多層地盤における弾性変位について*

ELASTIC DISPLACEMENT OF MULTI-LAYER SOIL SYSTEMS

植　下　　協**・G.G. マイヤホフ***
By Kano Ueshita and G.G. Meyerhof

1. 緒　　言

道路舗装構造の輪荷重のもとでのたわみ，石油タンク等円形分布荷重下の多層地盤の弾性変位を知る目的をもって，円形分布荷重のもとでの多層地盤の弾性変位を理論的，実験的に研究した結果をここに報告する。

二層弾性体の変位係数については，すでに Burmister[1),2)] が広汎に計算しているが，三層弾性体の変位係数については Schiffman[3)] や Kirk[4)] の計算結果があるものの，舗装構造の幾何条件と変位係数との関係を知るためにはこれのみでは十分でないので，舗装構造の効果を考えるのに参考となる範囲の三層問題の計算を行ない，その結果をグラフで与えた。

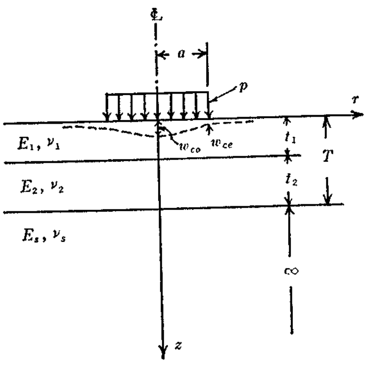
つぎにこれら弾性理論の土質問題への適応性を調べるため，多層地盤の弾性変位に関する模型実験を行ない，理論との対応を調べた。

2. 多層弾性体の理論的変位

(1) 三層弾性体の変位係数および等値弾性係数

二層問題に対し，Burmister[1)] が示したように，多層弾性体が荷重を受けたときの変位は，弾性理論により各条件に対応した変位係数を計算しておけば実際問題を扱うときに便利である。この変位係数 F は円形等分布荷重面の中央点と縁辺に対しつぎのように定義できる（図—1 参照）。

図—1 三層弾性体



$$F_{co}=w_{co}\Big/\left[\frac{2(1-\nu_s^2)}{E_s}pa\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$F_{ce}=w_{ce}\Big/\left[\frac{2(1-\nu_s^2)}{E_s}pa\right]\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに，F_{co} ：円形等分布載荷面中央点の変位係数
F_{ce} ：円形等分布載荷面縁辺の変位係数
w_{co} ：円形等分布載荷面中央点の変位
w_{ce} ：円形等分布載荷面縁辺の変位
E_s ：最下層の弾性係数
ν_s ：最下層のポアソン比
p ：荷重強度
a ：円形載荷面の半径

式 (1), (2) は w_{co}, w_{ce} を計算するための関係式であり，F_{co}, F_{ce} は多層構造の幾何条件，力学条件により Burmister 理論で別途計算される。

Schiffman[3)] は三層弾性体の変位係数の計算例を示したが，実用的なグラフを描くに十分なほどの計算ではなかった。その後実用的目的をもって Kirk[4)] がある程度計算を行なっている。しかし三層弾性体における幾何条件と変位係数の関係をよく知るためには，さらに計算を加える必要があった。そこでつぎの条件に対し，各層のポアソン比を0.5とし，各層接面でせん断力が伝えられるという仮定のもとに弾性理論による厳密計算を行なった。なお著者らは円形等分布荷重面縁辺部の変位係数もあわせて計算した。計算条件としてのパラメータはつぎのとおりである。

$E_1/E_2=2,\ 10,\ 100$
$E_2/E_s=2,\ 10,\ 100$
$T/a=0.5,\ 1,\ 2,\ 4$
$t_1/T=0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0$

以上のパラメータの組み合わせ全部に対する計算を IBM 7094 計算機（トロント大学）により行ない，その結果を 図—2,3,4,5 に図表化した。

後に，実験結果に直接対応する理論を知る必要上，つぎの三層弾性体の等値弾性係数を HITAC-5020 計算機（東京大学）により計算した（図—6 参照）。

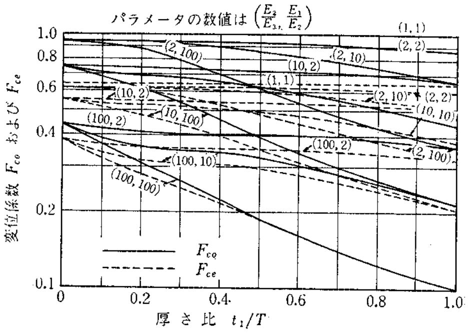
$t_1/T=1/3$
$T/a=0.5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$
$E_1/E_s=250$ で $E_2/E_s=1, 10, 50, 250$ の場合，および $E_1/E_s=200$ で $E_2/E_s=1, 10, 40, 200$ の場合

---

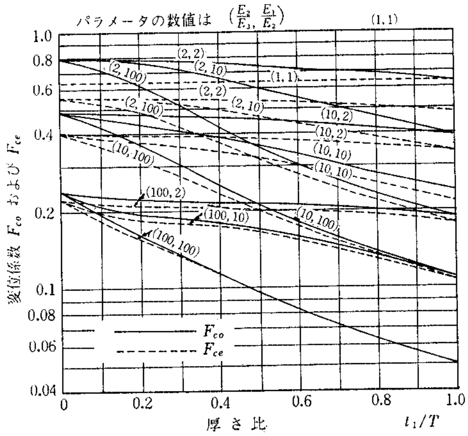
* この研究の詳細はAmerican Society of Civil Engineering の Soil Mechanics and Foundations Division に投稿中であるが，その一部を書き改め，要約し，和文としたものが本報文である。

** 正会員　工博　名古屋大学助教授　工学部土木工学科
*** Ph. D., D. Sc., Dean, Nova Scotia Technical College, Halifax, Nova Scotia, Canada

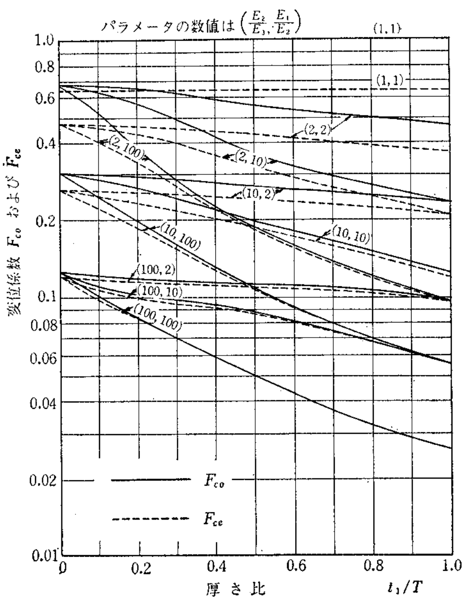
図—2　三層系の変位係数
（T/a=0.5 の場合）



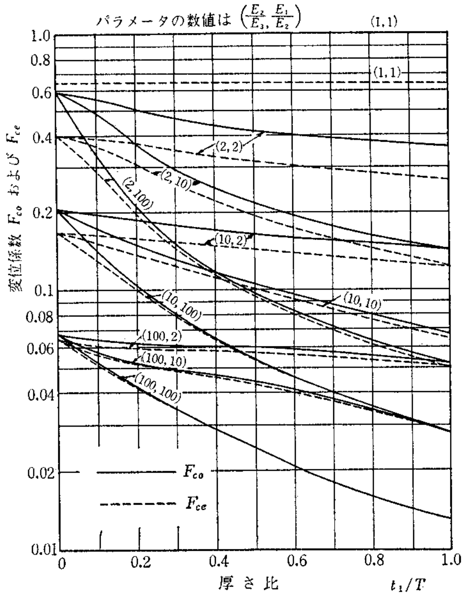
図—3　三層系の変位係数
（T/a=1 の場合）



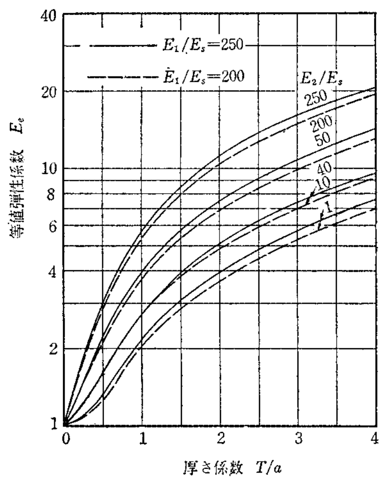
図—4　三層系の変位係数
（T/a=2 の場合）



図—5　三層系の変位係数
（T/a=4 の場合）



図—6　三層系（t_1/T=1/3）の等値弾性係数と厚さ係数の関係



なお，等値弾性係数 E_e とは，つぎのように定義されるもので，多層弾性体を解析する際，しばしば便利に利用されるものである。

$$E_e=\frac{1}{F}E_s \qquad \cdots\cdots(3)$$

著者らの計算はほぼ Mehta and Veletsos[5] の方法によるが，応力関数や数値積分法など不適当なところはいくつか修正して行なった。数値積分については Mehta らが $J_1(m\alpha)$ のゼロとなる区間ごとに Gauss の 8 点公式を適用しているが，8 点法では，たとえば $T/a=4$, $t_1/T=1$, $E_1/E_2=100$, $E_2/E_s=100$ 付近では後述の Odemark 近似値よりはるかに悪い結果となることがわかった。この欠かんは Gauss の 40 点公式を用いることに

より是正することができた。これらの計算結果により描いた曲線上に，対応する Kirk の8つの計算結果をプロットしてみたが，ほとんど完全に一致していた。

（2） Odemark 法による三層弾性体の変位係数

Odemark法による二層弾性体の変位係数はBurmisterの理論値にきわめてよく近似することが知られている[6]。そこで，Odemark法の三層弾性体の場合の適合度を調べてみた。Odemarkによる三層弾性体の沈下係数の計算式は，$\nu_1=\nu_2=\nu_s=0.5$ とすれば次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
F_{co} &= F_{co1}+F_{co2}+F_{cos}\\
F_{co1} &= \frac{E_s}{E_1}\left\{1-\frac{1}{\left[1+N_1^2\left(\frac{T}{a}\right)^2\right]^{1/2}}\right\}\\
F_{co2} &= \frac{E_s}{E_2}\left\{\frac{1}{\left[1+N_2^2\left(\frac{T}{a}\right)^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[1+N_2'^2\left(\frac{T}{a}\right)^2\right]^{1/2}}\right\}\\
F_{cos} &= \frac{1}{\left[1+N_s^2\left(\frac{T}{a}\right)^2\right]^{1/2}}\\
&\text{ここに，}\\
N_1 &= 0.9\frac{t_1}{T}\\
N_2 &= 0.9\frac{t_1}{T}\left(\frac{E_1}{E_s}\cdot\frac{E_s}{E_m}\right)^{1/3}\\
N_2' &= 0.9\frac{t_1}{T}\left(\frac{E_1}{E_s}\cdot\frac{E_s}{E_m}\right)^{1/3}+0.9\frac{t_2}{T}\\
N_s &= 0.9\frac{t_1}{T}\left(\frac{E_1}{E_s}\cdot\frac{E_s}{E_m}\right)^{1/3}+0.9\frac{t_2}{T}\left(\frac{E_2}{E_s}\right)^{1/3}
\end{aligned}\right\}\cdots(4)$$

$$\frac{E_s}{E_m}=\left[\frac{1+N_2^2\left(\frac{T}{a}\right)^2}{1+N_s^2\left(\frac{T}{a}\right)^2}\right]^{1/2}+\frac{E_s}{E_2}\left\{1-\left[\frac{1+N_2^2\left(\frac{T}{a}\right)^2}{1+N_2'^2\left(\frac{T}{a}\right)^2}\right]^{1/2}\right\}\cdots\cdots(5)$$

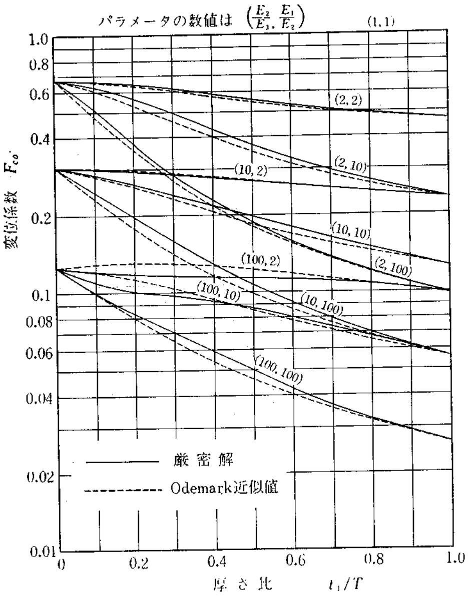
ここに E_m は第1層（表層）に対し，第2，第3層が一つの下層と考えるときのその下部複合層の等値弾性係数である。式 (4) を計算するためには式 (5) をくり返し計算して，まず E_s/E_m を求めねばならない。著者はこの計算を LPG-30 計算機（ノヴァ スコシア 工科大学）により行ない，その結果を 図—7 に厳密計算と比較して示した。これによれば，Odemark 法は三層弾性体の場合も，かなりよい近似値を与えることがわかる。

3. 多層地盤の弾性的変位に関する模型実験

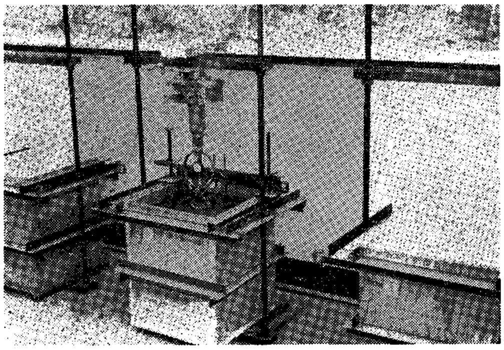
（1） 実験装置と使用材料

模型載荷実験は 50 cm 四方で 63 cm 深さの土槽3基

図—7 三層系の変位係数における厳密解と Odemark 近似値の比較



図—8 載荷試験装置



（図—8 参照）で行なった。土槽 I は硬い粘土，土槽 II は軟い粘土，土槽 III は砂で 50 cm 深さの路床を設けた。この上に，砂路盤，ソイル セメント層等をおいて多層系模型としたが，使用した粘土，砂，ソイル セメント等の性質はつぎのようである。

a) 粘土　粘土はカナダ国ノヴァスコシア州ハリファックス郡ランツにて採取したもので物理的性質はつぎのようである。

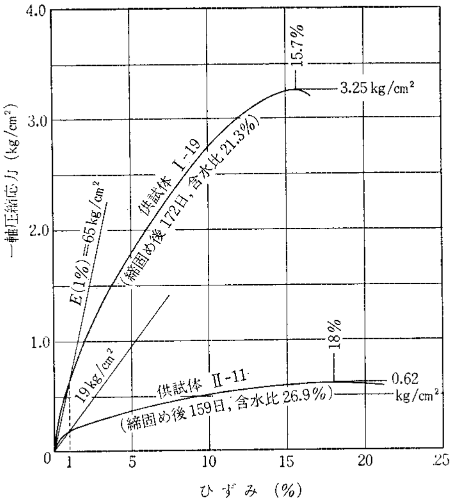
シルト分（0.074～0.005 mm）＝41％

粘土分（0.005 mm 以下）＝59％

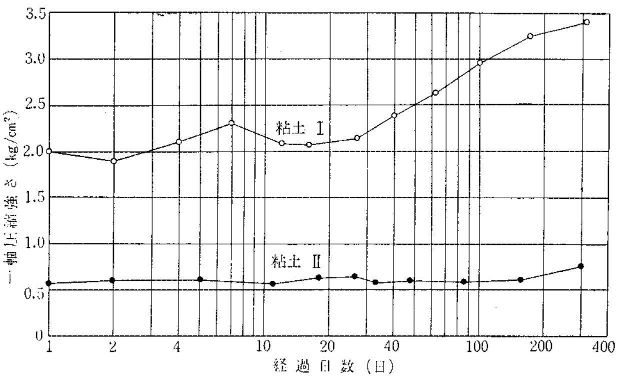
LL＝42％，PL＝22％，PI＝20

この粘土材料を含水比 22％ と 27％ の2種の状態で準備し，2種類の路床土を深さ約 50 cm に作りあげた。これら粘土の一軸圧縮試験結果，一軸圧縮強さの経時変化，一軸圧縮試験における 1％ ひずみの割線変形係数等を 図—9,10,11 に示した。なお各種の試験により計算した変形係数を 図—12 に示したが，図—12 は土の変形係

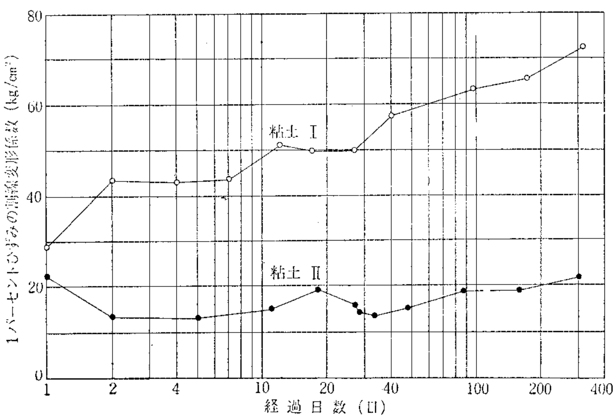
図―9 使用粘土の一軸圧縮試験



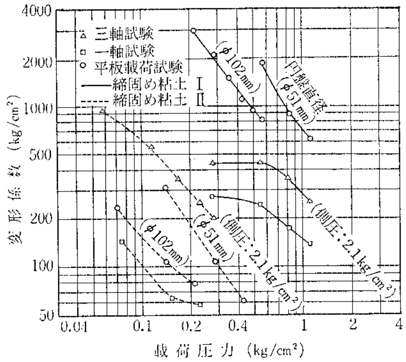
図―10 使用粘土の一軸圧縮強さの経時変化



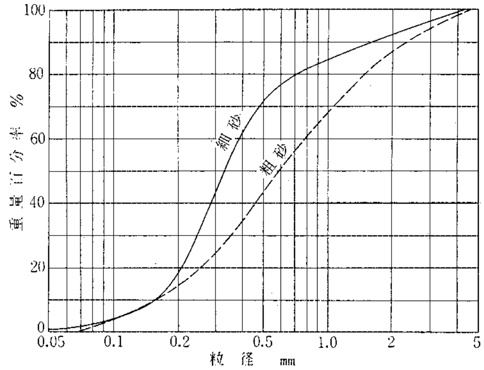
図―11 使用粘土の一軸圧縮試験における1%ひずみの割線変形係数の経時変化



図―12 使用粘土の載荷圧力と変形係数の関係



図―13 使用した砂の粒径加積曲線



数が試験法，荷重強度でかなり変化することを示し，実際問題を解くにあたっては，その問題によく対応した試験条件を用いて変形係数を求めることの重要性が示されている。

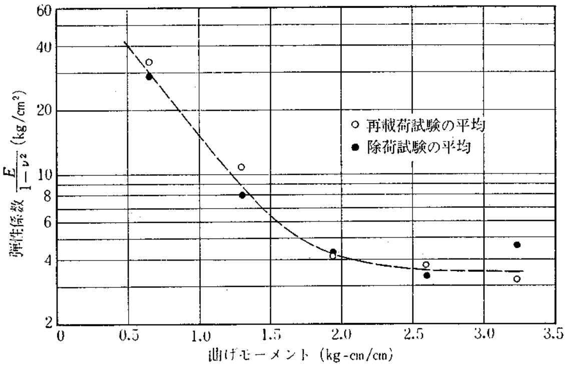
b) 砂　路床，路盤として用いた粗砂の粒度曲線を図―13 に示す。締固めは電動バイブレーターを用いたが，締固め密度は 1.88 g/cm³ であった。

c) ソイル セメント　ソイルセメントは図―13 に示す細砂をその 10% の重量のセメントと混ぜ，特製のモールド内で 2.5 cm 厚または 3.8 cm 厚の版に締固めて作った。このソイル セメント版を曲げ試験することにより求めた弾性係数を 図―14 に示す。

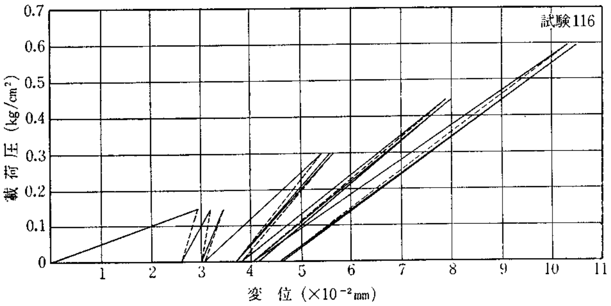
（2） 載荷試験方法

載荷試験は前記模型土槽上で，直径 25 mm, 34 mm, 51 mm, 76 mm, 102 mm 等の鋼製円板を用い，解析は剛性円板の沈下が円形等分布荷重中央点沈下の $\pi/4$ 倍であるという仮定を用いた[7]。載荷方法は 図―15 に示すごとく同一荷重強度で 3 回ずつの載荷除荷を行ないつつ，順次荷重強度をあげた。その試験結果の整理例を 図―16 に示す。図―16 によれば，粘土路床では荷重強度が十分弾性範囲内であれば，各荷重段階における第 2，第 3 の載荷時変位，第 1，第 2，第 3 の除荷時変位はほぼ同一の値を示すことがわかる。これに対し，第 1 回載荷時の変位はとび離れて大きくなったりすることが多い。土の弾性的変位を対象とするときに，第 1 回載荷のデータは解析対象としての価値が低いと考えられるので以後の解析にはすべて除外した。また砂路床，砂路盤

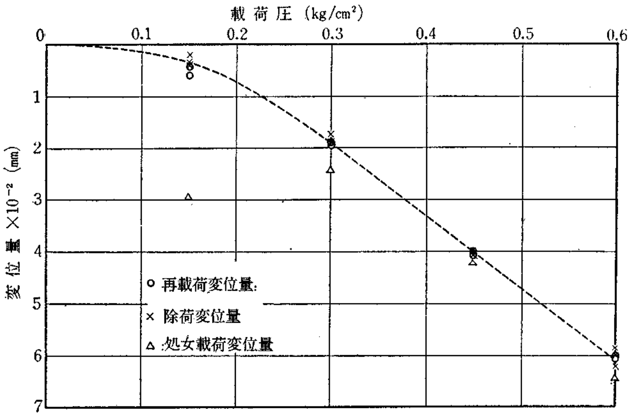
図—14 ソイル セメント版の曲げ試験による弾性係数



図—15 くり返し載荷試験



図—16 粘土路床上の載荷圧と変位量の関係

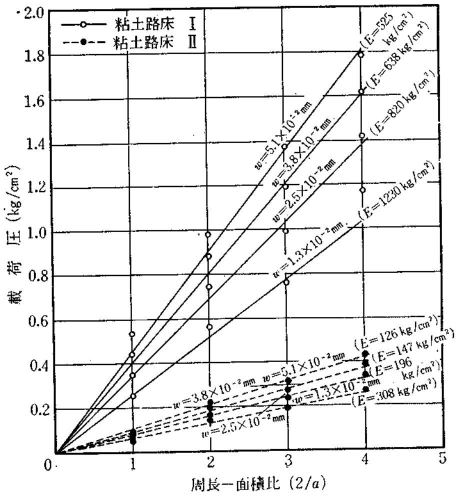


では除荷時の変位量が載荷時の変位量より小さい傾向を示したが，このような場合は除荷時の変位量が弾性的変位量であると考えて，これを解析対象とした。

(3) 粘土路床上の載荷試験

含水比 22% の粘土路床 I と含水比 27% の粘土路床 II の上で直径 25 mm, 34 mm, 51 mm, 102 mm の剛性円板で前述の方法によるくり返し載荷試験を行ない，その結果を変位量をパラメーターとした荷重強度と周長面積比の関係の図に整理したのが 図—17 である。これらは原点を通る直線としてほぼ表現できる。つぎにこの関係にもとづき，荷重強度と変位量の関係を調べてみると，両対数紙上で直線となり，指数関係で表現されることがわかる。以上による修正理論曲線と実験値との関係を示したのが 図—18 である。図—17 ならびに 図—18 は荷重強度—変位量関係は直線としては扱えず指数曲線となるが，ある変位量を生ずる荷重強度と幾何条件の間には弾性理論を利用しうると考えうる。

図—17 粘土路床上の載荷圧と周長—面積比の関係



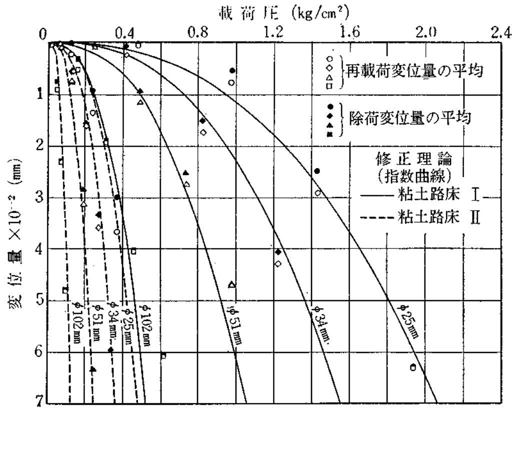
(4) 砂路床上の載荷試験

砂路床の場合，載荷時の変位量は除荷時の変位量より常に大きかった。図—19 は密度 1.88 g/cm³ の密な粗砂の路床上で行なった除荷試験から描いた変位量をパラメーターとする荷重強度—周長面積比関係図である。この図の意味は Terzaghi[8] がすでに指摘したが，載荷板寸法が大きくなると見かけの弾性係数が大きくなることを示している。したがって砂は粘土より弾性材料として扱いにくい。

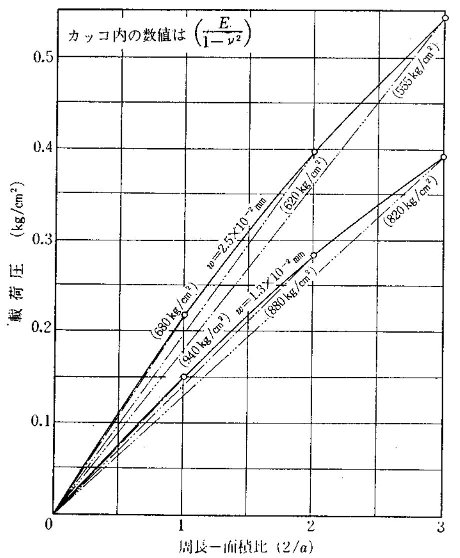
(5) ソイル セメント-粘土路床二層系の載荷試験

粘土路床 I および II のそれぞれのうえに 25

図—18 粘土路床上の載荷圧と変位量の関係



図—19　砂路床上の載荷圧と周長—面積比の関係

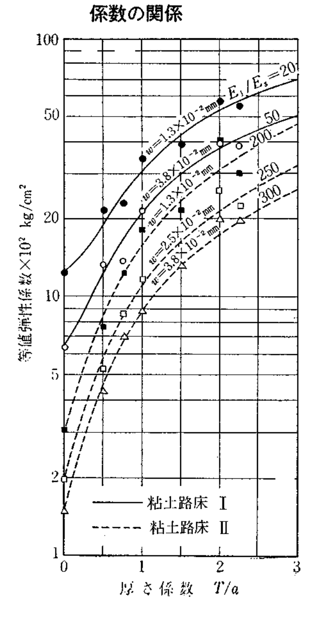


mm 厚または 38 mm 厚のソイル セメント版をおいた二層系の上で載荷試験を行ないその結果を **図—20** のように等値弾性係数と厚さ係数の関係で整理した。各載荷試験にもとづく等値弾性係数は次式で計算できる。

$$E_e=\frac{\pi(1-\nu_s^2)pa}{2w} \quad \cdots\cdots(6)$$

また各試験結果の弾性係数比は **図—20** のごとく実験結果を平均的にあらわしうる理論曲線を **図—21** の曲線群から選び出すことによって推定することができる。粘土路床 I の上にソイル セメントを載せた二層系の荷重強度変位量関係を理論曲線と比較すれば **図—22** のようである。**図—22** の理論曲線は粘土路床が **図—18** に示す荷重強度—変位量関係をもつ場合に対し二層弾性理論をあてはめたものである。

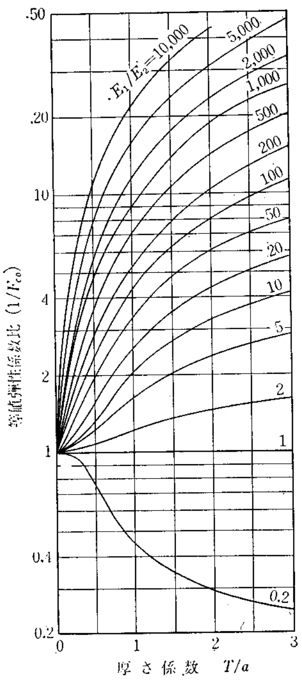
図—20　ソイル セメント/粘土路床の等値弾性係数と厚さ係数の関係



(6)　砂—粘土路床二層系の載荷試験

51 mm 厚の砂を粘土路床IIの上に密な状態で敷き，くり返し載荷試験を行ない，除荷試験にもとづいた結果を **図—23** に記入した。これによると砂の弾性係数は粘土の弾性係数の 2 倍で，これは **図—17** と **図—19** の比較によって得られる値にほぼ一致する。しかし砂路床上の場合と同様に，載荷時の変位量は除荷時の変位量より常に大きく，粘土路床やソイル セメント—粘土路床二層系の場合と異なり，弾性のとぼしいことが目だった。

図—21　二層系弾性体の等値弾性係数比と厚さ係数の関係



(7)　ソイル セメント—砂—粘土路床三層系の載荷試験

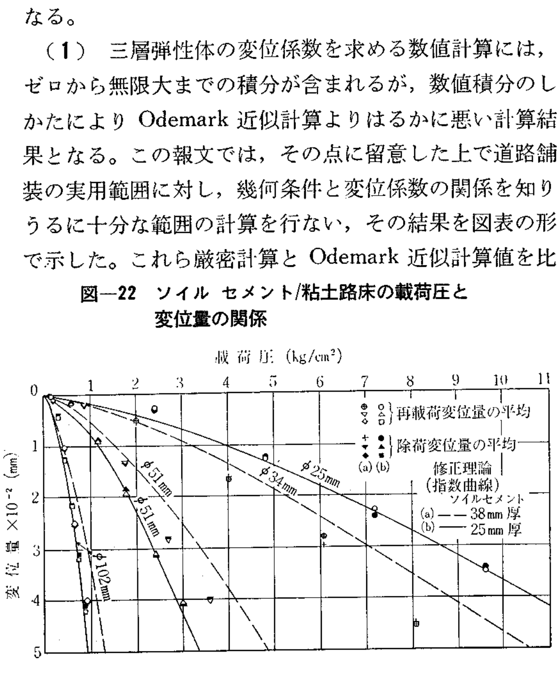
粘土路床の上に 51 mm の砂路盤をおき，その上にさらに 25 mm のソイル セメント版をおいた三層系の上で載荷試験を行ない，その結果の等値弾性係数—厚さ係数関係を **図—23** に示した。その結果と **図—6** に示した理論曲線とを対比すれば，$E_2/E_s=8\sim10$, $E_1/E_2=25$ という理論曲線と対応している。**図—23** は砂路盤がソイル セメント版に拘束されて弾性係数が 4～5 倍に増加したことを示している。

4. 結　言

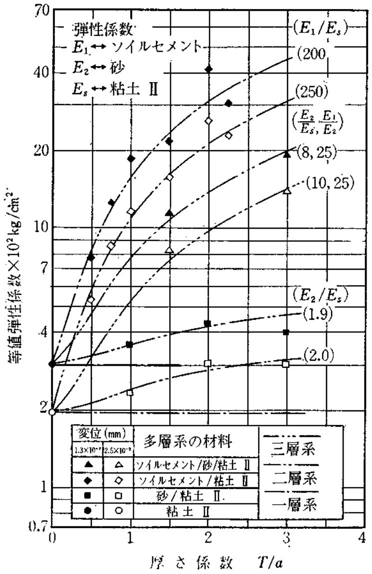
以上の研究結果の主な結論をまとめればつぎのようになる。

(1)　三層弾性体の変位係数を求める数値計算には，ゼロから無限大までの積分が含まれるが，数値積分のしかたにより Odemark 近似計算よりはるかに悪い計算結果となる。この報文では，その点に留意した上で道路舗装の実用範囲に対し，幾何条件と変位係数の関係を知りうるに十分な範囲の計算を行ない，その結果を図表の形で示した。これら厳密計算と Odemark 近似計算値を比

図—22　ソイル セメント/粘土路床の載荷圧と変位量の関係



図—23 三層系の等値弾性係数と厚さ係数の関係



較し，Odemark 法が三層弾性体の変位係数に対しても きわめて近似度の高い数値を与えることを示した。

(**2**) 一層系，二層系，三層系を含む模型の多層地盤上で載荷試験を行ない，荷重強度—変位量関係を調べたが，これら関係は弾性理論による直線関係を当初より示さず，常に指数曲線の関係を示した。

(**3**) しかし，載荷試験の幾何条件と一定の変位量を生ずる荷重強度との関係は弾性理論により解析し，また考察することができ，この意味で多層弾性理論が有用であると考えられる。

なお，この研究は植下が文部省在外研究員として，名古屋大学から Nova Scota Technical College に派遣され，National Research Council of Canada の Post-Doctoral Research Fellowship を得て，Meyerhof 研究室で行なったものである。この出張研究をご援助下さった各関係方面に感謝の意を表する次第である。

参考文献

1) Burmister, D.M. : "The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Applications to the Design of Airport Runways", Proc. H.R.B., Vol. 23, 1943, pp. 126-148.

2) Burmister, D.M. : "Applications of Layered System Concepts and Principles to Interpretations and Evaluations of Asphalt Pavement Performances and to Design and Construction", Proc. Int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements, Univ. of Michigan, 1962, pp. 441-453.

3) Schiffman, R.L. : "The Numerical Solution for Stresses and Displacements in a Three-layer Soil System", Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 2, 1957, pp. 169-173.

4) Kirk, J.M. : "Beregning af nedsyningen i lagdelte systemer", Dansk Vejtidsskrift, Vol. 38, No. 12, 1961, pp. 294-296.

5) Mehta, M.R. and Veletsos, A.S. : "Stresses and Displacements in Layered Systems", Structural Research Series, No. 178, Univ. of Illinois, 1959.

6) Odemark, N. : "Investigations as to the Elastic Properties of Soils and Design of Pavements according to the Theory of Elasticity", Statens Vaginstitut, Meddelande, No. 77, Stockholm, 1949.

7) Timoshenko, S. and Goodier, J.N. : "Theory of Elasticity", New York, McGraw-Hill, 1951, pp. 366-372.

8) Terzaghi, K. : "Theoretical Soil Mechanics", New York, Jhon Willy and Sons, 1943, pp. 396-494.

(1966.12.6・受付)