断面内曲げモー

メントを考えよう。第1近似値は式 (49) から求められ、これを  $M_c$  とすれば、

$$M_c = \frac{Pl^3 t_1^3 t_2^3}{2a^2 b (bt_1^3 + at_2^3) (at_1 + bt_2) n^3} \left[ 1 + \frac{a(at_1 + bt_2) n^2}{l^2 t_1} \cdot (1 + \nu) + \frac{\mu n^2 \sqrt{3(n^2 + r)}}{4\sqrt{r} (n^2 - 2r)} \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \cdot \left\{ \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right\} \right] \dots\dots\dots (51)$$

上式大カッコ中第2, 第3項は  $n$  の大なる値に対して  $n^2$ ,  $n$  に比例するがダイヤフラム間隔は断面の長辺  $b$  より大きいから  $n$  にある最大値が構造上定まる。これらを勘案すれば普通第2, 第3項は1より相当小さな値で、 $M$  は近似的に区画数の3乗に逆比例することがわかる。この場合の中央区画について  $8M_r$  の合計は

$$\mathfrak{M} = \int_0^l 8M_r dx = \frac{5Pl^3 \lambda t_1^3 t_2^3}{2a^2 b (bt_1^3 + at_2^3) (at_1 + bt_2) n^3} \cdot \left[ 1 + \frac{4an^2}{5l^2} (at_1 + bt_2) (1 + \nu) + \frac{2\mu n^2 \sqrt{3(n^2 + r)}}{15\sqrt{r} (n^2 - 2r)} \cdot \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \left\{ \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right\} \right] \dots\dots (52)$$

つぎに  $n$  が奇数で中央区画にのみ等分布偶力  $qb$  が作用する場合の中央点断面の頂点の曲げモーメントを考えよう。第1近似値は式 (49) から  $P = q\lambda$  において

$$M_c = \frac{5Pl^3 t_1^3 t_2^3}{16n^3 a^2 b (bt_1^3 + at_2^3) (bt_2 + at_1)} \left[ 1 + \frac{4n^2}{5l^2} \cdot a(at_1 + bt_2) (1 + \nu) + \frac{\mu n^2 \sqrt{3(n^2 + r)}}{5\sqrt{r} (n^2 - 2r)} \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \cdot \left\{ \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right\} \right] \dots\dots\dots (53)$$

また中央区画について

$$\mathfrak{M} = \frac{8Pl^3 \lambda t_1^3 t_2^3}{5n^3 a^2 b (bt_1^3 + at_2^3) (bt_2 + at_1)} \left[ 1 + \frac{5n^2}{6l^2} \cdot a(at_1 + bt_2) (1 + \nu) + \frac{5\mu n^2 \sqrt{3(n^2 + r)}}{24\sqrt{r} (n^2 - 2r)} \cdot \left( 1 - \frac{3r}{2\mu n^2} \right) \left\{ \tanh \beta n/2 - \sqrt{\frac{3r}{n^2 + r}} \right\} \right] \dots\dots (54)$$

さて式 (51) から第1近似値を求め、この曲げモーメントが中央区画内で等分布すると仮定し、式 (52) の  $\mathfrak{M}$  を  $Pb$  において式 (53) から第2近似値を求める。さらにこれによる式 (54) の  $\mathfrak{M}$  を等分布トルク  $Pb$  と見做して式 (53) から第3近似値をと、逐次くり返して剛接合長方形断面の多ダイヤフラムを有する桁の問題を解くことができる。後に示す数値例から第2近似で十分精度のあることがわかる。また普通のダイヤフラム間隔では第1近似で満足すべき結果がみられる。

### 10. Ebner 理論との比較<sup>6)</sup>

断面の四隅には軸方向のじょうぶな弦材が薄い周壁で囲まれ、かつ横壁で区画に分割されている箱桁について、周壁はせん断場モデルの意味でのせん断場でその中に直応力すなわちそり応力は無視し、そり応力は弦材の

みに生ずるとして、箱桁端部で弦材に偶モーメント（曲げねじりモーメント）が作用した場合弦材応力の定差分方程式を Ebner はつぎのように求めている。すなわち無限に剛い横壁の場合

$$d^2 X_{r-1} - \omega X_r = 0^{(19)} \dots \dots \dots (55)$$

ただし、 $X_r$  :  $r$  番目の横壁点の弦材応力

$$\omega = \frac{24 \lambda^2 G}{3 EF(a/t_1 + b/t_2) - 4 \lambda^2 G}$$

$F$  : 弦材断面積

上式は式 (31) の右辺の荷重項を 0 とおいたものに対応する。ここで考えている箱桁は四隅に弦材がなく周壁はせん断力とそり応力をうけ持っているので、上式 (55) とは異なるが、周壁に生じているそり応力を等価な弦材断面にもたせ、せん断力のみを周壁に作用させれば式 (31) と式 (55) は等しくなるべきであろう。それには弦材が曲げねじりモーメントを受け持つように断面をとればよい。この場合 図-7 のようにそり応力は各周壁の中央で 0 となるような直線分布であるからそり応力の曲げモーメントに等しくなるように仮りの弦材断面を想定する。すなわち

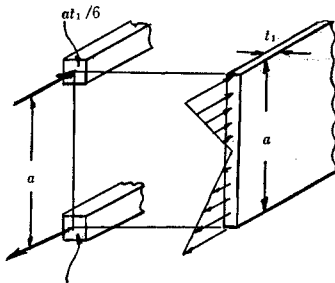
$$F = (at_1 + bt_2)/6$$

したがって

$$\omega = \alpha = \frac{24 \lambda^2 t_1 t_2}{(1 + \nu)(at_1 + bt_2)(at_2 + bt_1) - 4 \lambda^2 t_1 t_2}$$

等価な弦材を導入して曲げねじりモーメントを受け持たせることにより両式が一致することがわかった。

図-7 モーメントを等しくする等価断面



### 10. 数値計算

断面諸元を

$$a = 150 \text{ cm}, \quad b = 400 \text{ cm}, \quad \nu = 0.3$$

$$t_1 = t_2 = 1 \text{ cm}, \quad l = 4000 \text{ cm}$$

とにおいて、まず部材の中央に単一偶力が作用した場合の最大そり応力  $\sigma_M$  と  $n$  の関係を 図-8 の I, II の線で示す。この中で  $n$  の整数値以外の部分は意味がないが  $n$  の増加にともなって値が  $\sigma_B$  に近づく様子を示すため線で示した。これは公式 (38), (39) からそれぞれ計算したもので、I の線は  $n$  が偶数で、その中央ダイヤフラム上に偶力が作用する場合でそり応力の最大値は  $n$  無限大の  $\sigma_B$  より常に小さく比較的すみやかに断面不変の値に接

図-8 中央に単一偶力が作用する場合の最大そり応力と  $n$  の関係 (単位  $\sigma_B$ )

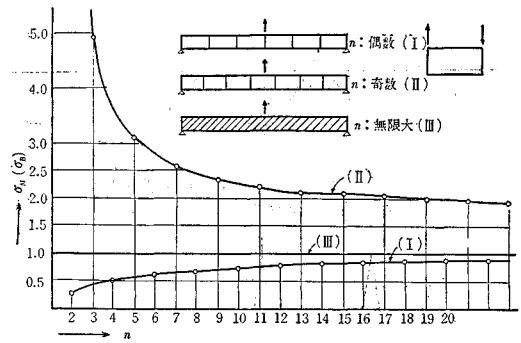
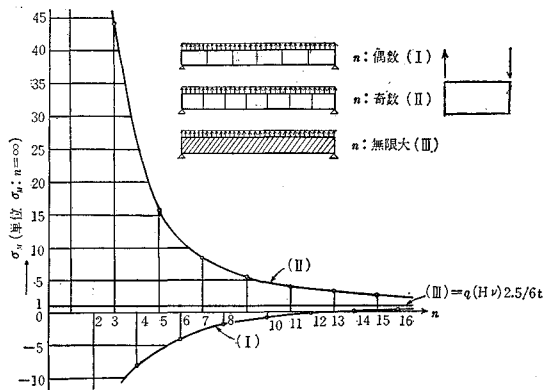


図-9 満載等分布偶力  $qb$  による中央断面の最大そり応力と  $n$  の関係 (単位  $\sigma_M : n = \infty$ )



近する。II の線は  $n$  が奇数の場合で偶力は中央区間の中点に作用し、公式 (39) の第 2, 第 3 項で与えられる局所応力が優勢で最大そり応力  $\sigma_B$  は極限值  $\sigma_B$  より常に大きく、また極限值への接近も緩慢である。この計算では  $n=1$  に対し  $\sigma_n$  は  $34.4 \times \sigma_B$  で  $n=3$  では  $4.05 \times \sigma_B$  に減少するが、 $n$  が 9 から 15 になってもほぼ  $2 \sigma_B$  の値を示している。この場合の Wagner 公式による最大そり応力は  $2.2 \sigma_B$  で  $n$  が 9~15 の  $\sigma_M$  に近いがこれは偶然の一致である。全スパンに等分布偶力が強度  $qb$  で作用する場合のスパン中点のそり応力を図示すれば補剛ダイヤフラムによる区画数  $n$  との関係において 図-9 のようになる。 $n$  の偶数の場合スパン中点は補剛ダイヤフラム上となり、 $n$  の奇数の場合は中央区画の中点となって、そり応力の正、負が全く逆となる。これは前項 6. に述べたように  $\alpha < -4$  のため、 $n$  が無限大となればいずれの値も

$$\sigma_B = \frac{q(1 + \nu)(bt_1 - at_2)}{4 at_1 t_2} (1 - \text{sech } \sqrt{3} r)$$

に近づくことは式 (42), (43) から明らかである。

また 図-10 は  $n=5$  の場合、満載等分布偶力  $qb$  のそり応力図で、あたかも満載等分布荷重の連続ばりの曲げモーメント図に似た形である。つぎに  $n=5$  の桁のスパン中点と第 1, 第 2 ダイヤフラムの中点に関するそり

図-10  $n=5$  で満載等分布偶力  $qb$  によるそり応力図  
(単位  $q/t$ )

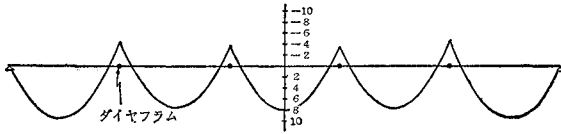
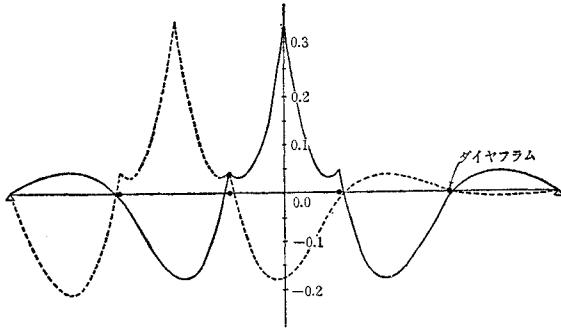


図-11  $n=5$  における中央点と第2区画中点の  
そり応力影響線図 (単位  $P/40t$ )



応力影響線図を示すと 図-11 のようになる。これを見ると一つおいて隣の区画の影響は急激に小さくなるのがわかる。

ダイヤフラムに生ずるせん断力  $Z_r$  について考察しよう。同じ断面諸元を用いて  $n$  が偶数の場合、中央点に単一偶力が作用するとき  $Z_{n/2}$  は公式 (44) から求まるがこれと  $n$  の関係を図示すれば 図-12 のようになる。 $n = \infty$  で  $Z_{n/2} = 0.545 P/2a$  の値になるがこの極限值への取れんはおそい。図-13 は  $n=5$  の場合の  $Z_r$  影響線図でこれによると注目しているダイヤフラムの所で急

図-12  $n$  が偶数の場合の中央偶力  $Pb$  に対する中央  
ダイヤフラムのせん断力 (単位  $P/2a$ )

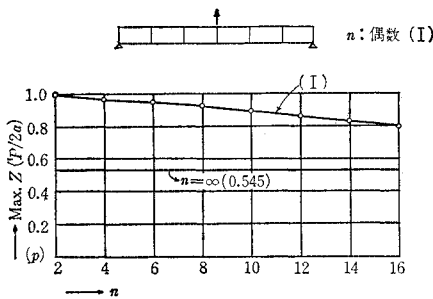
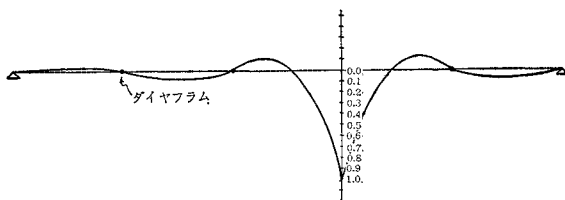


図-13 第3ダイヤフラムのせん断力影響線  
ただし  $n=5$  (単位  $P/2a$ )



に大きな値となっているのでせん断力はその両側区画の影響だけで近似的に計算できそうである。

数値計算の最後に上記諸元を有する部材について断面のラーメン剛性による頂点に生ずる断面内の曲げ応力を計算しよう。 $n$  が奇数で中央に点偶力  $P \cdot b$  が作用するとき荷重直下に大きな断面変形が考えられるから、この点について検討する。まず公式 (51) から  $M$  を求め曲げ応力は

$$\sigma' = 6 M/t$$

で与えられる。これは応力弛緩法による第1近似値であるからこれによって2次的なそり応力と曲げ応力が付加される。9. に述べたように2次的な応力は  $\Omega$  にほぼ比例するのでこの値を目安にできる。また逐次計算法を数値的に検討するため、 $n=1$  すなわち両端以外に横壁のない場合折板をヒンジ結合とした中央荷重点下のそり応力と曲げ応力を  $\sigma_1, \sigma_1'$  (添字1は第1近似値を示す) とし、つぎに  $\Omega$  に等価な分布偶力による中央点のそり応力と曲げ応力を  $\sigma_2, \sigma_2'$  (添字2は第2近似値を示す) とする。また折板が剛結された場合の対応点のそり応力と曲げ応力を  $(\sigma), (\sigma')$  と表わして、スパン長と断面長辺との比  $l/b$  に対する  $(\sigma)/\sigma_1, (\sigma')/\sigma_1', \Omega/Pb, \sigma_2/\sigma_1, \sigma_2'/\sigma_1'$ 、第2近似値まで考慮した  $(\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma_1, (\sigma_1' - \sigma_2')/\sigma_1'$  を表-1 に示す。これによれば第2近似値までで相当の精度が得られることがわかる。また  $\Omega/Pb$  が 7% 以下なれば第1近似値、本論文の各公式による値をそのまま剛結長方形断面に適用できそうである。表-2 には  $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2', (\sigma), (\sigma'), \Omega$  と  $l/b$  の関係を示してある、 $n$  が3以上の

表-1  $n$  奇数で中央点に点偶力  $Pb$  がある場合

$n$	$\sigma (P/t, t_2)$	$\sigma' (P/t, t_2)$	$\Omega/Pb$
1	0.0727	0.0695	0.58769
3	0.0103	0.0025	0.00726
5	0.0066	0.0005	0.00092
7	0.0055	0.0002	0.00024
9	0.0050	0.0001	0.00008
11	0.0047	0.0001	0.00004
13	0.0046	0.0000	0.00002
15	0.0045	0.0000	0.00001

$n=1$  で中央点に点偶力  $Pb$  がある場合

表-2  $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2', (\sigma), (\sigma'), \Omega$  と  $l/b$  の関係

$l/b$	$(\sigma)/\sigma_1$	$(\sigma')/\sigma_1'$	$\Omega/Pb$	$\sigma_2/\sigma_1$	$\sigma_2'/\sigma_1'$	$(\sigma_1 - \sigma_2)/\sigma_1$	$(\sigma_1' - \sigma_2')/\sigma_1'$
10	0.7423	0.6860	0.5877	0.2938	0.3673	0.7062	0.6327
9	0.8100	0.7682	0.3856	0.1928	0.2410	0.8072	0.7590
8	0.8697	0.8407	0.2407	0.1204	0.1505	0.8796	0.8495
7	0.9180	0.8995	0.1411	0.0706	0.0882	0.9294	0.9118
6	0.9534	0.9426	0.0762	0.0381	0.0476	0.9619	0.9524
5	0.9766	0.9705	0.0367	0.0184	0.0230	0.9816	0.9770
4	0.9902	0.9881	0.0150	0.0075	0.0094	0.9925	0.9906
3	0.9967	0.9938	0.0048	0.0024	0.0030	0.9976	0.9970
2	0.9988	0.9970	0.0009	0.0005	0.0006	0.9995	0.9994
1	1.0000	1.0000	0.0001	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000

$\sigma_1$ : そり応力の第1近似値       $\sigma_2$ : そり応力の第2近似値  
 $\sigma_1'$ : 曲げ応力の第1近似値       $\sigma_2'$ : 曲げ応力の第2近似値  
 $(\sigma)$ : そり応力の正確値       $(\sigma')$ : 曲げ応力の正確値



場合は  $M/Pb$  が小さくヒンジ結合断面の値を剛結断面に用いられる。

## 11. 結 語

以上薄肉長方形二軸対称断面が剛なダイヤフラムで  $n$  個に区画された箱桁に偶力が作用した場合を、ヒンジ結合折板構造として節点そり応力の定差分方程式を誘導して解析し、これを第1近似とする応力弛緩法によって同じように区画された剛結折板構造へとアプローチを試みたが、区画の長さが、断面長辺の5倍以下であれば、第1近似の結果はそのまま剛結折板構造に適用できることを数値的に示した。なお断面の長辺と区画長との比が小さくなって1に近づけば、最切の仮定であるそりひずみの直線性があやしくなるが基本差分方程式は  $n$  無限大の場合に Bencoter の曲げねじりの方程式と一致し、また等価な断面置換を行なうことで Ebner の箱形角柱のそり応力公式に一致することを明らかにした。一般の補剛ダイヤフラムを有する薄肉箱桁では、分布あるいは集中偶力を問わず局所応力が優先して、桁の曲げねじり理論の応力とは著しく異なり、中央集中偶力に対しては、中央断面でそり応力は  $1/n$ 、曲げ応力は  $1/n^3$  に比例し全等分布偶力に対しては、それぞれに  $1/n^2$ 、 $1/n^4$  に比例する。ただし  $n < 10$  の場合である。この方法は上下フランジの厚さの異なる場合にも適用できる。

## 参 考 文 献

- 1) Goodier and Barton : The Effect of Web Deformation on the Torsion of I-beams. J.A.M. 1944. A-35.
- 2) G. Florin : Vergleich verschiedener Theorien für den

auf Verdrehung beanspruchten Kastenträger ohne Querschnittsaussteifung an der Lasteinleitungsstelle an hand eines Modellversuchs. Stahlbau Heft 2, 1963. S. 51.

- 3) C.F. Kollbrunner u. K. Basler : Torsion. Springer 1966. S. 199-261.
- 4) R. Dabrowski : Der Schubverformungs einfluss auf die Wölbkrafttorsion der Kastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil. Bauingenieur, Heft 11, 1965. S. 444.
- 5) H. Wagner u. W. Pretschner : Verdrehung Knickung von offenen Profilen, Lufo., Bd. 11, Nr. 1934.
- 6) S.U. Bencoter : A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, J.A.M. March 1954. p. 25.
- 7) S.G. Nomachi : On Torsion Bending of Thin Walled Beam with Deformable Rectangular Cross-section, Proc. of 15th J.N.C.A.M. 1965. p. 52.
- 8) H. Ebner : Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung bei behinderter Querschnittswölbung. Z.F.M. Bd. 24. 1933. S. 645/55 u. 684/92.
- 9) S.G. Nomachi : On Finite Fourier Sine Series with Respect to Finite Differences. Memoir of Muroran Ins. Tech. Vol. 5. No. 1. 1965.p. 195.
- 10) W. Böttger : Praktisches Verfahren zur Berechnung prismatischer Faltwerke unter besonderer Berücksichtigung der Vorspannung. ERNST & SOHN. 1966.
- 11) A. DeFries-Skene & A.C. Scordelis : DIRECT STIFFNESS SOLUTION FOR FOLDED PLATES, ST 4 Proc. A.S.C.E. August, 1964. p. 15-47.
- 12) Kuang-Han Chu & S.G. Pinjarkar : MULTIPLE FOLDED PLATE STRUCTURES, ST 2 Proc. A.S.C.E. April, 1966. p. 297-321.
- 13) シェピッツ : 軽量構造の力学, 石崎澁雄訳, コロナ社, 昭 41.6, 158 頁.
- 14) 奥村敏恵・鈴木康弘, 外 2 名 : 薄肉けた構造における断面変形について, 土木学会第 20 回年次学術講演会, 昭 40.5.30. (1966.8.8・受付)