

# 土の剛塑性理論における極限定理と応用

TWO EXTREMUM THEOREMS AND THEIR APPLICATIONS FOR  
THE PLASTIC RIGID ANALYSIS IN SOIL MECHANICS

山 口 柏 樹\*  
By Hakuju Yamaguchi

**要旨** 土のような材料が剛塑性体としての仮定の下に破壊する荷重を論ずるには, Drucker および Prager の崩壊定理が有用であるがこの定理は金属塑性理論で証明されている上下界定理を定性的に述べたものである。

本論文では、自重および摩擦強度が無視できない土のような塑性材料における二つの極限定理（上界, 下界定理）を解析的に導き、かつ応力および速度に不連続性がある場合の適用性を吟味し、また応力解の一意性をも論じた。

## 1. はしがき

土の塑性力学では厳密解をうることが一般に困難である。したがって一つの解が、応力および変位に関するすべての境界条件を満足していないとも、それなりに有用な価値をもつものが少なくない。たとえば基礎の支持力に関する塑性解は一つの典型であって、金属の剛塑性論で導かれた Prandtl のポンチの解を基本とし、土のように摩擦強度があり、しかも重力の影響が大きく効くような材料の押込み問題を議論するわけであって、これによって支持力公式が提案され、これは基礎地盤の極限支持力を推定する上に広く利用されていることは周知のことなりである。

しかしながらこのようにして求めた解が金属に対する解の本質的な修正であるのか、形式的延長となっているに過ぎないのか、換言すると一意性が保証された正解であるのかは確かめられていない。同時に正解でないとしたとき、どの程度の近似解であるのか、すなわち土の塑性理論における極限解析の定理が確立した形で与えられていなため、近似解であるとしてもその評価が一般に困難である現状といってよからう。

金属材料の剛塑性理論では変形する塑性域内での応力の唯一性について Hill (1951) が証明を与えているが、塑性域での速度解の一意性や、剛性域での応力解、速度解については決定的なことがいえない (Hill, 1956)。

また極限定理としては不界定理または最大塑性仕事の定理が知られている。これは正解における表面力のなす仕事率が最大なることを保証するものである (Hill, 1948)。本定理は応力や速度場に不連続があっても成り

立つものであって、正解が未知であるとき、えられた一つの不完全な解が正しい降伏荷重を越えることがない、すなわち正解の下限として位置づけられることを意味するものである。したがってポンチの問題での不完全解は安全側の値を与えるものとなる。

つぎに上下界定理として知られているものは崩壊定理ともいわれ、Drucker, Prager 等 (1951) は Prandtl-Reuß 材料に関し、比例負荷を加える状態で議論し i) つりあい条件と境界条件を満足し、かつ物体内部至るところ降伏条件に達しないことが保証されるような応力解が見い出されるなら物体は降伏しない、ii) ある適合する速度場において外力の仕事率が、内部的エネルギーの消散率に等しいか、これを越えるときは崩壊が生ずる、ことを述べている。

彼等はこの定理を拡張し、いかなる完全塑性体であっても、それがどんなひずみ履歴のある場合でも適用しうることを示した (Drucker Prager, 1952)。

しかし土のような圧縮性材料での解析的証明は与えておらず、たとえば Drucker, Prager\* (1952) は土質力学におけるリミット デザインの具体的な問題を取り上げているが、上界定理は前述の ii) を暗黙の中に仮定している点あいまい性が残されているほか適用性も限定されている。

本論文ではこのような基本的問題に関して、いわゆる Mohr-Coulomb の降伏条件にしたがう土の降伏荷重に関する二つの極限定理を確定した解析形式で記述し、かつ解の一意性の問題を論じるものである。

Mohr-Coulomb の降伏条件式が二次元平面ひずみ状態の破壊法則を表わすとき、式に含まれる強度定数（粘着力、せん断抵抗角）が何を意味し、いかにして測定すべきかは重要な問題であるが、現在の段階では決定的な所論はないようと思われる。たとえば三軸対称圧縮せん断では中間主応力の影響は不明であるし、一面せん断では中間主応力のみが最小、最大主応力の値も自由に調節できない。しかしながら近時各方面で試みられつつある純粋せん断試験の結果と三軸試験のそれを対比した Bishop などの見解 (Bishop, 1966) によると、三軸試験は平面ひずみ状態で破壊する場合のせん断抵抗角を 1~4° 程度過小に評価する傾向にあるといわれている。もち

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 土木工学科

ろん各供試体の破壊時の間げき比が同一でない整理方式による有効応力に関する強度定数 ( $c', \phi'$ ) よりも、土の塑性理論では Hvorslev のパラメーター ( $c_r, \phi_r$ ) を採用するのが合理的であることは筆者がすでに強調したところである（山口, 1966）。以上のことから二次元ひずみ状態での Hvorslev の強度定数をいかに推定すべきかは今後の問題として残るとしても、本論文で考える強度定数はこの意味のものであることは強調したい。

## 2. 準備事項

弾性係数  $E, G$  が無限大である剛塑性材料が変形可能となり初めるときの荷重を降伏点荷重という。本論文では間げき圧は考えないとする。

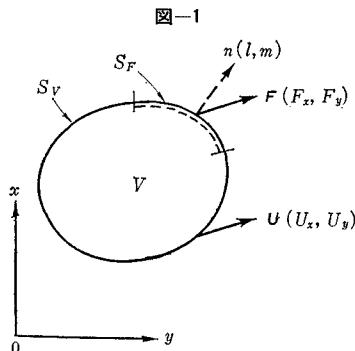
二次元応力平衡方程式を満たし、境界  $S$  上の一部  $S_F$  で与えられた表面力と一致する応力解で、物体内では降伏条件にしたがう塑性状態か、降伏条件を越えない剛性域または静止域であるようなものを可容応力と呼ぶ。すなわち直応力は引張りを正とするとき（図-1）に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= r \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$S_F \text{ 上: } \sigma_x l + \tau_{xy} m = F_x, \sigma_y m + \tau_{xy} l = F_y \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{aligned} A \text{ 内: } f &= \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \\ &- \left( c_r \cos \phi_r - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \phi_r \right)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3)$$

を満足する応力が可容応力である。



つぎに変形域の要素の速度  $v(u_x, u_y)$  から導かれるひずみ速度テンソルが等方性条件と圧縮性条件を表わす二つの基本式を満足し、かつ図-1の残りの境界  $S_V$  上で与えられた速度  $U(U_x, U_y)$  と一致するとき  $v$  を可容速度と称される。このことを解析的に表わそう。

まず、

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, 2\dot{\tau}_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4)$$

Mises の塑性ポテンシャルと降伏関数  $f$  が一致するとの仮定によると、

図-2

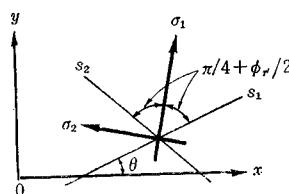
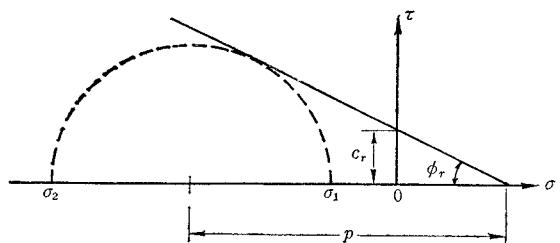


図 3 Mohr の有効応力円



$$\dot{\epsilon}_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \dot{\epsilon}_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \dot{\tau}_{xy} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここで式 (3) の  $f$  を  $\tau_{xy}$  で微分するとき  $\tau_{xy}^2 = \tau_{xy}^2/2 + \tau_{yx}^2/2$  と考えて  $\tau_{yx}$  を一定と考えて演算する。また  $\lambda$  は式 (3) が等号のときは正、不等号のときは 0 となるようなスカラーフィールである。

さて大きい  $\sigma_1$  と  $\pm(\pi/4 + \phi_r/2)$  をなす二方向を  $S_1$ ,  $S_2$  すべり方向と呼び、 $S_1$  すべり線が  $x$  軸となす角を  $\theta$  とすると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p \{1 + \sin \phi_r \sin(2\theta + \phi_r)\} + c_r \cot \phi_r \\ \sigma_y &= -p \{1 - \sin \phi_r \sin(2\theta + \phi_r)\} + c_r \cot \phi_r \\ \tau_{xy} &= p \sin \phi_r \cos(2\theta + \phi_r) \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$$p = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \sin \phi_r} (> 0) \quad \dots \dots \dots (6)$$

である。この式と (3) を式 (5) に用いると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda p \sin \phi_r \{\sin \phi_r - \sin(2\theta + \phi_r)\} \\ \dot{\epsilon}_y &= \lambda p \sin \phi_r \{\sin \phi_r + \sin(2\theta + \phi_r)\} \\ \dot{\tau}_{xy} &= \lambda p \sin \phi_r \cos(2\theta + \phi_r) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

となるが、これは Shield の導いた式と係数  $p \sin \phi_r$  を除けば本質的には変わらず、 $\lambda$  の中に含ませて考えれば同じものである（Shield, 1954）。

等方性の下では応力とひずみ速度の主軸が一致するべきだが、これは式 (6), (7) から

$$\frac{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y}{2\dot{\tau}_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\tan(2\theta + \phi_r) \quad \dots \dots \dots (8)$$

のように確かめられる。

さらに式 (7) の上二式から

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x \{\sin \phi_r + \sin(2\theta + \phi_r)\} \\ = \dot{\epsilon}_y \{\sin \phi_r - \sin(2\theta + \phi_r)\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9)$$

なる圧縮性の式がえられる。式 (9) で  $\phi_r = 0$  なら  $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0$  であるから非圧縮条件を表わす。また式 (9) で  $\theta = -\pi/4 - \phi_r/2$  とおくと、図-2 より明らかのように  $\dot{\epsilon}_x \equiv$

$\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_2$  であるので

$$\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) \sin \phi_r = 2 \dot{\tau}_{\max} \sin \phi_r \dots \dots \dots (10)$$

なる圧縮表示式をうる。

以上のことから可容速度は式(8),(9)を満たし、かつ  $S_V$  上で

$$u_x = U_x, u_y = U_y \dots \dots \dots (11)$$

なるようなものである。ただし式(8),(9)の  $\theta$  は応力解から決まる  $S_1$  すべり線の方向で与えられるものを用いる。

一般に可容応力は独立に（または静定の意味で）式(1),(2),(3)を満足すればよく、可容速度も独立的に式(8),(9)、すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \tan(2\theta + \phi_r) &= 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \{ \sin \phi_r + \sin(2\theta + \phi_r) \} \\ &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \{ \sin \phi_r - \sin(2\theta + \phi_r) \} \end{aligned}$$

と式(11)を満たせばよい。

可容応力と可容速度が式(5)によって結ばれるなら、これらが適合した正解となる。可容応力を  $\sigma_{ij}^*$ 、可容速度を  $v^*$  と表すとき、両者の適合性を式(5)により調べるにあたり、応力解の剛性域で  $\dot{\varepsilon}_{ij}^* = 0$  なることも確かめねばならない。剛性域でこのことが保証されない解は不完全解である。

自重のあるときに成り立つ積分表式(12)は一名仮想仕事式といわれる。仮想なる意は応力とひずみ速度の間になんら特別な関係を仮定しないからである。すなわち

$$\begin{aligned} &\int (\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2 \tau_{xy} \dot{\tau}_{xy}) dV \\ &= \oint (F_x U_x + F_y U_y) dS - r \int u_y dV \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

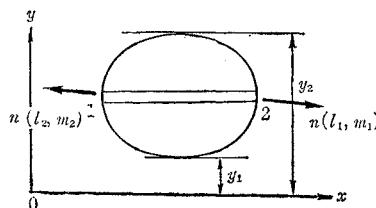
証明は以下のとおり。

$$\begin{aligned} \int \sigma_x \dot{\varepsilon}_x dV &= \int_{y_1}^{y_2} [\sigma_x u_x]^2 dy - \int u_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV \\ &= \oint \sigma_x u_x l dS - \int u_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV \end{aligned}$$

など。他の項についても同様計算して

$$\begin{aligned} &\int (\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2 \tau_{xy} \dot{\tau}_{xy}) dV \\ &= \oint \{ (\sigma_x l + \tau_{xy} m) u_x + (\sigma_y m + \tau_{xy} l) u_y \} dS \\ &- \int \left\{ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) u_x + \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) u_y \right\} dV \end{aligned}$$

図-4



ここで右辺第1項に式(2)、第2項に式(1)を用いること式(12)がえられるのである。

### 3. 下界定理

本定理は最大塑性仕事の原理または第一変分定理ともいわれるものである。

正解応力、正解速度を  $\sigma_{ij}$ ,  $v$  とし、 $v$  から式(4)で導かれるひずみ速度を  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  とする。 $\dot{\varepsilon}_{ij}$  は  $\sigma_{ij}$  と適合するが、 $\dot{\varepsilon}_{ij}$  と適合しない可容応力を  $\sigma_{ij}^*$  と表わすと

$$\left. \begin{aligned} W &= \sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + 2 \tau_{xy} \dot{\tau}_{xy} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ W^* &= \sigma_x^* \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y^* \dot{\varepsilon}_y + 2 \tau_{xy}^* \dot{\tau}_{xy} = \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

なる二量を比べたとき

$$W \geq W^* \dots \dots \dots (14)$$

が証明される。

いま

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_x - c_r \cot \phi_r, \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y - c_r \cot \phi_r \\ \bar{\sigma}_x^* &= \sigma_x^* - c_r \cot \phi_r, \quad \bar{\sigma}_y^* = \sigma_y^* - c_r \cot \phi_r \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

とすると式(3)は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + \tau_{xy}^2 &\leq \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)^2 \sin^2 \phi_r \\ \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_x^* - \bar{\sigma}_y^*)^2 + \tau_{xy}^*{}^2 &\leq \frac{1}{4} (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*)^2 \sin^2 \phi_r \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式(5),(15)より

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\lambda}{2} \{ \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y \} - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin^2 \phi_r \\ \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\lambda}{2} \{ \bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_x \} - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin^2 \phi_r \\ \dot{\tau}_{xy} &= \lambda \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

だから式(13)の  $W^*$  の式に入れて、 $\sigma_x^*, \sigma_y^*$  を  $\bar{\sigma}^*, \bar{\sigma}_y^*$  で改めると

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{\lambda}{2} [(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)(\bar{\sigma}_x^* - \bar{\sigma}_y^*) + 4 \tau_{xy} \tau_{xy}^*] \\ &- \frac{\lambda}{2} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)(\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin^2 \phi_r \\ &- \lambda c_r (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r \cos \phi_r \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

ここで Schwarz の不等式

$$ab + cd \leq (a^2 + c^2)^{1/2} (b^2 + d^2)^{1/2}$$

を用いると

$$\begin{aligned} W^* &\leq \frac{\lambda}{2} [(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2]^{1/2} \\ &\times [(\bar{\sigma}_x^* - \bar{\sigma}_y^*)^2 + 4 \tau_{xy}^*{}^2]^{1/2} \\ &- \frac{\lambda}{2} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)(\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin^2 \phi_r \\ &- \lambda c_r (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r \cos \phi_r \dots \dots \dots (18') \end{aligned}$$

しかし式(15)および図-3から  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_x^*, \bar{\sigma}_y^*$  は皆圧縮応力で負であるから式(16)は

$$0 \leq [(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2]^{1/2} \leq -(\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r$$

$$0 \leq [(\bar{\sigma}_x^* - \bar{\sigma}_y^*)^2 + 4 \tau_{xy}^*{}^2]^{1/2} \leq -(\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin \phi_r$$

したがって式(18')の右辺第1,2項は  $\lambda$  の正値条件を

考えると正とはなりえない。すなわち

$$W^* \leq -\lambda c_r (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r \cos \phi_r \quad \dots \dots \dots (19)$$

一方  $W$  を同様に計算するとき式 (18) に対応し

$$\begin{aligned} W = & \frac{\lambda}{2} [(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)^2 \sin^2 \phi_r] \\ & - \lambda c_r (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r \cos \phi_r \\ = & \frac{\lambda}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - (\sigma_x + \sigma_y)^2 \cdot 2c_r \cot \phi_r]^2 \\ & \times \sin^2 \phi_r] - \lambda c_r (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r \cos \phi_r \end{aligned}$$

であるが、初めから  $\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0$ 、すなわち塑性変形の状態を考えているのであるから、正解応力は式 (3) の等号を満足している。したがって  $W$  の式の右辺第1項は  $\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0$  のところでは 0 となり

$$W = -\lambda c_r (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \sin \phi_r \cos \phi_r \quad \dots \dots \dots (20)$$

である。式 (19), (20) より式 (14) は明らかである。

上に考えた正解  $\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}$  は  $S_F$  上で  $\mathbf{F}(F_x, F_y)$ ,  $S_V$  上で  $\mathbf{U}(U_x, U_y)$  なる条件に応ずるものであるが、 $\sigma_{ij}^*$  なる可容応力とつりあう可容表面力は  $S_F$  上ではもちろん  $\mathbf{F}$  と一致するが  $S_V$  では  $\mathbf{F}^*(F_x, F_y)$  なる値をとるものとする。すなわち  $S_V$  上で

$$\sigma_x^* l + \tau_{xy}^* m = F_x^*, \quad \sigma_y^* m + \tau_{xy}^* l = F_y^* \quad \dots \dots \dots (21)$$

である。

式 (13) の体積分を考え式 (12) を用いると

$$\begin{aligned} \int W dV &= \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y \\ &\quad + 2\tau_{xy} \dot{\tau}_{xy}) dV \\ &= \int_{S_F} (F_x u_x + F_y u_y) dS \\ &\quad + \int_{S_V} (F_x U_x + F_y U_y) dS - r \int u_y dV \\ \int W^* dV &= \int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int (\sigma_x^* \dot{\epsilon}_x + \sigma_y^* \dot{\epsilon}_y \\ &\quad + 2\tau_{xy}^* \dot{\tau}_{xy}) dV \\ &= \int_{S_F} (F_x u_x + F_y u_y) dS \\ &\quad + \int_{S_V} (F_x^* U_x + F_y^* U_y) dS - r \int u_y dV \end{aligned}$$

したがって式 (14) によって

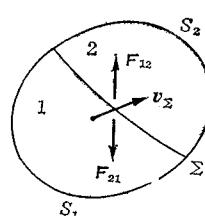
$$\int_{S_V} (F_x U_x + F_y U_y) dS \geq \int_{S_V} (F_x^* U_x + F_y^* U_y) dS \quad \dots \dots \dots (22)$$

これが下界定理であって、土のように摩擦抵抗および自重の無視しない剛塑性体についても金属塑性論と同じ結論がえられた。

式 (22) は境界面  $S_V$  上で速度条件が与えられたとき、 $r, c_r, \phi_r$  材における正解の表面力  $\mathbf{F}$  のなす仕事率は、同じ  $S_V$  上で他のいかなる可容表面力  $\mathbf{F}^*$  のなす仕事率よりも小さくなりえないことを述べている。すなわち正解が知られなくても可容応力解がえられればそれは正解を越えることはない、すなわち正解の一つの下界が求められたことを意味する。

今までの議論で応力や速度の不連続性は考慮しなかったが、これらの不連続線がある場合を吟味する。まず応力の不連続線上ではひずみ速度はすべて消失し  $\dot{\epsilon}_{ij} \equiv 0$  なる性質（山口、1967）を考えると、応力の不連続線の存在は下界定理式 (22) の成立を妨げるものではないことが明らかとなる。このことは以下のように直接証明も

図-5



できる。

応力の不連続線を  $\Sigma$  とするところの上では速度が連続であることが知られている（山口、1967）ので、これを 1, 2 両域について  $v_\Sigma$  とする。また応力成分に不連続があっても、力のつりあい関係から  $\Sigma$  上での合力は当然連続であり、 $F_{12} + F_{21} = 0$  となる。1, 2 両域に式 (12) を適用すると

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV_1 &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS_1 \\ &\quad + \int (\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{v}_2) d\Gamma - r \int u_y dV_1 \\ \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV_2 &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS_2 \\ &\quad + \int (\mathbf{F}_{21} \cdot \mathbf{v}_2) d\Gamma - r \int u_y dV_2 \end{aligned}$$

ここに ( ) はスカラー積を意味する。

二式を加え

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS - r \int u_y dV = \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS \\ &\quad + \int_{S_A} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS - r \int u_y dV \end{aligned}$$

同様

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS \\ &\quad + \int_{S_V} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{U}) dS - r \int u_y dV \end{aligned}$$

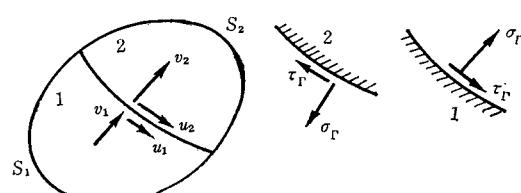
ところで至るところで式 (14) が成り立つから

$$\int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \geq \int \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

したがって前二式から再び式 (22) がえられる。

速度が不連続であるとき、その不連続線を  $\Gamma$  とし、両側の速度の  $\Gamma$  に垂直および平行な成分を図-6に示すようなものとする。なお  $\Gamma$  上の応力  $\sigma_\Gamma, \tau_\Gamma$  は力のつりあいからもちろん連続である。さて領域 1 に仮想仕事の式 (12) を適用すると、

図-6



$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}dV_1 &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS, \\ &\quad + \int (\mathbf{F}_T \cdot \mathbf{v}_T) d\Gamma - r \int u_y dV_1, \\ &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS, \\ &\quad + \int (\sigma_T v_1 + \tau_T u_1) d\Gamma - r \int u_y dV_1 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}dV_2 &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS_2, \\ &\quad - \int (\sigma_T v_2 + \tau_T u_2) d\Gamma - r \int u_y dV_2 \end{aligned}$$

これらを加え

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}dV &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS \\ &\quad - \int (\sigma_T \delta v + \tau_T \delta u) d\Gamma - r \int u_y dV \end{aligned} \right\}$$

ただし,  
 $\delta u = u_2 - u_1, \quad \delta v = v_2 - v_1$   
.....(23)

ここで  $(\sigma_T \delta v + \tau_T \delta u)$  は不連続線  $\Gamma$  上の単位面積当たりのエネルギーの消散率を表わしている。その理由を述べよう。まず  $\Gamma$  が速度の不連続線であればそれはすべり線以外のものでなければならない。したがって不連続線に沿っての伸びひずみ速度はない(式(30)または山口, 1959)。不連続線の幅、すなわち遷移領域の厚さを  $t$  とし、不連続線に垂直な方向を  $n$  とすると直交座標  $sn$  に関するひずみ速度成分は図-6 よび式(23)の記号を用いて

$$\dot{\epsilon}_s = 0, \quad \dot{\epsilon}_n = \frac{\delta v}{t}, \quad 2\dot{\tau}_{sn} = \frac{\delta u}{t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\delta u}{t} \quad \dots(24)$$

となる、ここで不連続性から  $\delta u/t \gg \partial v/\partial s$  に注意したい。したがって不連続帶の単位体積当たりの塑性仕事率は

$$\begin{aligned} W_s &= \sigma_n \dot{\epsilon}_n + \sigma_s \dot{\epsilon}_s + 2\dot{\tau}_{sn} \tau_{sn} \\ &= \sigma_T \dot{\epsilon}_n + 2\tau_T \dot{\tau}_{sn} = \frac{\sigma_T \delta v + \tau_T \delta u}{t} \end{aligned}$$

で、 $W_s \cdot t = \sigma_T \delta v + \tau_T \delta u$  は  $\Gamma$  上の単位面積当たりの塑性仕事率となる。

よって式(23)は

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}dV &= \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS \\ &\quad + \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS - r \int u_y dV \\ &\quad - \int (\sigma_s \dot{\epsilon}_s + \sigma_n \dot{\epsilon}_n + 2\dot{\tau}_{sn} \tau_{sn}) t d\Gamma \end{aligned} \right\}$$

同様に

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma_{ij}^*\dot{\epsilon}_{ij}dV &= \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS \\ &\quad + \int_{S_V} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{U}) dS - r \int u_y dV \\ &\quad - \int (\sigma_s^* \dot{\epsilon}_s + \sigma_n^* \dot{\epsilon}_n + 2\dot{\tau}_{sn}^* \tau_{sn}) t d\Gamma \end{aligned} \right\}$$

.....(23')

他方、式(14)は一点で成立りつ一般的な関係だから  
 $\sigma_s^* \dot{\epsilon}_s + \sigma_n^* \dot{\epsilon}_n + 2\dot{\tau}_{sn}^* \tau_{sn} \leq \sigma_s \dot{\epsilon}_s + \sigma_n \dot{\epsilon}_n + 2\dot{\tau}_{sn} \tau_{sn}$   
 さらに、  
 $\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \geq \sigma_{ij}^*\dot{\epsilon}_{ij}$

であるので式(23')より

$$\begin{aligned} \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS - \int_{S_V} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{U}) dS \\ = \int (\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \sigma_{ij}^*\dot{\epsilon}_{ij}) dV \\ + \int (\sigma_s \dot{\epsilon}_s + \sigma_n \dot{\epsilon}_n + 2\dot{\tau}_{sn} \tau_{sn}) \\ - (\sigma_s^* \dot{\epsilon}_s + \sigma_n^* \dot{\epsilon}_n + 2\dot{\tau}_{sn}^* \tau_{sn}) t d\Gamma \geq 0 \end{aligned}$$

が結論され下界定理(22)が証明された。

以上によって土の塑性論でも応力や速度の不連続性に関係なく下界定理がつねに式(22)の形で成り立つ。

#### 4. 上界定理

正解を  $(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij})$  とし、可容速度  $\mathbf{v}^*$  から導かれるひずみ速度を  $\dot{\epsilon}_{ij}^*$  とする。この  $\mathbf{v}^*$  は前に述べたごとく等方、圧縮両式と境界面  $S_V$  上で  $\mathbf{v}^* = \mathbf{U}$  の条件とを満たせばよい。

$\dot{\epsilon}_{ij}^*$  と適合する応力を  $\sigma_{ij}^*$  とすると、これらは

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^* &= \lambda^* \partial f^*/\partial \sigma_{ij}^* \\ f^* &= \frac{1}{4} (\sigma_x^* - \sigma_y^*)^2 + \tau_{xy}^{*2} \\ &\quad - \left( c_r \cos \phi_r - \frac{\sigma_x^* + \sigma_y^*}{2} \sin \phi_r \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots(25)$$

$\lambda^* > 0 (f^* = 0), \quad \lambda^* = 0 (f^* < 0)$

の関係がある。

ここで式(14)に対応して

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^* \leq \sigma_{ij}^*\dot{\epsilon}_{ij}^* \dots(26)$$

が証明できる。

すなわち式(25)から式(18)と同様な

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^* &= \frac{\lambda^*}{2} [(\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)(\bar{\sigma}_x^* - \bar{\sigma}_y^*) + 4\tau_{xy}\tau_{xy}^*] \\ &\quad - \frac{\lambda^*}{2} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)(\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin^2 \phi_r \\ &\quad - \lambda^* c_r (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin \phi_r \cos \phi_r \end{aligned}$$

これから下界定理の場合と同様

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^* \leq -\lambda^* c_r (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin \phi_r \cos \phi_r = \sigma_{ij}^*\dot{\epsilon}_{ij}^*$$

で式(26)が成り立つ。

仮想仕事式(12)を用いるなら

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^* dV &= \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS - r \int u_y^* dV \\ &= \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ &\quad + \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS_V - r \int u_y^* dV \end{aligned}$$

また

$$\int \sigma_{ij}^*\dot{\epsilon}_{ij}^* dV = -c_r \sin \phi_r \cos \phi_r \int \lambda^* (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) dV$$

だから式(26)より

$$\int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS \leq r \int_{S_F} u_y^* dV - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ - c_r \sin \phi_r \cos \phi_r \int \lambda^* (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) dV \quad \dots (27)$$

一方、式(25)より式(10)を参照して

$$\dot{\epsilon}_x^* + \dot{\epsilon}_y^* = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = 2 \dot{\tau}_{\max}^* \sin \phi_r \\ = -\lambda^* (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) \sin^2 \phi_r$$

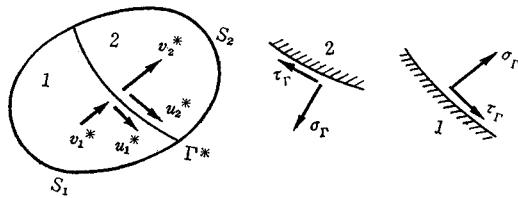
であるので式(26)は

$$\int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS \leq r \int_{S_F} u_y^* dV - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ + 2 c_r \cos \phi_r \int \dot{\tau}_{\max}^* dV \quad \dots (28)$$

となり、これが所求の上界定理である。

適合系  $(\sigma_{ij}^*, \dot{\epsilon}_{ij})$  に不連続性があるときの上界定理を調べる。応力の不連続線上では  $\dot{\epsilon}_{ij}^*$  が消失するので  $S^*$  上の面積分は式(28)に影響を与えないが、 $\mathbf{v}^*$  に不連続性があれば上界定理は修正される。

図-7



$\Gamma^*$  を速度の不連続線とすると式(23)同様

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV &= \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS + \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS \\ &\quad - \int (\sigma_F \delta v^* + \tau_F \delta u^*) d \Gamma^* - r \int u_y^* dV \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$$\delta u^* = u_2^* - u_1^*, \quad \delta v^* = v_2^* - v_1^*$$

上式左辺は式(26)によって

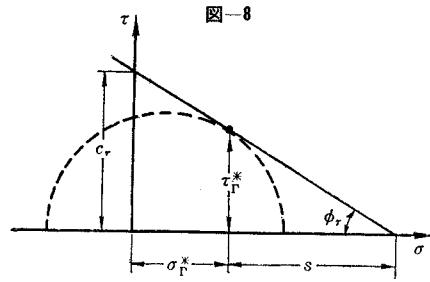
$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV &= -c_r \sin \phi_r \cos \phi_r \\ &\times \int \lambda^* (\bar{\sigma}_x^* + \bar{\sigma}_y^*) dV = 2 c_r \cos \phi_r \int \dot{\tau}_{\max}^* dV \end{aligned}$$

より大きくなない。ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS &\leq r \int u_y^* dV - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ &+ 2 c_r \cos \phi_r \int \dot{\tau}_{\max}^* dV \\ &+ \int (\sigma_F \delta v^* + \tau_F \delta u^*) d \Gamma^* \quad \dots (29) \end{aligned}$$

上式末項は速度の不連続線上で消散される仕事率で正量であるが式(26)より

$$\begin{aligned} \int (\sigma_F \delta v^* + \tau_F \delta u^*) d \Gamma^* &= \int (\sigma_n \dot{\epsilon}_n^* + \sigma_s \dot{\epsilon}_s^* + 2 \tau_{ns} \dot{\tau}_{ns}^*) t^* d \Gamma^* \\ &\leq \int (\sigma_n \dot{\epsilon}_n^* + \sigma_s \dot{\epsilon}_s^* + 2 \tau_{ns} \dot{\tau}_{ns}^*) t^* d \Gamma^* \\ &= \int (\sigma_F \delta v^* + \tau_F \delta u^*) d \Gamma^* \end{aligned}$$



いま  $\Gamma^*$  なる不連続線すなわちすべりの遷移域内で帯域に平行および垂直な二方向  $s, n$  を  $xy$  軸にとると式(7)で  $\theta=0$  とすることにより

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_s^* &= 0, \quad \dot{\epsilon}_n^* = 2 \lambda^* p^* \sin^2 \phi_r, \\ 2 \tau_{sn}^* &= 2 \lambda^* p^* \sin \phi_r \cos \phi_r \quad \dots (30) \end{aligned}$$

これを式(24)とくらべて

$$\delta v^* = \delta u^* \tan \phi_r \quad \dots (31)$$

また  $\sigma_r^*, \tau_r^*$  は図-8に示すように、

$$\left. \begin{aligned} \tau_r^* &= s \tan \phi_r \\ \sigma_r^* &= c_r \cot \phi_r - s \end{aligned} \right\}$$

だから式(31)を考えて

$$\sigma_F \delta v^* + \tau_F \delta u^* = c_r \delta u^* \quad \dots (32)$$

式(31), (32)は Drucker, Prager がすでに示したものであるが、ここでは別の角度から証明した (Drucker, Prager, 1952)。

以上によって結局、式(29)は

$$\begin{aligned} \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS &\leq r \int u_y^* dV - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ &+ 2 c_r \cos \phi_r \int \dot{\tau}_{\max}^* dV + c_r \int \delta u^* d \Gamma^* \quad \dots (33) \end{aligned}$$

これが適合系速度に不連続があるときの上界定理である。

式(22)と式(33)から

$$\begin{aligned} \int_{S_V} (\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{U}) dS &\leq \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS \\ &\leq r \int u_y^* dV - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ &+ 2 c_r \cos \phi_r \int \dot{\tau}_{\max}^* dV + c_r \int \delta u^* d \Gamma^* \end{aligned}$$

これによって可容応力の表面力のなす仕事または可容速度に対して正解のなす仕事の大小関係が求められた。

## 5. 解の唯一性

物体の境界面の一部  $S_F$  上で表面力  $\mathbf{F}$ 、残りの  $S_V$  上で速度  $\mathbf{U}$  が与えられたとき、塑性変形をする領域内では正解応力がただ一通りに決まる。

仮に二つの正解  $(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij})$ ,  $(\sigma_{ij}^\circ, \dot{\epsilon}_{ij}^\circ)$  がえられたとしよう。

$$\begin{aligned} \int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\circ) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^\circ) dV &= \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \\ &+ \int \sigma_{ij}^\circ \dot{\epsilon}_{ij}^\circ dV - \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^\circ dV - \int \sigma_{ij}^\circ \dot{\epsilon}_{ij} dV \end{aligned}$$

に式(12)を適用すると

$$\begin{aligned} & \int_{S_F} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^*) dV = \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS \\ & + \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS - r \int u_y dV - \int (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) t d\Gamma \\ & + \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS + \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^*) dS - r \int u_y^* dV \\ & - \int (\sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*) t^* d\Gamma^* - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS \\ & - \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^*) dS + r \int u_y^* dV + \int (\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^*) t^* d\Gamma^* \\ & - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{S_V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) dS + r \int u_y dV \\ & + \int (\sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}) t d\Gamma \end{aligned}$$

ただし二つの正解に対する速度不連続面は一般に異なるから  $\Gamma, \Gamma^*$  とし遷移域厚さも  $t, t^*$  とした。また二つの正解に対し  $S_F$  上で  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$ ,  $S_V$  上で  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^*$  であるので、

$$\begin{aligned} & \int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^*) dV \\ & = \int \{(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}\} t d\Gamma \\ & + \int \{(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^*\} t^* d\Gamma^* \quad \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

上式の左辺は式(14), (26)などにより

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0, (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq 0$$

だから負となりえない。

他方右辺においては

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \leq 0, (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^* \leq 0$$

で正となりえない。

式(34)の等号が成り立つためには  $\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0, \dot{\epsilon}_{ij}^* \neq 0$  である限り、

$$\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij}^*$$

が必要十分である。すなわち塑性域 ( $\dot{\epsilon}_{ij} \neq 0$ ) での応力解の一意性が示された。

## 6. 応用例

(1) 直立のり面の安定高さを調べよう。式(14)によると  $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*$  であるが応力とひずみ増分の符号は等しいと考えてよいので可容応力解と正解応力の絶対値を比べたとき前者は後者より大きくはありえない。これはまた可容応力解が正解応力の下界であることにはかならぬ。したがって可容応力を生ぜしめるのり高は正しい自立高の値をこえることはない。

図-9についてつりあい方程式と表面で自由なる境界条件を満たす可容応力の一つは

$$\sigma_x^* = 0, \sigma_y^* = r(y - H^*), \tau_{xy}^* = 0$$

でこれらは主応力となる。すなわち  $\sigma_1^* = \sigma_x > \sigma_2^* = \sigma_y$  で最大 Mohr 圏は  $y=0$  で生じ  $\sigma_1^* = 0, \sigma_2^* = -rH^*$  となる。降伏が生じるのは  $y=0$  であって式(3)で  $f \rightarrow f^* = 0$  とした式

$$\sigma_1^* - \sigma_2^* = 2c_r \cos \phi_r - (\sigma_1^* + \sigma_2^*) \sin \phi_r$$

図-9

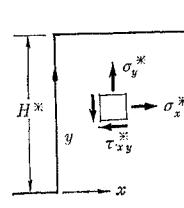
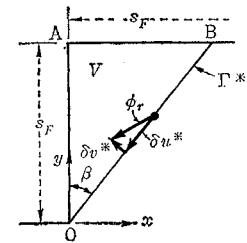


図-10



に入れて

$$H^* = \frac{2c_r \cos \phi_r}{r(1 - \sin \phi_r)} = \frac{2c_r}{r} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_r}{2}\right)$$

となり実際の自立高は

$$H > \frac{2c_r}{r} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_r}{2}\right) \quad \dots \dots \dots \text{i)}$$

つぎに上界定理を適用するため、図-10に示すような傾角  $\beta$  の直線を仮定し、その上で可容速度が不連続とする。すなわち  $\Gamma^*$  線はすべり線であって  $\triangle OAB$  内では  $t_{\max}^* \equiv 0$ 、すなわち剛性域とする。これは境界面がすべて応力だけの条件で規定されていて  $\mathbf{U}$  は何であってもよいことから、上述の速度は可容のものとなるのである。

すべり線  $\Gamma^*$  上では要素の速度は式(31)に示すごとくであるので図-10に画くように  $\Gamma^*$  と  $\phi_r$  をなす方向であり、この速度は  $V \sim \triangle OAB$  内で共通となる。したがって

$$\begin{aligned} u_y^* &= -\sqrt{\delta u^{*2} + \delta v^{*2}} \cos(\beta + \phi_r) \\ &= -\delta u^* \sqrt{1 + \tan^2 \phi_r} \cos(\beta + \phi_r) \\ &= -\frac{\delta u^*}{\cos \phi_r} \cos(\beta + \phi_r) \end{aligned}$$

さて式(33)で  $S_V = 0, \mathbf{F} = 0$  を考えると

$$\begin{aligned} r \int u_y^* dV + c_r \int \delta u^* d\Gamma^* &\geq 0 \quad \dots \dots \dots \text{ii)} \\ \therefore c_r \int d\Gamma^* &\geq \frac{r \cos(\beta + \phi_r)}{\cos \phi_r} \int dV \end{aligned}$$

しかして、

$$\begin{aligned} \int d\Gamma^* &= \overline{OB} = \frac{H}{\cos \beta}, \quad \int dV = \triangle OAB = \frac{H^2}{2} \tan \beta \\ \therefore H &\leq \frac{2c_r \cos \phi_r}{r \sin \beta \cos(\beta + \phi_r)} \end{aligned}$$

自立高  $H$  は  $\beta$  の値に関せず上式右辺より常に小さいので、右辺の最小値を求めるとそれは  $\beta = \pi/4 - \phi_r/2$  で生じ

$$H \leq \frac{4c_r}{r} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_r}{2}\right) \quad \dots \dots \dots \text{iii)}$$

i), ii), iii) によって自立高  $H$  の範囲が知れた。これらは Drucker, Prager の崩壊定理から導かれた結果と同じである。

領域  $OAB$  が剛体的にすべりうるもう一つの可能な不連続線は  $OB$  が対数螺旋線の場合である。すなわち  $L$  を極とする対数螺旋線

$$r = r_0 \exp(\theta \tan \phi_r)$$

が  $\delta\omega$  だけ  $L$  を中心として剛体的に回転すると、 $\Gamma^*$  上の一点  $r$  での全変位速度  $\delta\bar{v}$  は  $r\delta\omega$  であり、その方向は  $r$  に直角だから  $\Gamma^*$  に平行および垂直な  $\delta u^*$ ,  $\delta v^*$  の二成分は式(31)を満足することになるためである。

ii) はこの場合にもそのまま成り立つが、任意点を  $(\rho, \theta)$  とすると  $u_y^* = -\rho\delta\omega \cos(\alpha + \theta)$  だから

$$r \int u_y^* dV = -\delta\omega \int \rho \cos(\alpha + \theta) r dV$$

この右辺は面積  $OAB$  に働く重力の極  $L$  に関する滑動モーメント ( $M_D$ ) に等しい。また、

$$c_r \int \delta u^* d\Gamma^* = \delta\omega \int r \cos \phi_r c_r d\Gamma^*$$

は容易に理解されるように、 $\Gamma^*$  に働く粘着力の  $L$  に関するモーメントである。摩擦抵抗の成分に寄与する力はすべて  $L$  を通るため  $L$  でのモーメントは消失し、上式は  $\Gamma^*$  に働く全せん断抵抗のモーメントすなわち  $M_R$  となる。よって ii) は

$$\int \rho \cos(\alpha + \theta) r dV \leq \int r c_r \cos \phi_r d\Gamma^* \text{ または } M_D \leq M_R \dots \text{ iv)}$$

iv) を実線の場合に計算し  $H$  のよりよい近似値を求めることができるが、このような計算は Taylor (1937) によってすでに行われていてその結果によると iii) の右辺の値が約 4~5% ほど小さくなることが確かめられている。

(2) 土圧の例を考えよう。OA を壁面としてまず上界定理を適用する。OA 面は  $S_F$  でそこでの接触応力を  $F_x, F_y$  (正解値) とすると、壁の粗さ角が  $\delta$  なら  $F_y = F_x \cdot \tan \delta$  である。図-10 と同じく直線不連続線  $\Gamma^*$  を仮定し  $\triangle OAB$  が剛性域であるとすると  $u_y^*$  の計算と同様に、 $\triangle OAB$  内で至るところ  $u_x^* = -\delta u^* \sin(\beta + \phi_r) / \cos \phi_r$  となる。

式(33)を用いると

$$\begin{aligned} \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS &= \int_{OA} (F_x u_x^* + F_y u_y^*) dy \\ &\leq r \int u_y^* dV + c_r \int \delta u^* d\Gamma^* \\ \therefore \int_{OA} F_x \left\{ \frac{\sin(\beta + \phi_r)}{\cos \phi_r} + \tan \delta \frac{\cos(\beta + \phi_r)}{\cos \phi_r} \right\} dy &\geq r \int \frac{\cos(\beta + \phi_r)}{\cos \phi_r} dV - \frac{c_r H}{\cos \beta} \\ \therefore \int_{OA} F_x dy &\geq \frac{r H^2 \tan \beta \cos(\beta + \phi_r) \cos \delta}{2 \sin(\beta + \phi_r + \delta)} \\ &\quad - c_r H \frac{\cos \delta \cos \phi_r}{\cos \beta \sin(\beta + \phi_r + \delta)} \dots \text{ v) } \end{aligned}$$

図-11

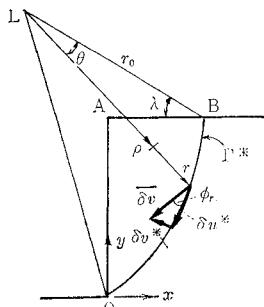
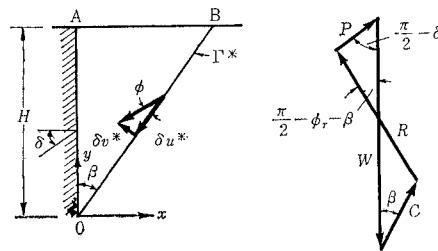


図-12



$\delta = 0$  なら、 $\beta = \pi/4 - \phi_r/2$  のとき右辺第1項は最大、第2項は最小であって、その場合上式右辺は Rankine 土圧を表わす。また  $\delta = 0$  であれば v) の右辺は  $\triangle OAB$  の重力  $W = (r H^2/2) \tan \beta$  と  $\Gamma^*$  上の反力  $R$ 、粘着抵抗とつりあう力  $P$  (図-12 参照) の水平成分を表わす。したがって右辺の最大値は Coulomb の主働土圧 (ただし直線すべり面の仮定におけるもの) の水平成分であり、正解水平力はそれより小さくなりえないことを示している。換言すると Coulomb の値よりも大きな土圧が可容

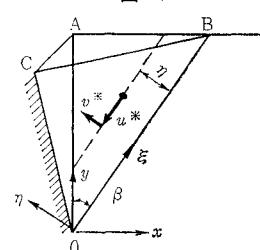
表-1 土圧係数の値 ( $\delta = \phi$ )

$\phi_r$	精密解	Coulomb解
10°	0.633	0.625
20°	0.409	0.404
30°	0.260	0.259
40°	0.162	0.162

速度からえられれば、それは正解により近いものとなる。しかし幸に正解と Coulomb 値との差はきわめて小さいことは表-1に見られるごとくである (山口, 1959\*)。

上記計算で  $\triangle OAB$  の変形が剛体的のもの、すなわち壁面の変位が  $-x$  方向へ平行的移動をするとして可容速度を考えたが、比較のため壁面が下端回りに回転する様式を検討しよう。

図-13



このため 図-13 に示すごとく、 $\triangle OAB$  内に OB に平行な連続的すべり線ができるものとし、すべり線に沿う要素の速度  $u^*$  が  $\eta$  に比例するものと考える。したがって、OB はもちろん  $\triangle OAB$  内に  $v^*$  の不連続線はない。 $u^*$  に対して  $v^* = u^* \tan \phi_r$  が生ずるので

$$\begin{aligned} u^* &= a \eta, \quad v^* = a \eta \tan \phi_r \\ \therefore \bar{v}^* &= \sqrt{u^{*2} + v^{*2}} = a \eta / \cos \phi_r \\ \therefore u_x^* &= -\frac{a \eta \sin(\phi_r + \beta)}{\cos \phi_r}, \\ u_y^* &= -\frac{a \eta \cos(\phi_r + \beta)}{\cos \phi_r} \end{aligned}$$

これから OA 上で  $y = \eta / \sin \beta$  なる点の  $\bar{v}^*$  は  $a y \sin \beta / \cos \phi_r$  で、図-13 の変形後の壁面 OC は下端回転型となる。

上の  $u^*, v^*$  から

$$\dot{\epsilon}_{\xi}^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\eta}^* = \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = a \tan \phi_r,$$

$$2\dot{\tau}_{\xi\eta}^* = \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = a$$

これから主ひずみ速度は

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_z^* &= \frac{\dot{\epsilon}_{\xi}^* + \dot{\epsilon}_{\eta}^*}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{\epsilon}_{\xi}^* - \dot{\epsilon}_{\eta}^*}{2}\right)^2 + \dot{\tau}_{\xi\eta}^{*2}} \\ \therefore 2\dot{\tau}_{\max}^* &= \dot{\epsilon}_1^* - \dot{\epsilon}_2^* = 2\sqrt{\frac{a^2 \tan^2 \phi_r}{4} + \frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{a}{\cos \phi_r}\end{aligned}$$

以上によって式(33)の各項は

$$\begin{aligned}r \int u_y^* dV &= -\frac{r a \cos(\phi_r + \beta)}{\cos \phi_r} \int y dV \\ &= -\frac{r a H^3 \sin \beta \tan \beta \cos(\phi_r + \beta)}{6 \cos \phi_r} \\ 2c_r \cos \phi_r \int \dot{\tau}_{\max}^* dV &= ac_r \int dV = \frac{ac_r H^2}{2} \tan \beta \\ - \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS &= - \int_{OA} F_x (u_x^*)_{OA} dS \\ (\delta, F_y = 0 \text{ とす}) \\ &= \frac{a \sin(\phi_r + \beta)}{\cos \phi_r} \int_0^H F_{xy} \sin \beta \cdot dy\end{aligned}$$

ここで  $F_x$  の水圧的分布を仮定すると

$$\begin{aligned}- \int_{S_F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS &= \frac{PH a \sin(\phi_r + \beta) \sin \beta}{3 \cos \phi_r} \\ (P &= \int_0^H F_x dy)\end{aligned}$$

すなわち式(33)より

$$P > \frac{r H^2 \tan \beta \cos(\phi_r + \beta)}{\sin(\phi_r + \beta)} - \frac{3 c_r H \cos \phi_r}{2 \cos \beta \sin(\beta + \phi_r)}$$

右辺の最大値は  $\beta = \pi/4 - \phi_r$  で生じ

$$P > \frac{r H^2}{2} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_r}{2} \right) - 3 c_r H \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_r}{2} \right) \quad \dots \text{vi)}$$

vi) を v) からえられる Rankine 土圧値とくらべると第1項は同じであるが、第2項のため vi) の右辺は v) の右辺の最大値より小さくなる。すなわち粘着力のあるときは図-13 のような下端回りの回転型の変位に対する可容速度は起こり難いこととなる。これは粘性土の主働状態での壁の変形が平行移動型の可能性が大きいことを示し、通常粘土の膨張的土圧と呼ばれる現象を説明しうるものといえよう。他方砂に限れば回転型、移動型いずれの可容速度に対しても同じ関係がえられる点は興味のある点である。

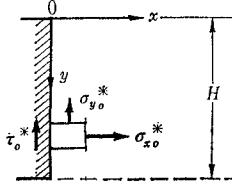
以上の議論において  $F_x$  の水圧分布の仮定の仕方に問題がないわけではないが、粘性土の膨張的変形が大きい可能性をもつことの結論は妥当性があると考えられる。それは直立のり面 ( $F_x \equiv 0$ ) の場合 vi) からは

$$H < \frac{6 c_r}{r} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi_r}{2} \right)$$

がえられるからである。

土圧論における下界定理を論ずるには可容応力解を求めるねばならない。

図-14



このような一つとして 図-14 の座標系に関して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^* &= -K r y - A a^2 (1 - e^{-x/aH}) \\ \tau^* &= \frac{A a y}{H} e^{-x/aH} \\ \sigma_y^* &= -r y + \frac{A}{2} \left( \frac{y}{H} \right)^2 e^{-x/aH} \end{aligned} \right\} \dots \text{vii)}$$

を考える。vii) の応力系はつりあい式、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau^*}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x} = -r \\ y=0; \quad \sigma_y^* &= 0, \quad \tau^* = 0 \end{aligned} \right\}$$

を満たしている。

未知定数  $A, a, K$  を決めるためまず  $x=0$  で

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}^* &= -K r y, \quad \tau_0^* = A a y / H, \\ \sigma_{y0}^* &= -r y + A y^2 / \tau H^2 \end{aligned}$$

であるが、壁面条件

$$\tau_0^* = -\sigma_{x0}^* \cdot \mu \quad (\mu = \tan \delta)$$

を考え ( $-\sigma_{x0}^*$  は圧応力に注意)

$$A a = K r H \mu$$

よってふたたび

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}^* &= -K r y, \quad \tau_0^* = K r \mu y, \\ \sigma_{y0}^* &= -r y + \frac{K r H \mu}{2 a} \left( \frac{y}{H} \right)^2 \end{aligned}$$

をうる。

$a$  の値は  $x=\infty$  で降伏が生じない条件に適するものでなければならない。ただし  $a > 0$ 。

vii) より  $x \rightarrow \infty$  では  $A a = K r H \mu$  に注意し

$$\begin{aligned} \sigma_{y\infty}^* &= -r y, \quad \tau_\infty^* = 0, \\ \sigma_{x\infty}^* &= -K r y - K r H \mu a \end{aligned}$$

したがって  $\sigma_{x\infty}^* - \sigma_{y\infty}^*$  なる最大せん断応力に比例する項は  $y=H$  で最も大きく、そこで降伏しないためには

$$\sigma_{x\infty}^* - \sigma_{y\infty}^* \leq -(\sigma_{x\infty}^* + \sigma_{y\infty}^*) \sin \phi_r \quad (y=H)$$

ただし  $c_r = 0$  とす。

$$\therefore a \geq \frac{(1-K) - (1+K) \sin \phi_r}{K \mu (1 + \sin \phi_r)} \quad \dots \text{viii)}$$

viii) だけからは  $a$  がまだ決まらぬが、 $a$  を仮定して求めた  $K$  が viii) を満足するようになればよい。

$K$  を定めるには降伏が壁面 ( $x=0$ ) で生ずる関係を用いる。 $x=0$  でも  $y=H$  でせん断応力の絶対最大値が生ずる。すなわち

$$\sigma_{x0}^* - \sigma_{y0}^* = r y (1 - K) - \frac{K r H \mu}{2 a} \left( \frac{y}{H} \right)^2$$

$$\frac{d}{dy} (\sigma_{x_0^*} - \sigma_{y_0^*}) = r \left[ 1 - K \left( 1 + \frac{\mu y}{aH} \right) \right]$$

よって、

$$K \left( 1 + \frac{\mu}{a} \right) \leq 1 \quad \text{.....ix)}$$

なら  $(\sigma_{x_0^*} - \sigma_{y_0^*})$  は  $y$  に対し単調増大で  $y=H$  で最大となる。 $\tau_0^*$  も  $y=H$  で最大となり主応力差は  $y=H$  で最大となる。ix) は  $a$  の満たすべきもう一つの条件である。

$x=0, y=H$  で降伏が生ずるためには

$$\begin{aligned} (\sigma_{x_0^*} - \sigma_{y_0^*})^2 + 4\tau_0^{*2} &= (\sigma_{x_0^*} + \sigma_{y_0^*})^2 \sin^2 \phi_r \\ \therefore \left[ (1-K) - \frac{K \mu}{2a} \right]^2 + 4(K \mu)^2 &= \left[ (1+K) - \frac{K \mu}{2a} \right]^2 \sin^2 \phi_r \quad \text{.....x)} \end{aligned}$$

が  $K$  を与える式となる。

$\phi_r = 30^\circ, \mu = 0.2$  の場合

$$a=0.5 \text{ なら } K=0.322$$

$$a=0.4 \text{ なら } K=0.309$$

となる。これに対しこれも viii), ix) の不等式を満足するが  $a=0.4$  のとき viii) の右辺は 0.392 であり  $a=0.4$  でほぼ  $K$  は最小となる。

ところで下界定理によると式 (22) で、主働時に  $U_y = 0, U_x = \text{一定}$  (負値であることに注意) としてよいから

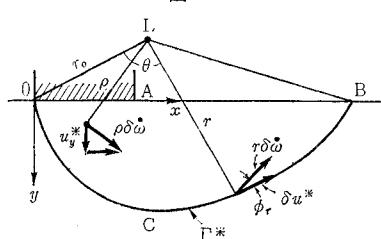
$$F_x^* > F_s$$

すなわち  $\sigma_{x_0^*}$  の最小値として正解応力 (壁面平行移動時) の近似解がえられ、上記例では土圧係数として 0.309 がえられた。Coulomb 公式による  $K$  の値は 0.305 であり、Janbu の分割法式による場合 0.306 である (Janbu 1957)。

上記のことから vii) が主働状態の生ずる時点での連続的応力解として十分な近似性をもつものであることが推定できる。

(3) 支持力論で上、下界定理を考察するため地表面上の基礎を例にとる。任意の点  $L$  を極とし基礎の一端  $O$  を通る対数螺旋線  $r = r_0 \exp(\theta \tan \phi_r)$  は(1) で説明したように、その曲線を不連続線とし、領域 OCB を剛体域とする可容速度場を形成する。いま  $L$  の回りに  $\delta\omega$  なる角速度を与えると要素変位速度  $\rho\delta\omega$  は  $u_y^*$  なる速度成分をもち、 $\Gamma^*$  上でも  $\delta u^* = r\delta\omega \cos \phi_r$  が生ずる。

図-15



境界は  $S_V = 0$  で OA 上の摩擦がなく  $F_y$  だけを考えると上界定理 (33) は

$$\int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^*) dS = \int_{OA} (F_y \cdot u_y^*) dx \leq -r \int u_y^* dV + c_r \int \delta u^* d\Gamma^*$$

となる。ここで  $-r$  と負号がついたのは、式 (33) を導く場合と  $y$  軸のとり方が逆であるからである。 $L$  を通る鉛直線の左では  $u_y^* > 0$ 、右では  $u_y^* < 0$  であるので上式は、

$$\int_{OA} (F_y \cdot u_y^*) dx + r \int_{l_e} |u_y^*| dV \leq -r \int_{r_i} |u_y^*| dV + c_r \int \delta u^* d\Gamma^*$$

ただし  $l_e$  は左側、 $r_i$  は右側

と書くことができ iv) を導いたのと同じく、左辺は  $M_D$ 、右辺は  $M_R$  を表わす。よってこの場合も  $M_D \leq M_R$  がいえる。明らかに正解表面力はこのような可容速度に適合した表面力を越えることはなく、できるだけ  $M_R/M_D$  の小さくなるようにせねばならない。これは安定解析などで慣用される安全率最小法則を証明したことほかない。

下界定理 (22) によると基礎が一様に  $U$  で沈下するとき可容表面力を  $F_y^*$  とし、 $F_y, F_y^*, U$  がいずれも  $y$  の正方向に向うことから

$$Q = \int_{OA} F_y dx \geq Q^* = \int_{OA} F_y^* dx$$

である。

$F_y^*$  としては弾性応力解が採用できる。このような試みは多くの人によってなされており (Fröhlich, Maslow, Jaroporski, 星埜など) ここに再言する要はないであろう。しかしながら弾性解を根入れのある、すなわち境界が厳密には半無限でないものについて、そのまま適用されていること、さらに自重による水平圧力と鉛直圧力を等しいと仮定していることなど検討を要する面があることは指摘されねばならない。

## 7. 結論

本論文で土のような自重と摩擦強度を無視しない材料を、剛塑性体すなわち Hvorslev 規準によって降伏するものと仮定した場合の可容応力、可容速度に関するリミットデザインの定理の形式を明らかにし、かつ応力や速度に不連続性がある場合の解析表示を行なった。その結果

- (1) 下界定理に関しては金属塑性論と全く同じ形のものが成立することが知られた。
- (2) 上界定理は自重や不連続線上の可容速度を含むところの一般性ある形式が導き出された。これは Drucker, Prager の崩壊定理として知られている命題をも包括し、とり応用性の大きいものであ

る。

- (3) ここにえられた上、下界定理を用いて、変形する塑性場内の応力解の一意性が証明できた。
- (4) のり面安定の例として、直立のり面の自立高を調べ、上界定理の結果が Drucker の結論と一致することを示し、曲線不連続線での上界定理が滑動、抵抗モーメントの大小の比較に帰着すること、すなわち最小安全率の法則を意味することを明らかにした。
- (5) 支持力についても上界定理の応用は(4)と全く同じことになることがわかった。
- (6) 土圧論に応用し、下界定理に応用できる近似性のよい連続的応力解を与えた、これは地表および壁面でのすべての条件と無限遠の物理的特性を満たすものである。また上界定理を不連続な可容速度と、連続的な可容速度の二つの場合に比較し、砂質土では両者の与える土圧の変分法則は全く一致するが、粘性土では連続的な可容速度は起こり難いものであることが推論された。その結果砂と粘土で主働状体の壁面の変位状況が、前者は回転型が可能であるに反し、後者では平行移動型が起こりやすいことが結論された。なお、本論文の解析は Coulomb, Rankine 土圧の現代的な解釈を示したことになる。

なお今後、間げき水圧のある場合の極限定理、基礎の下界法則に適用しうるより近似性の高い可容応力解などについて研究を進めて行くつもりである。

### 参考文献

- 1) Bishop, A.W. (1966) : The strength of soils as engineering materials. *Geotechnique* **2**
- 2) Drucker, D.C. & W. Prager (1952) : Extended limit design theorems for continuous media. *Quart. Appl. Math.* **9**
- 3) Drucker, D.C. & W. Prager (1952\*) : Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quart. Appl. Math.* **10**
- 4) Drucker, D.C., H.J. Greenberg & W. Prager (1951) : The safety factors of an elastic-plastic body in plane strain. *J. Appl. Mech.* **18**
- 5) Hill, R. (1948) : A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **1**
- 6) Hill, R. (1951) : On the state of stress in a plastic rigid body at the yielding point. *Phil. Mag.* **42**
- 7) Hill, R. (1956) : On the problem of uniqueness in the theory of a rigid plastic solid, I. *J. Mech. Phys. Solids* **4**
- 8) Janbu, N. (1957) : Earth pressure and bearing capacity calculation by generalized procedure of slices *Proc. 4 th L.C.S.M.* **II**
- 9) Shield, R.T. (1954) : Stress and velocity fields in soil mechanics. *J. Math. Phy.* **33**
- 10) Taylor, D.W. (1937) : Stability of earth slopes. *J. Boston Soc. Civil Engrs.* **24**
- 11) 山口柏樹 (1959) : 土の塑性流動における速度場の理論, 土木学会論文集 **63**
- 12) 山口柏樹 (1959) : Kötter の方程式の理論土質力学への適用, 土木学会論文集 **65**
- 13) 山口柏樹 (1966) : 正規圧密粘土の剛塑性理論, 土質工学研究発表会 **1**
- 14) 山口柏樹 (1967) : 土の塑性力学における応力と速度の不連続性について, *Soil. Found.* へ発表の予定  
(1967. 1. 19・受付)