

# 大口径 Mach-Zehnder 干渉計による主応力和の解析について

ON THE ANALYSIS OF THE SUM OF PRINCIPAL STRESSES  
BY LARGE FIELD APERTURE MACH-ZEHNDER INTERFEROMETER

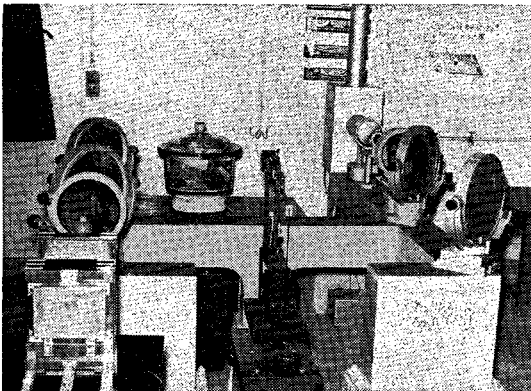
多 谷 虎 男\*

By Torao Taya

**要 旨** 従来の光弾性学の方法では等色線と等傾線とを用いて、個々の主応力を解析する方法が採られて来たが、各主応力の全面にわたる解析の目的を果たすためには、さらに等厚線をなんらかの方法によって求めることが必要である。そのため近年、干渉計を用いて等厚線すなわち主応力和を測定する方法が種々考究せられている。この方法についてはすでに Proceeding of the Society for Experimental Stress Analysis にも数年以前から、いくつかの論文が発表せられており、またわが国でも理化学研究所の西田、斎藤両博士が論文を発表されている。著者も 2, 3 年以前から Mach-Zehnder 干渉計の製作とそれによる実験とを手がけて来たが、最近大口径  $\phi 300$  mm のものをようやく完成し、これを用いてハンチ支承部分の等厚線を測定した。ところが著者は干渉計を用いて等厚線を測定解析することに関する在来の論文に対して異見をさしはさむところがあるだけでなく、著者の実験使用材料も従来のそれらとは異なっており、また以後の関連論文説述上、その根拠として必要であるので本論文において、まず、著者の製作した大口径 Mach-Zehnder 干渉計による主応力和の解析方法、主応力和算定公式の誘導、実験使用材料の光弾性定数実測結果などについて基礎的解説を行なうことを主旨としたものである。

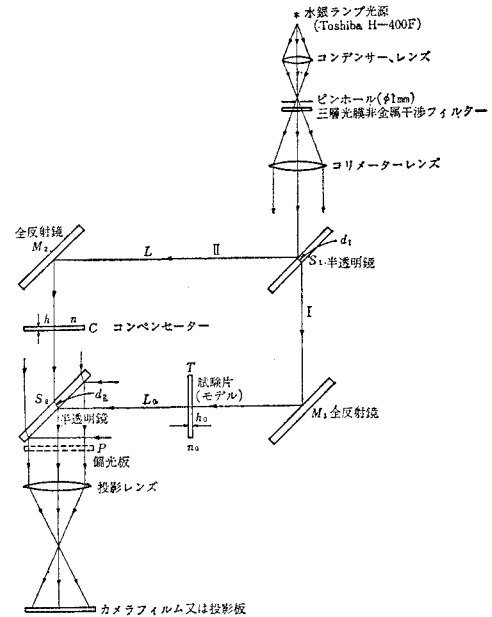
## 1. Mach-Zehnder 干渉計主応力和測定装置の概要

図一 著者の製作使用した大口径 Mach-Zehnder 干渉計装置



\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学教室

図二 Mach-Zehnder 干渉計装置の光学系概略図



図一は、著者の使用した Mach-Zehnder 干渉計の光学系について概要を示したものである。400 W の水銀灯光源より出た光はまずコンデンサーレンズを通してピンホール ( $\phi 1$  mm) に集められる。つぎにこの光は非金属材料三層干渉膜フィルターを通して、波長を単色  $5461 \text{ \AA}$  に整えられる。波長  $5461 \text{ \AA}$  に整えられた光はさらにコリメーターレンズを通して平行光束となり (ピンホールは正確にコリメーターレンズの主焦点位置にあるように調整する)、一部は半透明鏡  $S_1$  を通過して、図のように光路 I を進み、他の一部は  $S_1$  で反射せられて、光路 II を進む。光路 I、光路 II の光はさらにそれぞれ全反射鏡  $M_1$ 、 $M_2$  によって反射せられ、つぎに半透明鏡  $S_2$  によって再び重畳せられて投影レンズに向う。この際、光路 I と光路 II の光路差に応じて干渉作用が行なわれ、投影レンズ通過後、投影板上に干渉縞をあらわす。これは以下に述べるように等厚干渉縞であって、投影板の代りに写真乾板を置けばこの干渉縞を写真に撮影することができる。 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $M_1$ 、 $M_2$  はいずれも有効径  $300$  mm  $\phi$  で、光路に対して  $45^\circ$  に傾斜してそう入されているため、有効視野は約  $210$  mm  $\phi$  である。大口径干渉計装置

という点では国内だけでなく、諸外国に対しても、ひそかに自負しているが、大口径なるがゆえに、光波長程度の精度を要する干渉計の製作調整には特別な苦勞をとまった。しかし、その調整についての説明は本論文の本筋から余りはずれる恐れがあるので、本論文では省略する。

## 2. 等厚干渉縞の形成と主応力和算定公式の誘導

二次元弾性問題においては、主応力和の等高線は一般に等厚線として得られる。したがって、光波の干渉によって等厚干渉縞を測定すれば、主応力和の等高線すなわち Isopachic line を得ることができる。この Isopachic line と、従来一般に行なわれて来た光弾性等色線(主応力差の等高線)とを併用すれば、主応力のおのおのを二次元平面全面にわたって解析分離し、その分布の状況を構造物上の応力分布地図として示すことができる。以下、等厚干渉縞の形成について述べる。

Mach-Zehnder 干渉計の各部について記号をつぎのとおりに定めることにする(図-2 参照)。

$\lambda$ =光の波長 (mm)

$h$ =Compensator,  $C$ の厚み (mm)→屈折率  $n$

(光学硝子 BK-7)

$h_0$ =no load のときの Test Piece ( $T$ )の厚み (mm)

→屈折率  $n_0$  (リュウサイト)

$h_s$ =載荷したときの Test Piece ( $T$ )の厚み (mm)

$L_0$ =光路 I の空気部分のみの長さの総和 (mm)

→屈折率 1

$L$ =光路 II の空気部分のみの長さの総和 (mm)

→屈折率 1

$d_1$ =半透明鏡  $S_1$  中の光路実長 (mm)→屈折率  $n$

(光学硝子 BK-7)

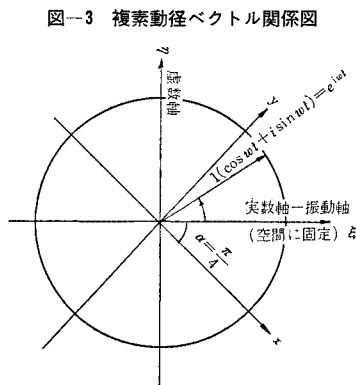
$d_2$ =半透明鏡  $S_2$  中の光路実長 (mm)→屈折率  $n$

(光学硝子 BK-7)

### (1) no load のときの光波の干渉

#### a) 同一振動面内の光の合成分解における光波振幅

半透明鏡  $S_1$  に入射する一つの光波連の振幅の絶対値を 1 とし、その振動は投影面  $\xi$  (空間に固定した投影面で、それぞれの光波連に対して特有なものとする) に対する図-3 のような



複素動径 Vector の投影振動であると考える。この特定投影面  $\xi$  は、各波連ごとにそれぞれ種々存在し、このような波連が一定微小時間内に、確率的にまんべんにつきつぎと進行して来るものと考える。

いま、一つの波連が半透明鏡  $S_1$  に入射して、反射する光と、 $S_1$  を透過する光との 2 つに分かれ、それらの強さの割合が  $m^2 : n^2$  の比であるときには、実数軸  $\xi$  上の投影振動(いま考えている波連の振動)はさらに

$$\tan \alpha = \frac{n}{m}$$

なる一定角  $\alpha$  だけ、図-3 のように  $\xi$  軸と方向を異にする一定方向  $x$  と、これに直角な方向  $y$  の 2 つの振幅に分かたれる。今回の場合、 $m : n = 1 : 1$  であるから、 $\alpha = \pi/4$  で、結局振幅がそれぞれ  $1/\sqrt{2}$  宛になる。このような関係は同一振動面  $\xi$  を有する光波の干渉(合成)の場合にも同様であって、たとえば 1 : 1 の強さの光波が干渉する場合には、実数軸  $\xi$  (振動面)と  $\alpha = \pi/4$  の角度をなす  $x$  軸と、これに直交する  $y$  軸との上に最初それぞれの光波振幅が位置し、それらの実数軸上への投影成分のみが合成せられるので、同じ強さの光波が干渉する場合には 2 倍の振幅の光波を生ずるのではなく、 $\sqrt{2}$  倍の振幅の光波を生ずることがわかる。

つぎに、 $M_1, M_2$  のような全反射鏡では、入射前の振幅は反射後も初めのまま  $\xi$  方向に保たれる。さらに半透明鏡  $S_2$  では、光路 I と光路 II の光について、半透明鏡  $S_1$  の場合とそれぞれ反対の作用が行なわれるので、振幅は又々  $1/\sqrt{2}$  宛になる。

したがって結局、一つの光波連が、光路 I, II の通路を通過して再び  $S_2$  で合流する場合には、合流するまでの間にそれぞれ振幅が  $1/\sqrt{2} \times 1/\sqrt{2} = 1/2$  となり、さらに合流の際に、上述のような理由で、それぞれの振幅が  $1/\sqrt{2}$  倍となって合成せられることになるので結局振幅はそれぞれ  $1/\sqrt{2} \times 1/\sqrt{2} \times 1/\sqrt{2} = 1/2\sqrt{2}$  となる。

**b) 光波振動の位相の遅れ** 一つの光波連の振幅については a) で述べた通りであるが、位相は一般に屈折率  $n$  で、光路実長  $l$  を通過するごとに入口点の位相よりも  $2\pi/\lambda \cdot nl$  だけ遅れるから、光路 I, II における振動の位相は、 $S_2$  で合流するまでの間にそれぞれつぎのようになる。

$$\text{光路 I の位相; } \left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_0 + n d_1 + L_0) \right\}$$

$$\text{光路 II の位相; } \left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}$$

以上のほかに、反射、屈折の際に位相が  $\pi$  だけ変化することがあるかも知れないが、その効果は、光路 I, II のそれぞれについて全く同じであるから、いまの場合には、そのようなことは全く考慮しないよい。

したがって、 $S_2$  で合流する直前では、光路 I, II の光波振動に対する複素動径 Vector は、以上 a), b) で

述べた結果からそれぞれ、

$$\text{光路 I ; } \frac{1}{2} e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_0 + n d_1 + L_0) \right\}}$$

$$\text{光路 II ; } \frac{1}{2} e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}}$$

で表わされることになる。

c) 光波の干渉 a) で述べたように、光路 I と光路 II の光が 1 : 1 で合流干渉する場合には、それぞれの振幅が  $1/\sqrt{2}$  倍となって、振動面  $\xi$  軸上で合成されるから、2つの光路の光波が合流し、干渉によって生じる光波振動の複素動径 Vector  $\Gamma$  は、

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \left\{ e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_0 + n d_1 + L_0) \right\}} + e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}} \right\}$$

となる。いま  $\Gamma$  の共軛複素動径 Vector を  $\Gamma'$  として表わせば、

$$\Gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_0 + n d_1 + L_0) \right\}} + e^{-i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}} \right\}$$

したがって  $\Gamma$  の絶対値の2乗  $J$  の値 (干渉光の強さ) は

$$\begin{aligned} J &= \Gamma \cdot \Gamma' = \frac{1}{8} \left\{ 2 + e^{i\left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (n h - n_0 h_0 + n d_2 - n d_1 + L - L_0) \right\}} \right. \\ &\quad \left. + e^{i\left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_0 - n h + n d_1 - n d_2 + L_0 - L) \right\}} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_0 - n h + n d + L) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (n_0 h_0 - n h + n d + L) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

ただし、 $d = d_1 - d_2$ 、 $l = L_0 - L$  とする。

(2) 試験片  $T$  に載荷した場合の光波の干渉

試験片  $T$  に載荷すると、これを通過する光波の振動は、 $T$  の中の2つの主応力方向の平面偏光に分かれる。いまこの2つの主応力を  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  とし、各主応力方向に振動する光波の屈折率をそれぞれ  $n_1$ 、 $n_2$  とすれば、 $n_1$ 、 $n_2$  は Maxwell-Neumann の法則によって、つぎの関係式を満足する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_0 + A\sigma_1 + B\sigma_2 \\ n_2 &= n_0 + B\sigma_1 + A\sigma_2 \end{aligned} \right\}$$

図-4 応力による試験片の厚み変化



ここに  $A$  ; 直接光弾性応力定数、 $B$  ; 横方向光弾性応力定数、とする。

いま、試験片に応力が作用して厚み  $h_0$  が  $h_s$  になったものとする。(図-4 参照) 光路 I における2つの主応力方向の振動 (今度は振動投影面がいったん投影された  $\xi$  軸から、2つの主応力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  の2方向の投影

面に変わる) に対する複素動径 Vector は、 $\alpha$  を  $\xi$  軸と  $\sigma_1$  方向とのなす角とすれば、それぞれつぎのようになる。

$\sigma_1$  方向の振動に対するもの;

$$\cos \alpha \cdot \frac{1}{2} e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 h_s + (h_0 - h_s) + n d_1 + L_0) \right\}}$$

$\sigma_2$  方向の振動に対するもの;

$$\sin \alpha \cdot \frac{1}{2} e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 h_s + (h_0 - h_s) + n d_1 + L_0) \right\}}$$

光路 II においては、コンペンセーター  $C$  は無応力状態にあるから光波の振動が実際に  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  の方向に分かれるわけではないが、光路 I との関連から便宜上、その振動を  $\sigma_1$  および  $\sigma_2$  の2方向の振動に分解して考えても差し支えない。すなわち光路 II における2つの主応力方向の振動に対する複素動径 Vector は、それぞれ

$$\sigma_1 \text{ 方向の振動 ; } \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}}$$

$$\sigma_2 \text{ 方向の振動 ; } \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}}$$

で表わされる。

したがって  $S_2$  の出口での干渉波は  $\sigma_1$  方向および  $\sigma_2$  方向のそれぞれの振動について、つぎのようになる。

$\sigma_1$  方向の振動;

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \alpha \left\{ e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 h_s + h_0 - h_s + n d_1 + L_0) \right\}} + e^{i\left\{ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (n h + n d_2 + L) \right\}} \right\}$$

$$\therefore J_1 = \Gamma_1 \Gamma_1' = \frac{1}{8} \cos^2 \alpha \left\{ 2 + e^{i\left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (n h - n_1 h_s + h_s - h_0 - n d - L) \right\}} + e^{i\left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 h_s - n h + h_0 - h_s + n d + L) \right\}} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \cos^2 \alpha \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 h_s - n h + h_0 - h_s + n d + L) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \left\{ (n_1 h_s - n h) + (h_0 - h_s) + n d + L \right\} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ただし、

$\Gamma_1$  ;  $\sigma_1$  方向の干渉合成振動に対する複素動径 Vector

$\Gamma_1'$  ;  $\Gamma_1$  の共軛複素動径 Vector

$J_1$  ;  $\Gamma$  の絶対値の2乗 ( $\sigma_1$  方向の振動光波の強さ)

$\sigma_2$  方向の振動;

$\sigma_1$  の場合と同様にして

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_2 h_s - n h + h_0 - h_s + n d + L) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \left\{ (n_2 h_s - n h) + (h_0 - h_s) + n d + L \right\} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

さて、角度  $\alpha$  は、 $S_1$  の入口における一つの特定光波連については、一定の値であって一般には  $\sin \alpha \neq \cos \alpha$  であるが、ある微小時間的経過については、それぞれ  $\alpha$  の値を異にするこのような多数の波連が、つぎつぎに進

行して来るので、時間的に平均して考えれば、 $\sin \alpha = \cos \alpha = 1/\sqrt{2}$  と考えることができる。

ゆえに結局  $S_2$  の出口において、光波が合流干渉して生ずる光の明るさ  $J'$  は、

$$\begin{aligned} J' &= J_1 + J_2 = \frac{1}{4} \times \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \left\{ 2 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \right. \\ &\quad \cdot (n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l) \\ &\quad \left. + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(n_1 + n_2)}{2} h_s - nh + h_0 - h_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + nd + l \right] \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(n_1 - n_2)}{2} h_s \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(A+B)}{2} p h_s + n_0 h_s - nh \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h_0 - h_s + nd + l \right] \times \cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s \right\} \end{aligned}$$

ここに、 $p = \sigma_1 + \sigma_2$ 、 $q = \sigma_1 - \sigma_2$  とする。

上式からわかるように、最終の干渉波の明るさは、一様な明るさ  $1 \times 1/4$  の上に上積みされた

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(A+B)}{2} p h_s + n_0 h_s - nh + h_0 \right. \\ &\quad \left. - h_s + nd + l \right] \cdot \cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s \end{aligned}$$

の値が示す縞模様である。上式をさらに書き換えれば、

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s \right] \times \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(A+B)}{2} \right. \\ &\quad \left. \cdot p h_s + n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \right] \dots \dots (4) \end{aligned}$$

として表わされ、一般に上式の第1項  $\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s$  はあたかも徐々に変化する振幅の項のように見做すことができる。これを換言すれば上式は縞模様  $\cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(A+B)}{2} p h_s + n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \right]$  を  $\cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s$  によって modulate した縞模様を示すことになる。

しかるに円偏光の明視野光弾性で等色線の示す明度分布  $I$  は

$$\begin{aligned} I &= 1 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2} = \cos^2 \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2) h_s \cdot \frac{1}{2} \right\} \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s \end{aligned}$$

であるから、式(4)は明視野光弾性の明線ごとに(すなわち、 $\frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s = n\pi$  となるごとに)符号を反転するが(実際には一様な上積み項  $1/4$  の明るさのために負になることはない)、明視野光弾性の等色線で modulate せられた縞模様となり、また、明視野光弾性の暗線上では(すなわち  $\frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  ごとに)、その値が一様に0となって(実際には一様な上積み項  $1/4$  のために一様な明るさ  $1/4$  となる)、この線上では

縞模様を示さないことになる。

このような結果は以下に述べる等厚線の測定と同時に等色線の測定をも同一試験片の実験で実施できる可能性を示すものであるが、各種の縞模様が錯雑することは観測を困難ならしめるので、このような困難を除き、実験観測の正確を期するためには等色線の縞次数測定は、単独に通常の光弾性実験にゆだね、常に

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B)(\sigma_1 - \sigma_2) h_s = \text{const} \approx 1$$

なる材料を選んで等色線の縞模様を除去することである。そのためには、 $A-B \approx 0$  なる材料を選ぶことが考えられる。このような意味から著者は、使用試験片材料として市販の Lucite 板を選んだ。

さて、後述するように実験検定の結果から、著者の使用した Lucite 板では、

$$A = 1.72 \times 10^{-3} \text{mm}^2/\text{kg}, B = 1.70 \times 10^{-3} \text{mm}^2/\text{kg}$$

かつ、 $\lambda = 5461 \times 10^{-7} \text{mm}$  であるから、

$$\therefore \alpha = \frac{A-B}{\lambda} = 0.03662 \text{ mm/kg}$$

また通常の模型実験では、試験片内の  $p$  または  $q$  の最大値は、 $1 \text{ kg/mm}^2$  程度である。したがって著者の使用した厚み  $h_0 \approx h_s \approx 60 \text{ mm}$  の Lucite 板では、

$$\cos \left[ \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s \right]_{\text{max}} = \cos 39^\circ.546 = 0.77$$

すなわち、 $\cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s = 1 \sim 0.77$  の値をとることがわかる。ゆえに  $J'$  の縞模様についてはつぎのように考えて差し支えない。

$$\begin{aligned} J' &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{(A+B)}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot p h_s + n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \left\{ \frac{(A+B)}{2} \right. \\ &\quad \left. \cdot p h_s + n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \right\} \dots (5) \end{aligned}$$

ただ、真の  $J'$  の縞模様は、 $\cos \frac{\pi}{\lambda} (A-B) q h_s \rightarrow 0.77$  になるところでは、上式が示す縞模様よりいくぶん全体的に白らけるだけである。

### (3) no load の縞と載荷時の縞との重ね合せによる Moiré Fringe

no load のときの縞次数  $N_0$  は式(1)より

$$N_0 = \frac{1}{\lambda} (n_0 h_0 - nh + nd + l)$$

載荷時の縞次数  $N'$  は式(5)より

$$N' = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{(A+B)}{2} p h_s + n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \right\}$$

したがって no load の縞写真と載荷時の縞写真との重ね合せによって得られる Moiré 現象の縞次数、すなわち  $|N' - N_0|$  は

$$\begin{aligned} |N' - N_0| &= \left| \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{(A+B)}{2} p h_s + (n_0 - 1)(h_s - h_0) \right\} \right| \\ &= \frac{|p| h_0}{\lambda} \left| \left\{ \frac{(A+B)}{2} \left( 1 - \frac{\nu}{E} p \right) - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} \right| \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに  $\nu$  は Lucite 板の poisson's ratio とする。

しかるに著者が使用した Lucite 板では

$$\nu = 0.4, \quad E = 300 \text{ kg/mm}^2, \quad n_0 = 1.5$$

であるから

$$\frac{\nu}{E} = 1.333 \times 10^{-3} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

$$(n_0 - 1) \frac{\nu}{E} = 6.666 \times 10^{-4} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

また、後述するように実験検定の結果から、著者の使用した Lucite 板では

$$\frac{(A+B)}{2} = 17.1 \times 10^{-4} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

$$\therefore \frac{(A+B)}{2} \left( 1 - \frac{\nu}{E} p \right) = 1.71 \times 10^{-3} \quad \times (1 - 1.333 \times 10^{-3})$$

したがって、 $\frac{(A+B)}{2} \frac{\nu}{E} p$  は最大の場合でも 2.2799

$\times 10^{-6}$ \* であって、 $\frac{(A+B)}{2} = 1.71 \times 10^{-3}$  および  $(n_0 -$

1)  $\frac{\nu}{E} = 6.666 \times 10^{-4}$  にくらべてはなほ小さいばかりでなく

$$\frac{(A+B)}{2} - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} = 1.0434 \times 10^{-3} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

にくらべてもきわめて小さい。

ゆえに式 (6) は近似的に

$$\begin{aligned} |(N' - N_0)| &= \frac{|p| h_0}{\lambda} \left| \left\{ \frac{(A+B)}{2} - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} \right| \\ &= \frac{|p| h_0}{\lambda} \left\{ \frac{(A+B)}{2} - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} \dots\dots(7) \end{aligned}$$

としてよい。

式 (7) において

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{(A+B)}{2} - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} = \beta \quad \dots\dots\dots(8)$$

と置けば、式 (7) は

$$(N' - N_0) = \beta h_0 p \dots\dots\dots(9)$$

となり、 $\beta$  はあたかも通常の光弾性等色線縞次数の式  $N = \alpha h_0 q$  の  $\alpha$  (光弾性感度係数) に対応する係数であることがわかる。

式 (9) から主応力  $p = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$  は

$$p = \frac{(N' - N_0)}{\beta h_0} \dots\dots\dots(10)$$

として求めることができる。

$N' - N_0$  は  $p = 0$  の位置から数えての縞次数であるが、自由周辺では、通常的光弾性等色線写真から  $p$  は

\* この値は  $\lambda = 5.461 \times 10^{-4} \text{ mm}$  にくらべてもはなほ小さい。

既知である。すなわち、 $N' - N_0$  の値の読み取りは自由周辺での縞次数を基準にして数えることによって常に可能である。

また、模型試験片の自由周辺の同一点について、光弾性等色線縞次数と同次数の Moiré 等厚縞次数を得るためには、式 (10) から、光弾性等色線測定時の載荷と、Moiré 等厚縞次数測定時の載荷との比を、 $\beta : \alpha$  ならしめればよく、この場合、それぞれの縞次数の読取値は、そのまま同一載荷の下における  $q$  および  $p$  の対応応力値に相当することになる。さらに、一般に光弾性等色線実験と Moiré 等厚縞実験とを別材料の模型についてそれぞれ、任意の載荷で行ない、一方の縞模様が他方の縞模様にくらべて、粗い場合には、この縞模様を補間法によって補って、模型の自由周辺上の各点で、等色線縞と等厚縞縞とがすべて一致するようにし、自由周辺上のある一点の等色線次数を基準にしてこの点で等色線次数と等厚縞 Moiré 次数を同じとして、それぞれの縞次数を読み取れば、その縞次数の値はそのまま等色線観測時の載荷と同一載荷の下における対応応力値  $q$  および  $p$  に相当し、 $q$  および  $p$  はそれぞれ同様な次式から算出することができる。

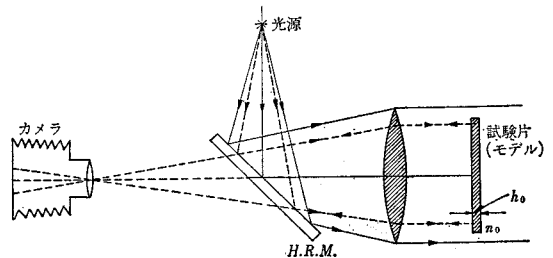
$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{N}{\alpha h_0} \\ p &= \frac{N' - N_0}{\alpha h_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ただし、 $N$  は光弾性等色縞次数、 $N' - N_0$  は等厚縞 Moiré 縞次数を自由周辺の各点で、等色線縞次数と一致させて読み取った Moiré 等厚縞の次数、 $p, q$  はそれぞれ光弾性等色観測時の載荷の下における使用材料中の、主応力および応力差の値、 $\alpha$  は光弾性等色線実験材料の光弾性感度とする。

### 3. 反射式干渉計との比較

Mach-Zehnder 干渉計の代りに 図-5 のような反射式干渉計を使用した場合には、Mach-Zehnder 干渉計では、使用試験片材料の厚みだけ光路 I (図-2 参照) の空気中の光路長が試験片で置き換えられ  $(n_0 - 1)h_0$  だけ延びるのに反し、反射式干渉計では干渉を起こす 2 つの光波の光路程で、試験片材料の厚み  $h_0$  の 2 倍に屈折率  $n_0$  を乗じた長さだけ、一方の光路長が他方より長くな

図-5 反射干渉計装置の概要図



る。この点が Mach-Zehnder 干渉計と異なる本質的な点である [2.(3)式(8) および 3.式(12) 参照]。

反射式干渉計の場合にも Mach-Zehnder 干渉計のときと同様に、試験片の無載荷時には;

$$J = \frac{1}{16} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (2n_0 h_0) \right\} = \frac{1}{8} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} 2n_0 h_0$$

試験片の載荷時には;

$$\sigma_1 \text{ 方向; } J_1 = \frac{1}{16} \cos^2 \alpha \cdot \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (2n_1 h_s) \right\}$$

$$\sigma_2 \text{ 方向; } J_2 = \frac{1}{16} \sin^2 \alpha \cdot \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (2n_2 h_s) \right\}$$

$$\therefore J' = J_1 + J_2$$

$$= \frac{1}{16} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 + n_2) h_s \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2) h_s \right\}$$

厚さ 6 mm の Lucite 板では、

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2) h_s &= \cos \frac{2\pi}{\lambda} (A - B)(\sigma_1 - \sigma_2) h_s \\ &= 1 \sim \cos 79^\circ.07 = 1 \sim 0.1893 \end{aligned}$$

すなわち、 $q$  の値の大きいところでは、Mach-Zehnder 干渉計の場合よりも白らけた状態となり、縞模様は不明瞭になる。

$$\begin{aligned} J' &\approx \frac{1}{16} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 + n_2) h_s \right\} \\ &= \frac{1}{8} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (n_1 + n_2) h_s \end{aligned}$$

$\therefore$  無載荷時と載荷時の縞の重ね合せによる Moiré Fringe;

$$\begin{aligned} |N' - N_0| &= \left| \frac{1}{\lambda} \{ (n_1 + n_2) h_s - 2n_0 h_0 \} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \{ [2n_0 + (A+B)p] \left( 1 - \frac{\nu}{E} p \right) h_0 - 2n_0 h_0 \} \right| \\ &= \left| \frac{p h_0}{\lambda} \left\{ (A+B) \left( 1 - \frac{\nu}{E} p \right) - 2n_0 \frac{\nu}{E} \right\} \right| \end{aligned}$$

しかるに、

$$(A+B) \left( 1 - \frac{\nu}{E} p \right) = 3.42 \times 10^{-3}$$

$$\cdot (1 - 1.333 \times 10^{-3}) (\text{mm}^2/\text{kg})$$

$$2n_0 \frac{\nu}{E} = 3.999 \times 10^{-3} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

$$(A+B) - 2n_0 \frac{\nu}{E} = -5.79 \times 10^{-4} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

ゆえに、 $(A+B) \frac{\nu}{E} p$  は Mach-Zehnder 干渉計のときと同様に省略してよい。

$$\begin{aligned} \therefore |N' - N_0| &= \left| \frac{p h_0}{\lambda} \left\{ (A+B) - 2n_0 \frac{\nu}{E} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ (A+B) - 2n_0 \frac{\nu}{E} \right\} = \beta' \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

と置けば

$$|(N_0 - N')| = \beta' h_0 p \dots\dots\dots(13)$$

すなわち、反射式干渉計の場合にも Mach-Zehnder 干渉計のときと同様な式が得られる。ただ、 $\beta'$  の値は、

式(8)の $\beta$ の値にくらべて第1項が2倍となり、第2項が $2n_0/(n_0-1) \approx 6$ 倍となるので(これは、反射式干渉計では一方の光路程が他方の光路程にくらべ、試験片材料中を往復することに起因する)、結局

$$\beta \approx 1.0434 \times 10^{-3} / 5.461 \times 10^{-4} = 1.91 \text{ mm/kg}$$

$$\beta' \approx 5.799 \times 10^{-4} / 5.461 \times 10^{-4} = 1.06 \text{ mm/kg}$$

すなわち、Mach-Zehnder 干渉計の方が反射式干渉計の場合よりも等厚線 Moiré 縞次数の観測に対して約2倍近く感度がよい。これを普通の Epoxy 樹脂の常温光弾性感度  $\alpha = 0.9 \text{ mm/kg}$  とくらべても約2倍感度のよいことがわかる。

また、反射干渉計の場合には、試験片が反射鏡の役目を果たしており、その2つの面の善悪が直接、ここで反射されるそれぞれの光線の方向に大きく影響するので、試験片材料として、特に表面の平滑平行なものを選択する必要があり、上述のように投影面上の明るさ(振幅)が小さくなり、縞模様が不明瞭になることも Mach-Zehnder 干渉計にくらべて不利な点である。

図-6 (a) 無負荷における円板試験片の干渉縞模様

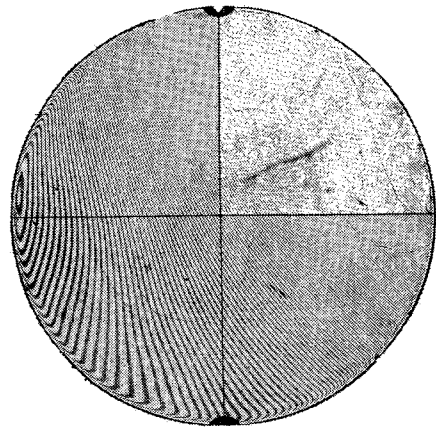


図-6 (b) 直径方向に 68.06 kg の圧縮力を加えた際の円板試験片(a)における干渉縞模様

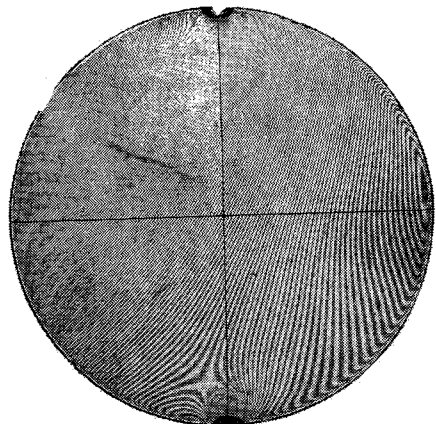


図-6 (c)

(a), (b) の干渉縞模様を重ね合わせによる Moire 縞模様

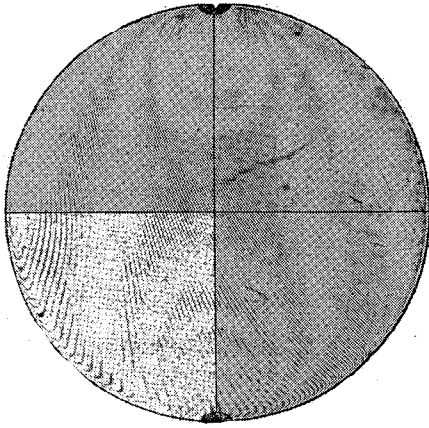


図-7 直径方向に圧縮力を受ける円板試験片の寸法関係図

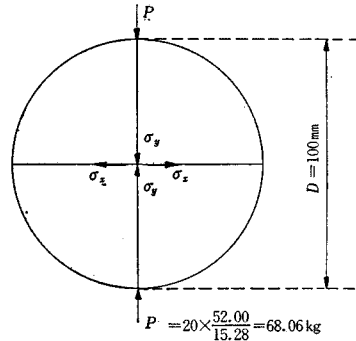
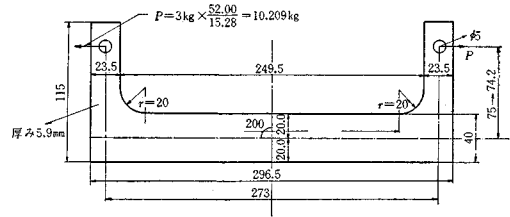


図-8 引張および曲げモーメントを受ける試験片の寸法関係図



#### 4. 光弾性定数の検定

##### (1) Lucite 円板の圧縮による定数 $\beta$ の検定

厚さ  $\approx 5.2$  mm の Lucite 板で、直径 100 mm の円板を作り、その鉛直な直径の上下両端に圧力  $p=68.06$  kg を載荷した場合と、無荷重の場合との二枚の干渉縞写真を作り、これらを重ね合わせて Moiré 縞を読み取った。Moiré 縞次数の端数は Moiré 縞から精密に読み取ることが困難なので、Moiré 縞は個々の縞写真の縞次数の移動の大体の数値を誤りなく読み取るのに利用し、Moiré 縞次数の端数は無荷重および載荷時の個々の縞写真の縞次数の移動数を、Moiré 縞次数を参考にして精密に読み取ることにした (図-6 参照)。

この場合、円板中心 0 における応力は、弾性学の公式

により、

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi h D}$$

$$\sigma_y = \frac{-6P}{\pi h D}$$

である。ただし、 $h$ ; 円板の厚み、 $D$ ; 円板の直径、 $P$ ; 鉛直な直径の両端に加えられた圧力とする。今回の実験の場合には

図-9 (a) 無負荷状態での引張曲げ試験片の干渉縞模様

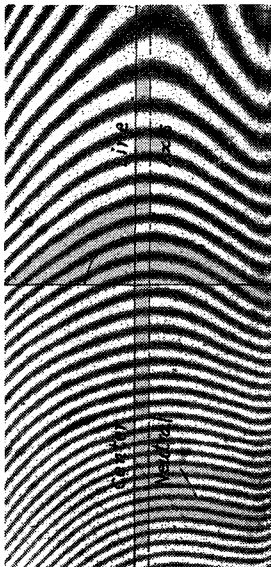


図-9 (b) 荷重 10.20 kg を加えた際の引張曲げ試験片 (a) の干渉縞模様

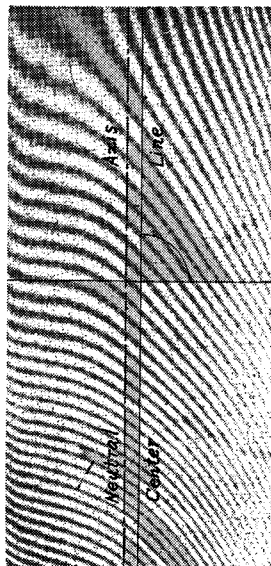
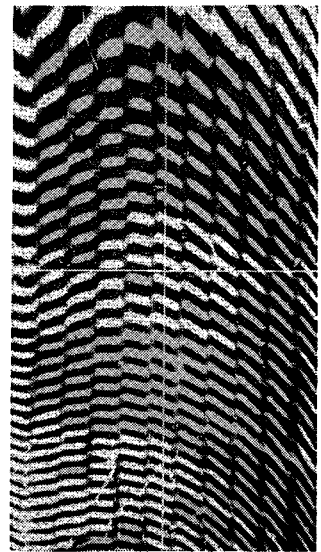


図-10 図-9 (a) および (b) の重ね合わせによって得られた Moiré 縞模様



$$p = \sigma_x + \sigma_y = -\frac{4P}{\pi hD} = -0.16665 \text{ kg/mm}^2$$

実験の結果,  $N' - N_0 = 1.7$

$$\therefore \beta = \frac{N' - N_0}{ph_0} = \frac{1.7}{0.16665 \times 5.2} = 1.96 \text{ (mm/kg)}$$

$$\therefore \lambda\beta = \left\{ \frac{(A+B)}{2} - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} \text{ において}$$

$$\lambda = 5.461 \text{ \AA}, \nu = 0.4, E = 300 \text{ kg/mm}^2, n_0 = 1.5$$

と置いて

$$\frac{(A+B)}{2} = 1.7369 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2/\text{kg)}$$

が得られる。

(2) 引張および曲げの試験片による定数  $\beta$  および  $A, B$  の検定

図-8 のような引張, 曲げの試験片を Lucite 板 (厚さ 5.9 mm) で作り, 無荷重および載荷時の縮写真から Moiré 縞を作る実験を (A) 光路の出口 (投影レンズ直前) に検光子を入れない場合, (B) 光路出口に検光子の偏光振動面を  $\sigma_1$  方向にして挿入した場合, (C) 光路出口に検光子の偏光振動面を  $\sigma_2$  方向 (水平方向) にして挿入した場合, の3つの場合について実施した。

a) 光路出口に検光子を入れない場合 図-9 (a) は no load における干渉縞, (b) は荷重 10.209 kg における干渉縞を示し, 図-10 は図-9 (a), (b) の重ね合せによる Moiré 縞の状況を示す。

$$M = 10.209 \times 74.2 = 757.508 \text{ (kg}\cdot\text{mm)}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} \times 5.9 \times 40^3 = 3.1466 \times 10^4 \text{ (mm}^4\text{)}$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} y = \frac{757.508}{3.1466 \times 10^4} \times 20 = 0.4815 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

図-12 (a)  $0^\circ$  の方向 (鉛直方向) に偏光板をそう入した際の図-9 (a) の試験片の干渉縞模様

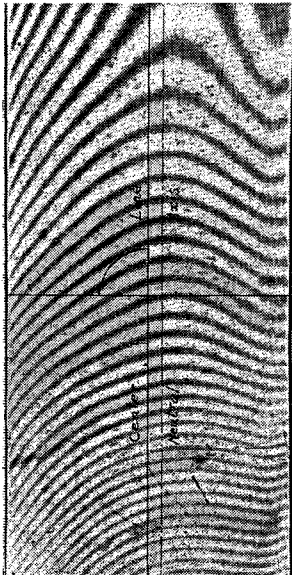


図-12 (b)  $0^\circ$  の方向 (鉛直方向) に偏光板をそう入した際の図-9 (b) の試験片の干渉縞模様

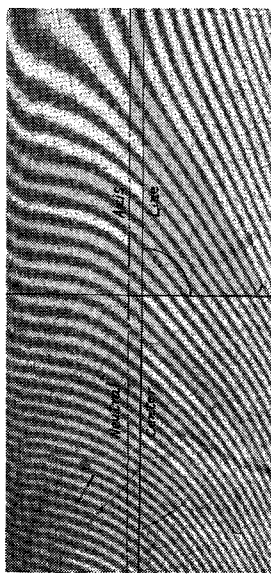
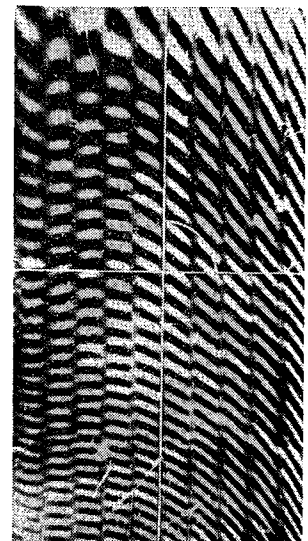


図-13 図-12 (a) および (b) の重ね合せによって得られた Moiré 縞模様



$$\frac{P}{A} = \frac{10.209}{5.9 \times 40} = 0.0433 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

$$\therefore \sigma_1' = 0.4815 + 0.0433 = 0.5248 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

$$\sigma_1'' = 0.4815 - 0.0433 = 0.4382 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\therefore 2\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_1'' = 0.9630 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

実験の結果,  $2(N' - N_0) = 10.9$  (図-9, 図-10 参照)

$$\therefore \beta = \frac{10.9}{0.9630 \times 5.9} = 1.918 \text{ (mm/kg)}$$

$$\frac{A+B}{2} = 5.461 \times 10^{-4} \times 1.918 + 6.666 \times 10^{-4}$$

$$= 1.714 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2/\text{kg)}$$

b) 光路出口に検光子の偏光振動面を  $\sigma_1$  方向にして挿入した場合

図-12 (a) は no load における干渉縞, (b) は荷重 10.209 kg における干渉縞を示し, 図-13 は図-12 (a), (b) の重ね合せによる Moiré 縞の状況を示す。

今回は検光子を光路出口 (投影レンズ直前) に挿入しているので,  $\sigma_2$  方向の振動光波は消失し, 2. (2) の  $J_2$  [式 (3)] の値は 0 となる。したがって  $J'$  において  $J_2$  が占める効果はなくなり式 (5) はつぎのようになる。

$$J' = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(A\sigma_1 + B\sigma_2)h_s] \right\}$$

図-11 図-8 の試験片の中央横断面における応力分布図

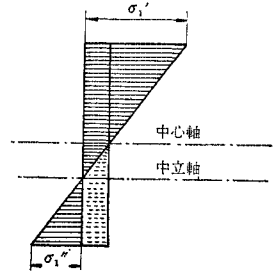




図-14 (a) 90°の方向(水平方向)に偏光板をそ入した際の図-9 (a)の試験片の干渉縞模様

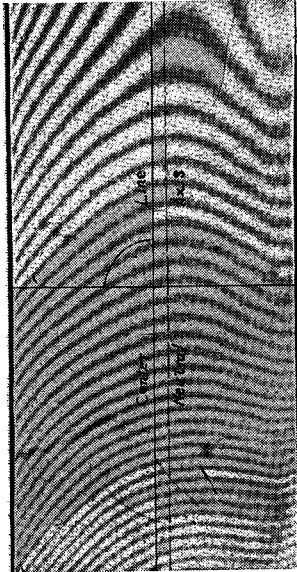


図-14 (b) 90°の方向(水平方向)に偏光板をそ入した際の図-9 (b)の試験片の干渉縞模様

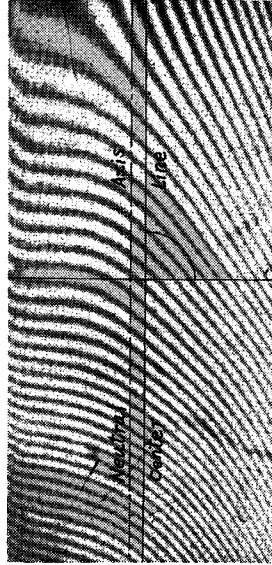
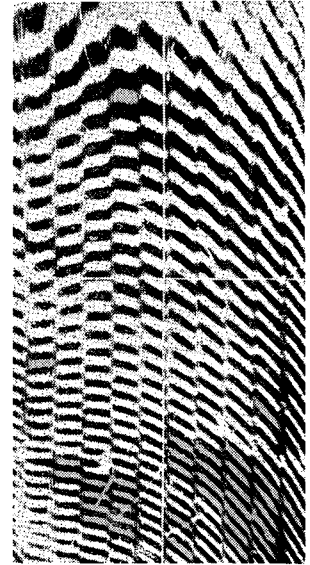


図-15 図-14 (a) および (b) の重ね合わせによって得られた Moiré 縞模様



$$+n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \Big\} \\ = \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} \{ (A \sigma_1 + B \sigma_2) h_s \\ + n_0 h_s - nh + h_0 - h_s + nd + l \}$$

∴ 式 (6) は

$$N' - N_0 = \frac{h_0}{\lambda} \left\{ (A \sigma_1 + B \sigma_2) \left( 1 - \frac{\nu}{E} p \right) - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} p \right\} \\ \doteq \frac{h_0}{\lambda} \left\{ (A \sigma_1 + B \sigma_2) - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} p \right\} \\ = \frac{h_0 \sigma_1}{\lambda} \left\{ A - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$[\because \sigma_2 = 0, p = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_1]$$

一方載荷状況は前記 a) の場合と同様であるから、

$$2 \sigma_1 = 0.9630 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

実験の結果から、 $2(N' - N_0) = 11.0$

$$\therefore \frac{1}{\lambda} \left\{ A - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} = \frac{11.0}{0.9630 \times 5.9}$$

$$= 1.936 \text{ (mm/kg)}$$

$$\therefore A = 5.461 \times 10^{-4} \times 1.936 + 6.666 \times 10^{-4} \\ = 1.724 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2\text{/kg)}$$

c) 光路出口に検光子の偏光振動面を  $\sigma_2$  方向にして挿入した場合 図-14 (a) は no load における干渉縞、(b) は荷重 10.209 kg における干渉縞を示し、図-15 は図-14 (a)、(b) の重ね合わせによる Moiré 縞の状況を示す。

この場合には上記 b) の場合と同様にして

$$N' - N_0 = \frac{h_0}{\lambda} \left\{ (B \sigma_1 + A \sigma_2) - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} p \right\} \\ = \frac{h_0 \sigma_1}{\lambda} \left\{ B - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

を得る。

実験の結果から、 $2(N' - N_0) = 10.7$

$$2 \sigma_1 = 0.9630 \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda} \left\{ B - (n_0 - 1) \frac{\nu}{E} \right\} = \frac{10.7}{0.9630 \times 5.9}$$

$$= 1.883 \text{ (mm/kg)}$$

$$\therefore B = 5.461 \times 10^{-4} \times 1.883 + 6.666 \times 10^{-4} \\ = 1.695 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2\text{/kg)}$$

(3) 定数検定結果の総括

以上 (1)、(2) の実験から得られた結果を総合して見るに、(1) の実験は (2) の実験にくらべてきわめて大きな荷重 ((2) の荷重 10.209 kg に対し、(1) の荷重 68.06 kg) を載荷したにもかかわらず、測定点の応力  $p$  がきわめて小さく ((2) の場合の 0.9630 kg/mm<sup>2</sup> に対し (1) の場合は 0.16665 kg/mm<sup>2</sup>)、したがって、繰り出しの移動読み取り数値が (2) の場合にくらべてきわめて小さい ((2) の場合の 10.9 にくらべて (1) の場合はわずかに 1.7 である)、したがって実験結果による定数計算値は (2) の場合の方が (1) の場合よりもはるかに精度が良い。ゆえに使用材料 Lucite の定数検定値としては (2) の場合の値の有効数字 4 桁目を 4 捨 5 入して

$$A = 1.72 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2\text{/kg)}$$

$$B = 1.70 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2\text{/kg)}$$

$$\frac{(A+B)}{2} = 1.71 \times 10^{-3} \text{ (mm}^2\text{/kg)}$$

$$\alpha = \frac{(A-B)}{\lambda} = \frac{2 \times 10^{-5}}{5.461 \times 10^{-4}} = 0.0366 \text{ (mm/kg)}$$

$$\beta = 1.918 \doteq 1.92 \text{ (mm/kg)}$$

$$\dots\dots\dots (16)$$

を採用することとし、以下の関連論文の干渉計による等厚線の実測結果に適用することにする。

### 5. 従来の論文に対する検討および修正

干渉計を用いて二次元応力問題の等厚線を求めることについて、従来発表せられた諸論文に対して、著者が本稿において修正または検討を試みた諸点を列挙すればつぎのとおりである。

(1) 在来の論文においては、いずれも光の反射、屈折、干渉の際における振幅の変化、すなわち、明かるさの変化についての記述(考察および論拠)が曖昧または正当でない(本論文 2.(1) a), b), c) 参照)。

(2) G. Mesmer の論文(本論文末尾参考文献 1)には、本論文 3. 図-5 の装置を用い、著者とほぼ同様な試験片材料(プレキシグラス)を使用して、干渉 Moiré 縞を観測したものが述べられている。しかし、その中で氏は、試験片材料(プレキシグラス)の屈折率  $n$  が載荷のあるなしによって変化しないものと仮定し、等厚線応力値(主応力和  $p$  の値)を算出する公式として、

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2) = (N' - N_0) \times \frac{E \lambda_0}{2n\mu t} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 $\lambda_0$ ; 使用光波長 (Sodium arc の波長=5890  $\times 10^{-7}$ mm)

$n$ ; プレキシグラスの屈折率 (=1.5)

$E$ ; プレキシグラスのヤング率

$\mu$ ; プレキシグラスの Poisson's ratio

$$\frac{E}{\mu} = 1.2 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 = 8.43 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2$$

( $E=300 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\mu=0.4$  とすれば

$$\frac{E}{\mu} = 7.50 \times 10^3 \text{ kg/mm}^2 \text{ である})$$

$t$ ; 使用試験片材料(プレキシグラス)の厚み ( $t=3 \text{ mm}$ )

を誘導している。

氏が使用したプレキシグラスは、著者の実験に用いた Lucite 板とほとんど同一材料と考えられ、上記式 (17) を著者の誘導した 3. 公式 (12), (13) と比較するに、氏の式 (17) は著者の式 (12), (13) においてちょうど  $(A+B)=0$  と置いたものに相当している。

しかるに著者が実験した結果は、本論文 4. のごとく、

$$A+B=3.42 \times 10^{-3} (\text{mm}^2/\text{kg}),$$

$$2n_0 \frac{\nu}{E} = 3.999 \times 10^{-3} (\text{mm}^2/\text{kg})$$

であって、 $(A+B)$  の値は  $2n_0 \frac{\nu}{E}$  の値に対して無視することができないことがわかる。

すなわち、Maxwell-Neumann の式

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= n_0 + A \sigma_1 + B \sigma_2 \\ n_2 &= n_0 + B \sigma_1 + A \sigma_2 \end{aligned} \right\}$$

において、

$$n_0 \approx 1.5$$

$$A \approx 1.72 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

$$B \approx 1.70 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

$$(\sigma_1)_{\max} \text{ or } (\sigma_2)_{\max} = 1 \text{ kg/mm}^2$$

とすれば、 $A \sigma_1 + B \sigma_2$  または、 $B \sigma_1 + A \sigma_2$  なる屈折率の変化量を示す項の値は一般に  $n_0$  の値にくらべてはなはだ小さいけれども、著者の誘導した式 (12) において第 1 項

$$p h_0 \times \frac{1}{\lambda} \{ (A+B) \}$$

は、試験片の初めの厚み  $h_0$  中における主応力和  $p$  による屈折率の変化のために増加した光路程(波長単位)に相当する値を表わし、第 2 項

$$p h_0 \times \frac{1}{\lambda} \left\{ -2n_0 \frac{\nu}{E} \right\}$$

は試験片の厚み  $h_0$  の、主応力和  $p$  による変化量と試験片材料の初めの屈折率  $n_0$  との積による光路程(波長単位)を表わす。したがって試験片の厚みの変化量と屈折率  $n_0$  の変化量とにもとづく光路程は上記の 2 つの光路程にくらべて、はなはだ小さく、無視することができるけれども、

試験片の厚み  $h_0$  と屈折率  $n_0$  の変化量  $\{ p \times (A+B) \}$  との積

すなわち、式 (12) 第 1 項は第 2 項

試験片の厚みの変化量と屈折率  $n_0$  との積

にくらべて無視することはできない。換言すれば、プレキシグラスの場合にも屈折率の変化量を無視して  $A+B=0$  とすることは不可である。

ただし、プレキシグラスの場合には、本論文、式 (16)

のごとく、 $\alpha = \frac{A-B}{\lambda} = 0.0366 \text{ mm/kg}$  であるから、等色

線次数  $N = \alpha g h_0$  に対しては  $\alpha \neq 0$  として差し支ない。

(3) 西田・斎藤両氏は Mach-Zehnder 干渉計を用い、diallyl phthalate 樹脂で作った試験片で等厚線測定実験を行なった方法について報告されている(本論文末尾参考文献 4)。両氏の実験では、使用材料が著者の使用した Lucite とは異なっているが、両氏は等厚線応力値(主応力和  $p$  の値)を算出する公式として次式を誘導している。

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{2\lambda}{t} \cdot \frac{N' - N_0}{A+B} \dots\dots\dots (18)$$

ただし、 $t$ ; 試験片材料の厚み

$\lambda$ ; 使用光の波長

$N' - N_0$ ; 干渉縞の載荷による移動数

$A, B$ ; Maxwell-Neumann の式における光弾性  
応力定数

上式を著者の誘導した式 (8), (10)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{(A+B)}{2} - (n_0-1) \frac{\nu}{E} \right\} \dots (8) \\ p &= \frac{N' - N_0}{\beta h_0} \dots \dots \dots (10) \end{aligned} \right\} \text{(再出)}$$

と比較するに式(18)は、著者の公式においてちょうど  $(n_0-1) \frac{\nu}{E} = 0$  と置いてこの項を無視したものに相当している。diallyl phthalate について両氏が同論文中で述べているように  $E=300 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\nu=0.5$ ,  $n_0=1.5$ ,  $A=1.49 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$ ,  $B=1.05 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$ , とすれば、

$$\frac{(A+B)}{2} = 1.27 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

$$(n_0-1) \frac{\nu}{E} = 8.333 \times 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

$$\therefore \frac{(A+B)}{2} - (n_0-1) \frac{\nu}{E} = 4.367 \times 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

すなわち、

$$(n_0-1) \frac{\nu}{E} = 8.333 \times 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{kg} \text{ は}$$

$$\frac{(A+B)}{2} = 1.27 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg} \text{ に}$$

対して無視できるほど微小でないばかりではなく、

$$\frac{(A+B)}{2} - (n_0-1) \frac{\nu}{E} = 4.367 \times 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

に対しては、 $(\beta)$ の数値の算出結果に対しては)とうてい無視し得ないものであることは明らかである。

(4) 本論文末尾参考文献3)において D. Post は、半透明平行平面硝子板の試験片板(CR-39樹脂)をそう入し、それらの間の薄い空気層の間で、光の反射による干渉を行なわせ、その外側に偏光板をそう入して、個々の主応力値を分離測定する実験について報告を行なっている。その結果主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_2$  を算出するための元の公式として次式を誘導している。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= \frac{\psi_{\sigma_1} + \psi_{\sigma_2}}{2 t_s \left[ (A+B) - 2 \frac{\nu}{E} (n_0-1) \frac{t_0}{t_s} \right]} \dots (19) \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{\psi_{\sigma_1} - \psi_{\sigma_2}}{2 t_s (A-B)} \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$\psi_{\sigma_1}, \psi_{\sigma_2}$ ; 試験片に載荷することによって生ずる光路長の変化を波長を単位として測定した値、すなわち、複屈折性試験片に載荷することによって生ずる綱次数の移動量(それぞれ偏光板の偏光振動面を  $\sigma_1$  方向または  $\sigma_2$  方向としたときの値を示す。)

$t_s$ ; 載荷時の試験片の厚み(光波長単位)

$t_0$ ; 無載荷時の試験片の厚み(光波長単位)

$A, B$ ; Maxwell-Neumann の式における光弾性応力定数

$E$ ; 試験片材料のヤング率

$\nu$ ; 試験片材料の Poisson's ratio

$n_0$ ; 試験片材料の無載荷時の屈折率

上記の式(19)を見るに、第1式は著者が Mach-Zehnder 干渉計について誘導した式(8), (9)および第2式は光弾性等色線公式にきわめて酷似している。その相違のよって来る所以は、D. Post の使用した実験装置が著者の使用した Mach-Zehnder 干渉計と異なり、2つの平面半透明鏡の間で、光が何回か反射して折返すために、式(19)の分母および分子がそれぞれ著者の誘導した公式(8)および(9)の何倍かになっているに過ぎない。

D. Post の方法では、 $\sigma_1, \sigma_2$  を直接測定できて、便利なようであるが、このような方法で  $\sigma_1, \sigma_2$  を分離して測定するためには、試験片内の主応力方向が全面にわたって一定で、既知である場合以外は試験片を主応力方向のほぼ一定ないくつかの部分に分けて、しかもその各部分について偏光板を  $\sigma_1$  方向または  $\sigma_2$  方向として、実験をくり返し、それらの縞写真と無荷重時の縞写真とを重ね合せて Moiré を作り、 $\psi_{\sigma_1}, \psi_{\sigma_2}$  のおのおのを測定した後、これをもとに  $\sigma_1, \sigma_2$  を計算するか、または、上記の  $\psi_{\sigma_1}$  または  $\psi_{\sigma_2}$  のいずれか1つの測定値と偏光板を挿入しないで実験した時に1回で全面的に得られる等色線の Moiré [式(19)の第2式] による  $N = \psi_{\sigma_1} - \psi_{\sigma_2}$  の測定値とから  $\sigma_1, \sigma_2$  を計算するか、しなければならない。

したがって主応力方向が未知であるか、また仮りに既知であったにしても、その方向が試験片内で錯雑している一般の場合には、光弾性等色線実験と Mach-Zehnder 干渉計による等厚線実験とを併用する方法にくらべて、むしろはるかに繁雑である。

(5) 本論文末尾参考文献6)において西田・斎藤両氏は無載荷時に光学的に完全に平面且両面平行な複屈折性板(Diallyl Phthalate)の試験片を Mach-Zehnder 干渉計に(偏光板挿入せず)適用して、1回の実験で等色線縞と等厚線縞とを同時に得た実験について報告されている。しかし、両氏もこのような試験片を得ることは、実際にはなかなか困難であるとして、通常得られる程度の両面平行な平板(Diallyl Phthalate)で実験を行ない、無載荷時の干渉縞写真と載荷時の干渉縞写真とを重ね合せて、比較的粗い間隔で現われる等色線縞の間に、通常これよりも細かい等厚線の Moiré 縞を同時に出現させる方法を提唱されている。これは著者の実験法と本質的には同じであるが、ただ、使用材料が Lucite と異なり複屈折性であるために等色線縞がさらに加わったものである。この方法はある場合には確かに推奨に値する方法であるが、等色線縞と等厚線縞とが混在するために、一般にはそれぞれの次数の読み取りの際に困難を感じることが多く、また読み取り精度もそれだけ低下せざるを得ない。

また両氏論文中には、この方法によって測定した種々

の材料の光弾性常数値が Table 1 として掲載せられている。いま、それを単位を変更して転載すれば（使用波長  $\lambda=5460.6 \text{ \AA}$ ）

	A ( $\times 10^{-5}$ mm <sup>2</sup> /kg)	B ( $\times 10^{-5}$ mm <sup>2</sup> /kg)	$\alpha = \frac{A-B}{\lambda}$ (mm/kg)	$\frac{A+B}{2}$ ( $\times 10^{-5}$ mm <sup>2</sup> /kg)
Plexiglass	-33.7	-28.8	-0.0879	-31.3
Celluloid	-36.2	-49.5	+0.244	-42.9
DAP	3.77	-39.1	+0.785	-17.7
Epoxy	6.02	-50.1	+1.03	-22.0

となるが、上記の Plexiglass に対する値は著者が実験で得た値と大きく相違しているばかりでなく、本論文末尾参考文献 11), p. 574, 第2表の数値と異なり、また D.A.P. の値は両氏自身が参考文献 4) において Diallyl Phthalate (D.A.P.) について実験の結果報告せられている値

$$A = 149 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{kg} = 1.49 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

$$B = 105 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{kg} = 1.05 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

$$C = A - B = 44 \times 10^{-5} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

（したがって  $\alpha = \frac{A-B}{\lambda} = 0.806 \text{ mm/kg}$ ）とも大きく相違しているので、何かの誤りではないかと思う。

また両氏はさらに両氏提唱の実験方法を三次元にも拡張できることを述べておられるが、この実験方法で三次元の場合に光学的に平面かつ両面平行な slice を得ることは実際上困難であり、そのため使用材料の無載荷時の屈折率  $n_0$  と等しい屈折率の液槽の中に slice 試験片を浸漬して、実験を行なったものとしても、これに使用する浸漬液の容器の壁は光学的に平面かつ両面平行なものでなければならず、このようなことは実際問題としてほとんど不可能といわなければならない。さらに両氏は応力を凍結した slice 試験片を浸漬液の中で、液とともに加熱アニールして自由に変形させた後、室温まで徐冷し、Mach-Zehnder 干渉計にかけた場合、干渉縞を得られるものとして、同論文内の式 (41) を提出されているが、この式は浸漬液を用いず空気中で干渉計にかけた場合にしかも式中の  $n_0$  の代りに  $n_0 - n$  と置いたとき成立する式であって、屈折率  $n_0$  の浸漬液に浸漬して実験した場合には、 $n_0 - n$  の代りに  $n_0 - n_0$  を用いなければならないから、結局このときの縞次数  $N_{PA} = 0$  (全面)、すなわち干渉縞は皆無とならざるを得ないと考えられる。したがって、一点  $P$  の主応力を解析するためには、点  $P$  に関する2つの slice を作製しただけでは解析式が不足であって、一般に点  $P$  に関する3つの slice 試験片を用意しなければならないことになる。なおまた、3つの slice について成立する式から得られる解は、3つの slice の交点  $P$  についてのみ成立するものであって、1つの slice の全面にわたって成立するものではない。すなわちこのような解析は point by point の解析にならざるを得ないことになる。以上要するに三次元の場合に

は、このような実験が可能なものとしてもきわめて煩雑な手数を要するものである上に、これに使用する光学的に平面かつ両面平行な浸漬液容器を準備することがほとんど不可能なので、この方法の三次元への拡張は理論的には興味はあるが、実用性は乏しいといわねばならぬ。

## 6. 概要総括

(1) 本論文においては、而後の関連文説述上の根拠として、二次元応力試験片（模型）の等厚線を明瞭、精確かつ容易に求める方法について述べ、その結果、試験片の全面にわたって  $p = \sigma_1 + \sigma_2$  の値を求める公式を誘導した。

(2) 而後の関連論文中で適用に備えるため、使用実験材料 Lucite の直接光弾性応力定数  $A$  および横方向光弾性応力定数  $B$  の値を実測し、その実測値として  $A = 1.72 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$ ,  $B = 1.70 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$  を得た。

(3) 光弾性による等厚線の測定に関する従来の論文について検討修正を加えた。

## 参考文献

- Mesmer, G.: "The Interference screen method for isopachic patterns (Moiré method)", Proc. S.E.S.A. Vol. XIII, No. 2, 1956 (p. 21~p. 26).
- Post, D.: "A new photoelastic interferometer suitable for static and dynamic measurements", Proc. S.E.S.A. Vol. XII, No. 1, 1954 (p. 191~p. 212).
- Post, D.: "Photoelastic evaluation of individual principal stresses by large field absolute retardation measurements", Proc. S.E.S.A. Vol. XIII, No. 2, 1956 (p. 119~p. 132).
- Nishida, M. and Saito, H.: "Photoelastic Principal Stress Analysis by Interferometer", Scientific papers of the Institute of Physical and Chemical Research, Vol. 37, No. 5, 1961 (p. 297~p. 305), Tokyo Japan.
- Nishida, M. and Saito, H.: "A New Interferometric Method of Two-dimensional stress Analysis", Experimental Mechanics, December 1964 (p. 1~p. 11).
- Nishida, M. and Saito, H.: "A New Method of Experimental Stress Analysis by Interferometer", Scientific papers of the Institute of Physical and Chemical Research, Vol. 59, No. 1, March. 1965 (p. 5~p. 20), Tokyo Japan.
- Favre, H.: "Sur une Nouvelle Methode Optique de Determination des Tension Interieures". Revue d'Optique, Vol. 8, 1929 (p. 193, 241, 289).
- Faver, H. and Schumann, W.: "A Photoelectric-Interferometric Method to determine sparately the principal stresses in Two-dimensional states and possible applications to surface and thermal stresses". Photoelasticity, Proc. International Symposium, 1961, Frocht M.M., Ed., Pergamon Press Pub. 3-25, 1963.
- Brachts, J.H.A. and Soehrens, J.E.: "Direct Optical Measurement of Individual Principal Steresses", J. Applied Physics, Vol. 10, 1939 (p. 242~p. 247).
- Frocht, M.M.: **Photoelasticity**, John Wiley and Sons. Inc. New York, Vol. I, 1941, p. 206; Vol. II, 1948, p. 118.
- 応力測定技術研究会編, 応力測定法 (朝倉書店), p. 574 第2表. (1966.7.22・受付)