

# くり返し移動荷重による不静定はりの たわみ安定性に関する理論と実験

## DEFLECTION STABILITY OF BEAMS UNDER VARIABLE REPEATED LOADING (THEORY AND TESTS)

福本 暁士\*・小堀 為雄\*\*・吉田 博\*\*\*  
By Yuhshi Fukumoto, Tameo Kobori and Hiroshi Yoshida

### 1. 緒 言

構造物の設計において、構造物の塑性変形により生ずる崩壊メカニズムおよびそれから求められる崩壊荷重を基礎にしたいわゆる塑性設計法はその考え方において合理的なものであるとされている。単純塑性理論を用いた通常の塑性設計法では構造物に作用する荷重はすべて比例的に増加して崩壊荷重に達するものであり、荷重の履歴は一回のみである。橋構造物ではくり返し荷重が常時荷重として作用するため、塑性設計の橋構造物への適用に関する一つの問題点として、弾性限度を超えた荷重が構造物にくり返し作用するときの挙動を検討する必要がある。

構造物に弾性限度を超える荷重がくり返し作用する場合に、そのくり返しとともに構造物に残留変形が生ずる。しかし、このくり返し荷重があるサイクル数(10~20回)以上になると、残留変形が一定値に収まるとし、その後のくり返し荷重に対して構造物は完全に弾性的挙動を示す。このことを構造物がたわみ安定化または変形硬化(Shake-down)したという。これに反し、荷重のくり返しとともに、構造物の変形が発散するような場合を構造物が漸増崩壊(Incremental Collapse)するという。このほか部材断面に弾性限度を超える断面力が交番に作用するとき、その断面は通常100~1000回のくり返し数で破断にいたる。この現象を交番塑性崩壊(Alternative Plasticity)とよび、構造物に正負逆の塑性変形をうける場合に検討が必要とされている<sup>1),2),3)</sup>。

一般に変形硬化する荷重の最大値を変形硬化荷重とよんでいるが、この変形硬化荷重と塑性解析でいう崩壊荷重の比は通常の桁構造ではあまり大きくないことが示されている。また、これら両荷重と交番塑性荷重を比較すると、一般の桁構造では交番塑性荷重ははるかに大きい値を示し、検討する必要はないようである<sup>4)</sup>。

くり返し荷重による構造物の変形硬化に関する実験的研究として Massonnet, C.<sup>5)</sup> は2径間連続桁の両スパン中央に載荷した場合のメカニズム形成による崩壊荷重

と、両スパン中央と片側スパン中央に交互に荷重を載荷した場合の変形硬化荷重とを実験的に検討している。その結果、実験値は理論値とよく一致し、構造物への塑性理論の適用には変形硬化を考慮する必要があることを指摘している。また、Neal, B.G. and Symond, P.S.<sup>6)</sup> は一層1径間門型ラーメンのはりのスパン中央およびはり柱頭に鉛直および水平荷重が同時に作用したときの崩壊荷重と変形硬化荷重の実験を行なっている。その結果は理論値とよく一致したが、漸増崩壊に入ってからはずみ硬化の影響が表われることを指摘している。また、Popov, E.P. and McCarthy, R.E.<sup>7)</sup> も一層1径間門型ラーメンを用いて大がかりな実験を行なっている。それによれば実験値は理論値より大きな値を示している。それははずみ硬化の影響が表われていることおよび計算に用いた塑性ヒンジ点と実験結果では異なっている点をあげている。一方、Heyman, J. and Threlfall, B.D.<sup>8)</sup> は支持状態および荷重状態の異なったはりに対し、1 c/min と 100 c/min のくり返し荷重を数万回作用させた結果、その弾塑性挙動は静的なものとはほとんどかわりがないことを示し、構造物の塑性設計に当ってはくり返し荷重の影響を考慮する必要がないことを示している。

これらの一連の実験はすべて荷重が一定点にくり返し作用する場合に対する検討であり、一般の橋構造物に作用するようなくり返し移動荷重に対するものでない。

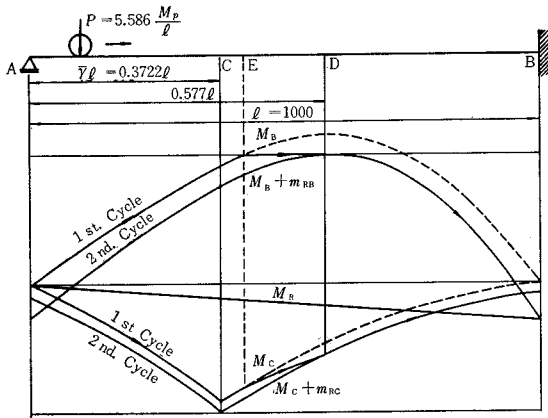
本研究は特にこの点に留意し、移動くり返し荷重装置を試作し、くり返し移動荷重をうける桁橋構造物の弾塑性性状を実験的に求めようとしたものである。不静定はりとして一端固定他端単純支持はりをを用い弾性限度を超えるくり返し固定点荷重と転動くり返し荷重による桁のたわみ挙動を調べ、これらが桁のたわみ安定性に与える影響を明らかにし、また、塑性解析による崩壊荷重との比較検討を行なったものである。

### 2. 変形硬化荷重

図-1は一端固定他端単純支持けた上を  $P=5.586 M_p/l$  (この値は後述する変形硬化荷重である)の単一集中荷重が通過する場合の点Cおよび点Bにおける曲げモーメントの変化を図示したものである。ここに、 $M_p$  は試験けたの全塑性モーメント、 $l$  はスパン長、点B(固定

\* 正会員 Ph.D. 名古屋大学助教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 工修 金沢大学助教授 工学部土木工学科  
\*\*\* 正会員 金沢大学講師 工学部土木工学科

Fig. 1 Illustration of Shake-down Loading.



端)および点 C (単純支持端より  $0.372l$ ) は後述する漸増塑性崩壊のときの転動荷重による塑性ヒンジ点である。

まず、単一集中荷重が単純支持点 A より移動し、点 E に達すると点 B の曲げモーメントは桁の全塑性モーメント  $M_p$  に達する。荷重がさらに進行すると点 B では塑性ヒンジの回転が始まり、荷重が点 D (点 B の弾性曲げモーメントが最大となる荷重点、単純支持端より  $0.577l$ ) に達して回転は最大となる。いまこの状態で荷重を取り去ると図-1 に示すように点 B の塑性ヒンジによる残留曲げモーメント  $M_R$  が分布する。したがって荷重が点 D よりさらに進行すると点 C および点 B の曲げモーメントはそれぞれの弾性曲げモーメントと残留曲げモーメントの和が作用することになる。すなわち、荷重の第 1 回の通過による点 C および点 B の曲げモーメントは図-1 の矢印のように変化する。第 2 回目以降の载荷に対しては点 B および点 C の曲げモーメントは弾性曲げモーメントと残留曲げモーメントの和の値は  $M_p$  に達する。しかし、荷重の通過とともにただちに曲げモーメントは減少し、点 C においては塑性変形は生じない。荷重がさらに進行し、点 D に達したとき点 B の曲げモーメントは  $M_p$  に達するが荷重の通過とともに曲げモーメントは減少し、塑性変形の累積は行なわれない。すなわち、第 2 回目以降の荷重の通過では完全に弾性的挙動を示すことになる。もし、荷重が  $5.586 M_p/l$  より大きくなると、第 2 回目以後の载荷に対して点 C および点 B で塑性ヒンジによる回転が累積される。すなわち、荷重のくり返しとともにはりの変形が累積することになる。このような荷重 ( $5.586 M_p/l$ ) を変形硬化荷重という。

いま、点 B に生ずる最大弾性負の曲げモーメントを  $(M_B^e)_{\min}$  とし、スパン中間に生ずる弾性正の曲げモーメントを  $M_C^e$  とする。また、それぞれの点での残留曲げモーメントを  $m_{RB}$  および  $m_{RC}$  とすると、変形硬化

の条件式<sup>1)</sup>は

$$\left. \begin{aligned} (M_B^e)_{\min} + m_{RB} &\geq -M_p \\ M_C^e + m_{RC} &\leq M_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

となる。残留曲げモーメントは図-1 のように直線分布であるから

$$m_{RC} = \bar{\gamma} m_{RB} \dots\dots\dots(2)$$

となる。ただし、 $\bar{\gamma}l$  は単純支持点からスパン中間点 C までの距離である。

図-1 に示す一端固定他端単純支持ばかりでは、単一集中荷重  $\bar{S} \cdot M_p/l$  が作用する場合

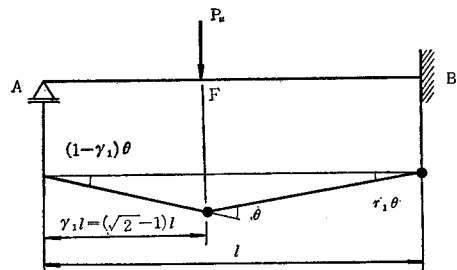
$$\left. \begin{aligned} (M_B^e)_{\min} &= -\frac{1}{3\sqrt{3}} \bar{S} M_p \\ M_C^e &= \frac{1}{2} \bar{S} \bar{\gamma} (2 - 3\bar{\gamma} + \bar{\gamma}^2) M_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

であり、式 (2) および式 (3) を式 (1) に代入すると変形硬化荷重係数  $\bar{S}$  および  $m_{RB}$  が得られる。この  $\bar{S}$  は  $\bar{\gamma}$  の関数であり、その最小値が移動荷重による変形硬化荷重係数である。すなわち、 $\bar{S} = 5.586$ 、 $\bar{\gamma} = 0.372$  および  $m_{RB} = 0.0751 M_p$  がえられる。

一方、崩壊メカニズムによるはりの崩壊荷重は  $P_u = 5.828 M_p/l$  となり、図-2 に示すように塑性ヒンジ形成点は  $r_1 l = (\sqrt{2}-1)l$  および固定端 (点 B) となる。

これから変形硬化荷重  $P_s$  と崩壊荷重  $P$  の比は  $P_s/P = 0.959$  となる。

Fig. 2 Failure Mechanism.



### 3. 実験装置および試験桁

本研究のためにくり返し移動荷重装置を試作したが、その装置の概略を説明しよう。

図-3 は移動荷重装置を示すものである。①はスパン 1 m の試験桁で、②はその固定支持端、③は単純支持端である。④は移動荷重装置であり、⑤はその一端がモーター⑧と他端が④の移動荷重装置と連結している回転シャフトであり、⑥は移動のためのガイドシャフトである。試験桁は 5:1 の比を持つレバー⑦により載荷された。移動速度は試験桁に動的影響を与えないようにゆっくりと移動させた。

試験桁は SS 41 鋼から機械切削により切り出した単一棒材で、横断面形は長方形断面と I 型断面の 2 種類からなっている。

Fig. 3 Test Setup.

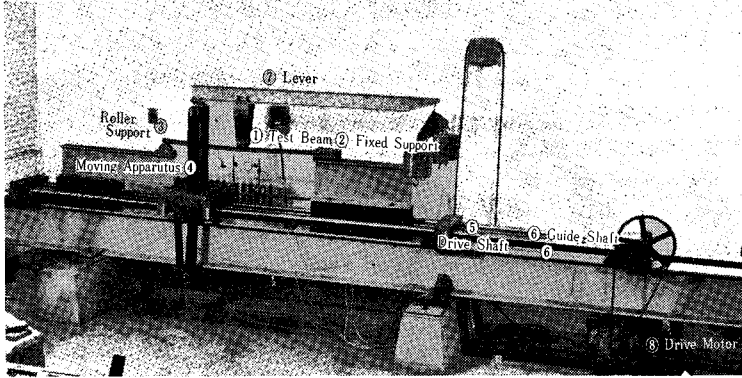


Table 1 Sectional Property of Test Beams

	Rectangular cross section	I-cross section
Z (plastic modulus)	1.500 cm <sup>3</sup>	2.819 cm <sup>3</sup>
S (section modulus)	1.000 cm <sup>3</sup>	2.265 cm <sup>3</sup>
f (shape factor)	1.500	1.249
Length	1 170 mm	1 170 mm
Span Length	1 000 mm	1 000 mm
Number	10	6

Cross-sectional Dimensions of Beams (Unit in mm)	Rectangular cross section	I-cross section

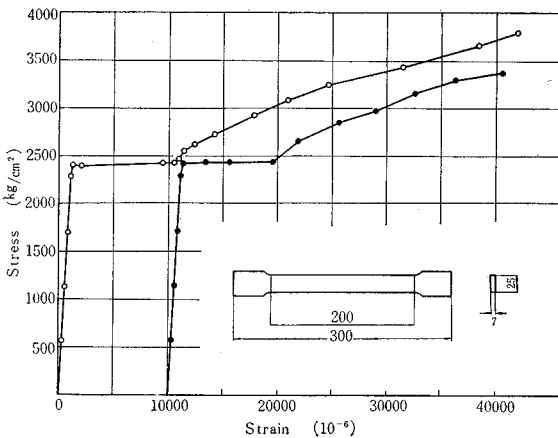
試験桁の諸元は表-1 のとおりである。

### 4. 実験結果

#### (1) 引張試験

図-4 は I 型断面×と同一母材から切り出した試験片の引張試験より得られた応力-ひずみ曲線の一例である。ヤング率は  $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、降伏応力  $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ 、ひずみ硬化に入るひずみは  $\epsilon_{st} = 10 \epsilon_y$  である。

Fig. 4 Stress-Strain Curves from Tensile Coupan Tests.



ただし、 $\epsilon_y$  は降伏ひずみである。

#### (2) 静的曲げ試験

長方形および I 型断面材の静的弾塑性性状を知るために、くり返し荷重に用いると同一部材寸法の試験桁を用いて静的曲げ試験を行なった。載荷点は 2. で述べたように、桁に対して最小の崩壊荷重をうるため、単純支持端より  $(\sqrt{2}-1)l$  の点を選んだ。載荷方法はくり返し移動荷重装置を用い、その点に停止させて実験を行なった。

図-5 および図-6 は長方形断面および I 型断面の荷重と荷重点  $F$  のたわみの実験値をプロットしたものである。これより崩壊荷重は長方形断面で  $P=242 \text{ kg}$ 、I 型断面で  $P=394 \text{ kg}$  と推測される。実験値は鋼材のもつひずみ硬化の影響によりさらに上昇の傾向にあるが、

Fig. 5 Load versus Loading Point Deflection Relationships of Beams with Rectangular Cross Section.

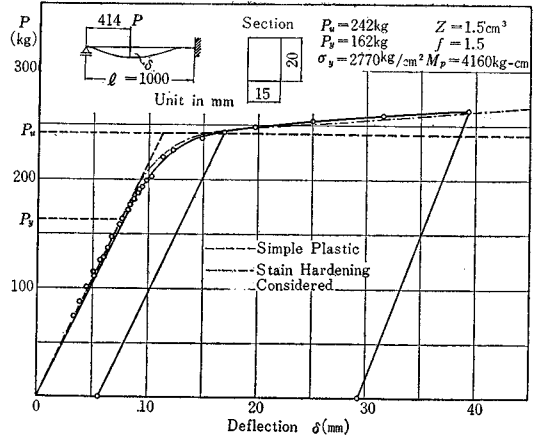
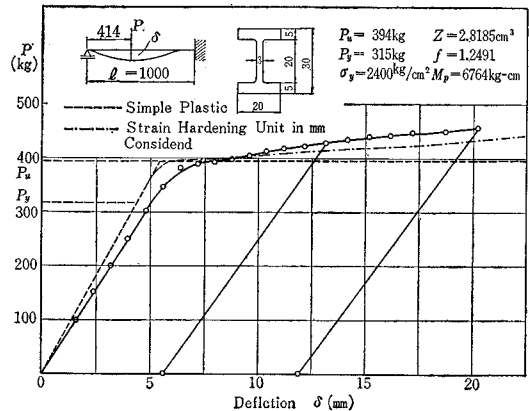


Fig. 6 Load versus Loading Point Deflection Relationship of Beams with I Cross Section.



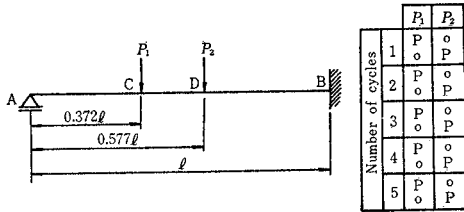
これの検討は 5. 考察で行かう。なお、引張試験から得られた降伏応力  $\sigma_y = 2770 \text{ kg/cm}^2$  および  $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$  をもとにして計算した崩壊荷重はそれぞれ上記の 242 kg および 394 kg にほぼ一致する。

(3) くり返し固定点荷重によるたわみ安定性実験

図-7 に示す試験桁を用いて固定点 (点 C および点 D) にくり返し作用する荷重によるたわみ安定性の実験を行なった。載荷点は 2. で述べたように桁に対して最小の変形硬化荷重を与えるよう単純支持端から  $0.372l$  の点 C および  $0.577l$  の点 D を選んだ。載荷順序は図-7 に示すように点 C および点 D に同一の大きさの荷重を交互に作用せしめた。

まず、荷重 P の大きさは桁の弾性限度荷重の近くから出発し、点 C および点 D に交互に載荷し、1 サイクルごとの点 C に載荷されたときの点 C のたわみ  $\delta_{cc}$  をダイヤル ゲージを用いて測定した。おのおのの点に載

Fig. 7 Loading Sequence.



荷後一定時間 (約 5~10 分) そのままの状態 で放置し、たわみの指示が静止してから測定を行ない、点 C のたわみがサイクル数にかかわらず一定値に収束すれば、荷重をわずかに増加させて同一実験操作をくり返した。

Fig. 8 Number of Cycles versus Variation of Deflection of Beams with Rectangular Cross Section under Fixed Point Loading and Moving Loading.

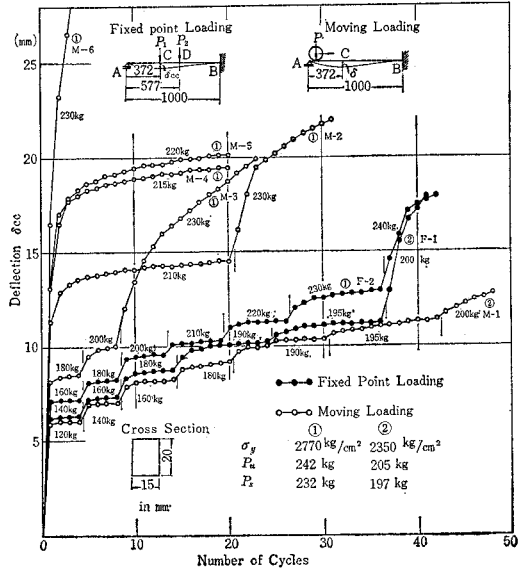


Fig. 9 Number of Cycles versus Variation of Deflection of Beams with I Cross Section under Fixed Point Loading and Moving Loading.

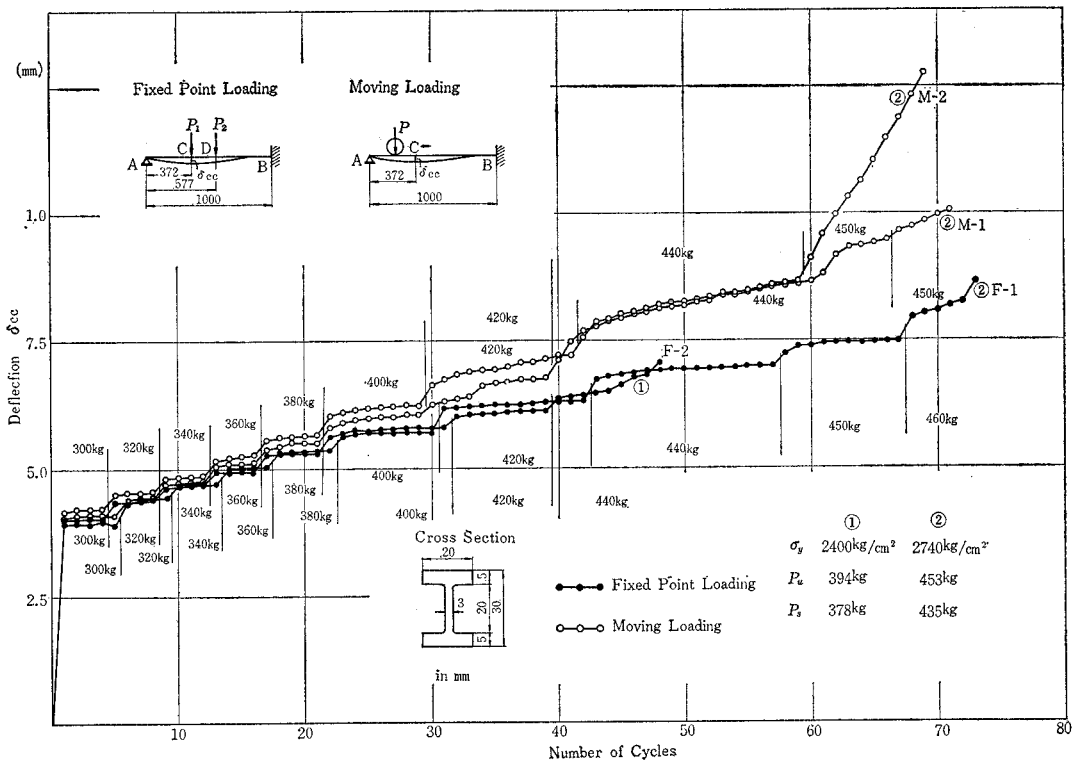


Table 2 Summary of Test Results.

Section	Loading Condition	Test Beam No.	$\sigma_y$ (kg/cm)	Theoretical Values			Experimental Results																	
				$P_u$ (kg)	$P_s$ (kg)	$P_s/P_u$	Load (kg)	Loading Cycle	Stability															
Rectangular Cross Section	Fixed Point Loading	F-1	2 350	205	197	0.959	140	4	Converged															
							160	4	Converged															
							180	6	Converged															
							190	10	Converged															
							195	12	Converged															
							200	5	Diverged															
	F-2	2 770	242	232	0.959	160	4	Converged																
						180	4	Converged																
						200	5	Converged																
						210	6	Converged																
						220	7	Converged																
						230	10	Converged																
240							6	Diverged																
							M-1	2 350	205	197	0.959	120	3	Converged										
												140	4	Converged										
												160	5	Converged										
												180	8	Converged										
												190	10	Converged										
195	12	Converged																						
200	6	Diverged																						
M-2	2 770	242	232	0.959	180	4	Converged																	
					200	4	Converged																	
					230	15	Diverged																	
					M-3	2 770	242	232	0.959	210	20	Converged												
										230	11	Diverged												
										M-4	2 770	242	232	0.959	215	20	Converged							
M-5	2 770	242	232	0.959											220	20	Converged							
															M-6	2 770	242	232	0.959	230	5	Diverged		
																				I-Cross Section	Fixed Point Loading	F-1	2 750	453
					320	4	Converged																	
					340	4	Converged																	
					360	4	Converged																	
380	4	Converged																						
400	8	Converged																						
420	12	Converged																						
440	15	Converged																						
450	10	Converged																						
460	6	Diverged																						
F-2	2 400	394	378	0.959	300	5	Converged																	
					320	3	Converged																	
					340	4	Converged																	
					360	4	Converged																	
					380	5	Converged																	
					400	10	Converged																	
410	8	Converged																						
420	9	Diverged																						
Moving Loading	M-1	2 750	453	435	0.959	300	4	Converged																
						320	4	Converged																
						340	4	Converged																
						360	4	Converged																
						380	5	Converged																
						400	8	Converged																
420	10	Converged																						
440	22	Converged																						
450	10	Diverged																						
M-2	2 750	453	435	0.959	300	5	Converged																	
					320	3	Converged																	
					340	4	Converged																	
					360	4	Converged																	
					380	5	Converged																	
					400	8	Converged																	
420	10	Converged																						
440	30	Converged																						
450	10	Diverged																						

さらに荷重を増加してゆくと、荷重のくり返しとともに点  $C$  のたわみは、もはや一定値に収束せず発散するようになる。図-8 および図-9 の白まるはこのようにしてえられた測点であり、縦軸に  $\delta_{CC}$ (mm) を横軸にサイクル数をとってある。また、実測点曲線にそってかいてある数字はそのときに作用した荷重  $P$  の大きさ (kg) である。また、これらの実験結果をまとめて表-2 に示してある。

#### (4) くり返し移動荷重によるたわみ安定性実験

くり返し固定荷重実験と同一寸法の長方形断面および I 型断面の試験桁を用いて移動荷重装置により、移動荷重によるたわみ安定性実験を行なった。移動荷重は単純支持端より固定端の方向へとくり返し移動して載荷した。移動荷重の場合も固定点荷重の場合と同じように単純支持端より 0.372  $l$  の点  $C$  に塑性ヒンジが生成される可能性があるから、移動荷重が点  $C$  にきたとき荷重

を静止せしめて、たわみ指示が安定したのち点 C のたわみを記録した。実験方法は固定荷重の場合と全く同じ方法で行ない、あるサイクル数ごとに荷重を増加して実験をくり返し、たわみが発散するまで続行した。

図-8 および図-9 の黒まるは移動荷重に対するものであり、固定荷重のもと併記してある。また、これらの実験結果をまとめて表-2 に固定点荷重の結果とともに併記してある。

5. 考 察

(1) 曲げモーメントと曲率

図-4 に示す鋼材の応力-ひずみ曲線を図-10 に示すように理想化して考える<sup>3)</sup>。すなわち、ひずみが降伏ひずみ  $\epsilon_y$  までは弾性的でそのヤング率を  $E$  とする。ひずみがひずみ硬化に入るときのひずみ  $\epsilon_{st}$  をこえ  $\lambda \epsilon_y$  までは応力  $\sigma_y$  は降伏応力を保ち、ひずみが  $\lambda \epsilon_y$  を越えると  $(\epsilon - \lambda \epsilon_y) E_{st}$  の割合で応力が増加するものとする。ただし、 $E_{st} = kE$  とする。

さて、このように応力とひずみの関係を仮定すると長方形断面では図-11 (a) に示す 3 つの、I 型断面では図-11 (b) に示す 5 つの垂直応力分布が考えられる。

Fig. 10 Idealized Stress-Strain Relationship.

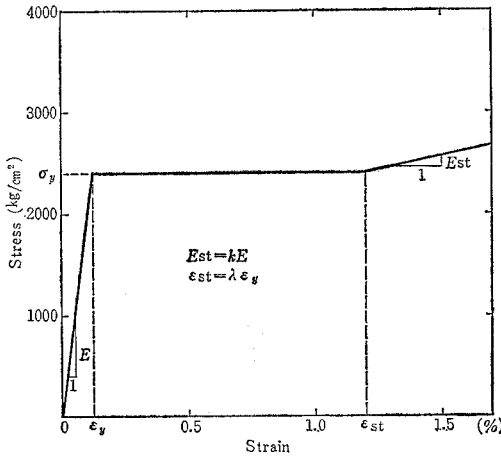
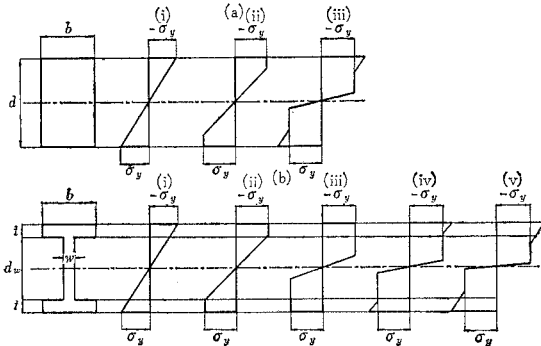


Fig. 11 Elastic and Plastic Stress Distribution in Beam.



それぞれの各場合について曲率と曲げモーメントの関係は次式のように表わされる。

長方形断面

弾性限度内 (図-11 (a) i)

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\phi}{\phi_y} \quad 0 \leq \frac{\phi}{\phi_y} \leq 1 \quad \dots\dots\dots(4)$$

ひずみ硬化以前 (図-11 (a) ii)

$$\frac{M}{M_y} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] \quad 1 \leq \frac{\phi}{\phi_y} \leq \lambda \quad \dots\dots\dots(5)$$

ひずみ硬化以後 (図-11 (a) iii)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] \\ &+ k \left\{ \left( \frac{\phi}{\phi_y} \right) + \frac{1}{2} \lambda^3 \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 - \frac{3}{2} \lambda \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\frac{\phi}{\phi_y} \geq \lambda$$

I 型断面

弾性限度内 (図-11 (b) i)

$$\frac{M}{M_y} = \frac{\phi}{\phi_y} \quad 0 \leq \frac{\phi}{\phi_y} \leq 1 \quad \dots\dots\dots(7)$$

フランジ内降伏 (ひずみ硬化前) (図-11 (b) ii)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= \frac{bd^2}{4S} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right] + \frac{\phi}{\phi_y} \left[ 1 - \frac{bd^2}{6S} \right] \\ 1 &\leq \frac{\phi}{\phi_y} \leq \frac{d}{d_w} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

ウェブ内降伏 (ひずみ硬化前) (図-11 (b) iii)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= f - \frac{w d^2}{12S} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \\ \frac{d}{d_w} &\leq \frac{\phi}{\phi_y} \leq \lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ひずみ硬化域フランジ内 (図-11 (b) iv)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= f - \frac{w d^2}{12S} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 + \frac{kbd^2}{6S} \\ &\times \left\{ \frac{\phi}{\phi_y} + \frac{\lambda^3}{2} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 - \frac{3}{2} \lambda \right\} \\ \lambda &\leq \frac{\phi}{\phi_y} \leq \lambda \frac{d}{d_w} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

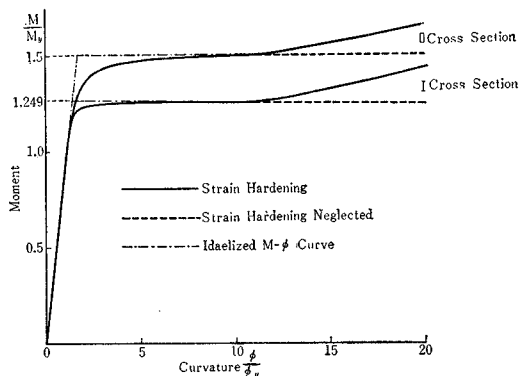
ひずみ硬化域ウェブ内 (図-11 (b) v)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_y} &= f - \frac{w d^2}{12S} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 + \frac{k w d^2}{12S} \left[ 2 \left( \frac{d w}{d} \right)^3 \right. \\ &\left. \left( \frac{\phi}{\phi_y} \right) + \lambda^3 \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 - 3 \lambda \left( \frac{d w}{d} \right)^3 \right] \\ &+ \frac{kbd^2}{24S} \left[ 4 \left( \frac{\phi}{\phi_y} \right) \left\{ 1 - \left( \frac{d w}{d} \right)^3 \right\} \right. \\ &\left. - 6 \lambda \left\{ 1 - \left( \frac{d w}{d} \right)^2 \right\} \right] \\ \frac{\phi}{\phi_y} &\geq \lambda \frac{d w}{d_w} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、 $b$  は I 型断面のフランジ幅、 $w$  はウェブ厚さ、 $d$  は桁高、 $d_w$  はウェブ高さである。

図-12 は与えられた長方形および I 型断面に対して

Fig. 12 Non-dimensionalized Moment Versus Curvature Relationships.



式(4)~式(11)を図示したものである。ここに、 $\lambda = \epsilon_{st}/\epsilon_y = 10$ ,  $k = E_{st}/E = 1/40$  とした。また、図中点線はひずみ硬化を無視したものである。

(2) 静的曲げ試験

図-5 および図-6 に長方形断面および I 型断面の静的曲げ試験の結果を示した。図中一点鎖線はひずみ硬化の影響を考慮した理論値である。ある点のたわみは桁の曲げモーメント分布がわかると式(4)~式(11)の曲率からモールの定理を用いて求めることができる。通常この計算は trial-and-error 手法によるものであるが、図-5、図-6 に示す荷重状態では、弾性曲げモーメント分布が固定端と荷重点  $F$  でその値が等しくなるので、ひずみ硬化域でも両点の曲げモーメントは等しいとした。図中の点線は単純塑性理論によるものであり、したがってひずみ硬化域を無視している。これより、ひずみ硬化を考慮したたわみ曲線と実験値との間に良好な一致がみられる。

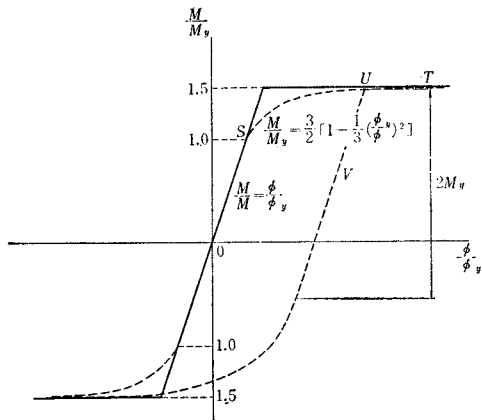
(3) くり返し荷重による桁の荷重-たわみ性状

(a) くり返し固定点荷重

図-7 に示す一端固定他端単純支持桁において点  $C$  および点  $D$  に交互に弾性限度を越えた変形硬化荷重以内の集中荷重が作用した場合、点  $C$  に載荷したときの点  $C$  のたわみはある一定値に収束し、たわみは安定化する。そのときの収束たわみは以下のようにして計算することができる。

スパンの任意の一点  $X$  において、点  $C$  に載荷したときの曲げモーメントを  $M_{Xc}$ 、点  $D$  に載荷したときの曲げモーメントを  $M_{Xd}$  とする。いま、点  $C$  に載荷した場合の収束たわみを求めるわけであるから、点  $C$  に載荷したときの桁上の各点の曲率はつぎのようにして求めることができる。すなわち、 $M_{Xc}$  および  $M_{Xd}$  が弾性範囲内であれば図-13 に示す曲げモーメント曲率曲線 ( $M$ - $\phi$  曲線) の直線上 OS 間にある。また、 $M_{Xc}$  が弾塑性範囲内にあり、 $M_{Xd}$  よりもその絶対値が大である場合は  $M$ - $\phi$  曲線上 ST 間にあることになる。しか

Fig. 13 Moment Versus Curvature Relationships.



し、点  $D$  の載荷に対する  $M_{Xd}$  が弾塑性範囲内にあり、かつ  $M_{Xc}$  よりその絶対値が大である場合は  $M$ - $\phi$  曲線上にはなく、 $M_{Xd}$  の点 (たとえば点 U) より弾性部分 OS に平行に  $|M_{Xd} - M_{Xc}|$  だけ減少した点 (たとえば点 V) にあることになる。これを式で示せば表-3 のようになる。

このようにしてあるサイクル後、たわみが安定したときの対応する荷重に対してスパンにそった各点の曲率が求まればモールの定理により容易に点  $C$  のたわみ  $\delta_{cc}$  を計算することができる。図-14 および図-15 に示す点線は弾性限度荷重  $P_y$  (固定端  $B$  が降伏モーメントに達する荷重) と変形硬化荷重の間で荷重の大きさを变化せしめくり返し固定点荷重に対する収束たわみを上記の計算方法で求めたものである。

(b) くり返し移動荷重

くり返し移動荷重による収束たわみは、くり返し固定点荷重と同様な考え方で求めることができる。すなわち、図-1 に示す一端固定他端単純支持はりにおいて、点  $A$  から点  $B$  の方向にくり返し移動載荷される場合の点  $C$  の収束たわみは点  $C$  に載荷された場合の任意の点  $X$  の曲げモーメントを  $M_{Xc}$  とし、荷重が移動したとき生ずる点  $X$  の絶対最大曲げモーメントを  $M_{Xmax}$  とすると、この値と  $M_{Xc}$  の値の大小関係から、くり返し固定点荷重に対するものと全く同様の方法にて、スパンに沿っての曲率の変化ひいては収束たわみを求めることができる。

図-14 および図-15 に示す一点鎖線は弾性限度荷重  $P_y$  と変形硬化荷重の間で荷重の大きさを变化せしめ、くり返し移動荷重に対する収束たわみを上記の計算方法で求めたものである。

図-16 (a) は変形硬化荷重  $P_s = 5.586 M_p/l$  が長方形断面にくり返し固定点載荷され、たわみ安定化したのちに固定点  $C$  および  $D$  に交互に載荷した場合に桁に生ずる塑性領域を示し、図-16 (b) はくり返し移動載荷し、たわみが安定化したのちに荷重の移動とともにどのよう

Fig. 14 Load versus Stabilized Deflection Relationship for Beams with Rectangular Cross Section.

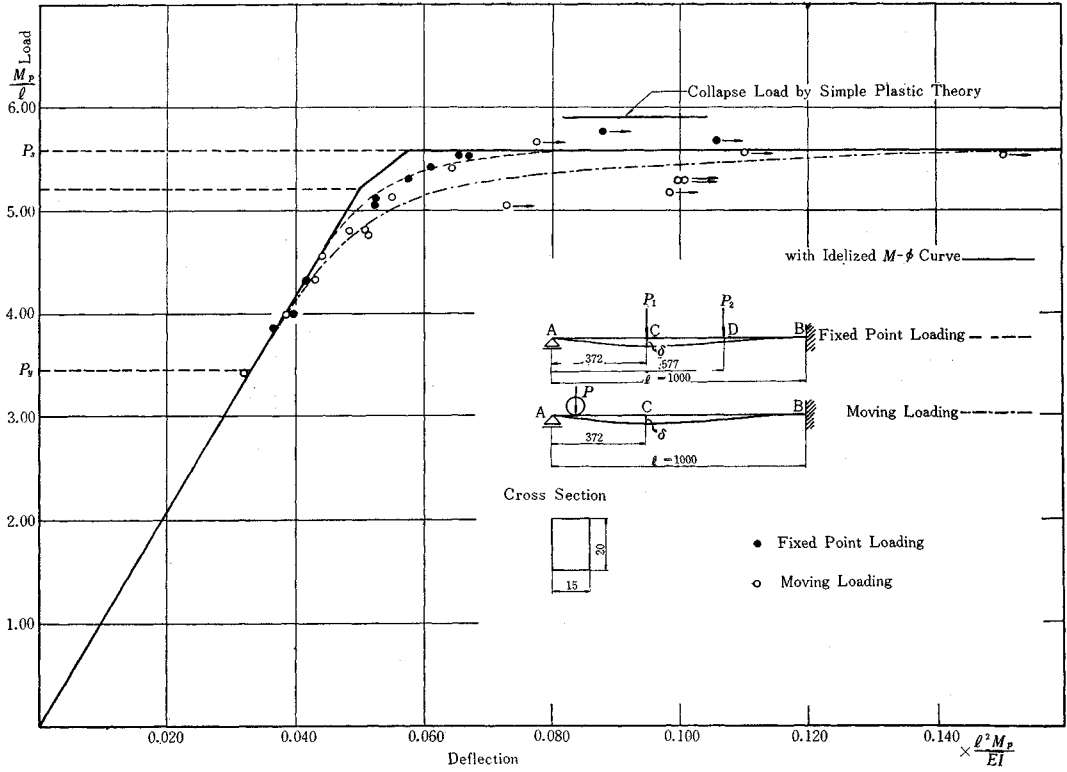


Fig. 15 Load versus Stabilized Deflection Relationship with I Cross Section.

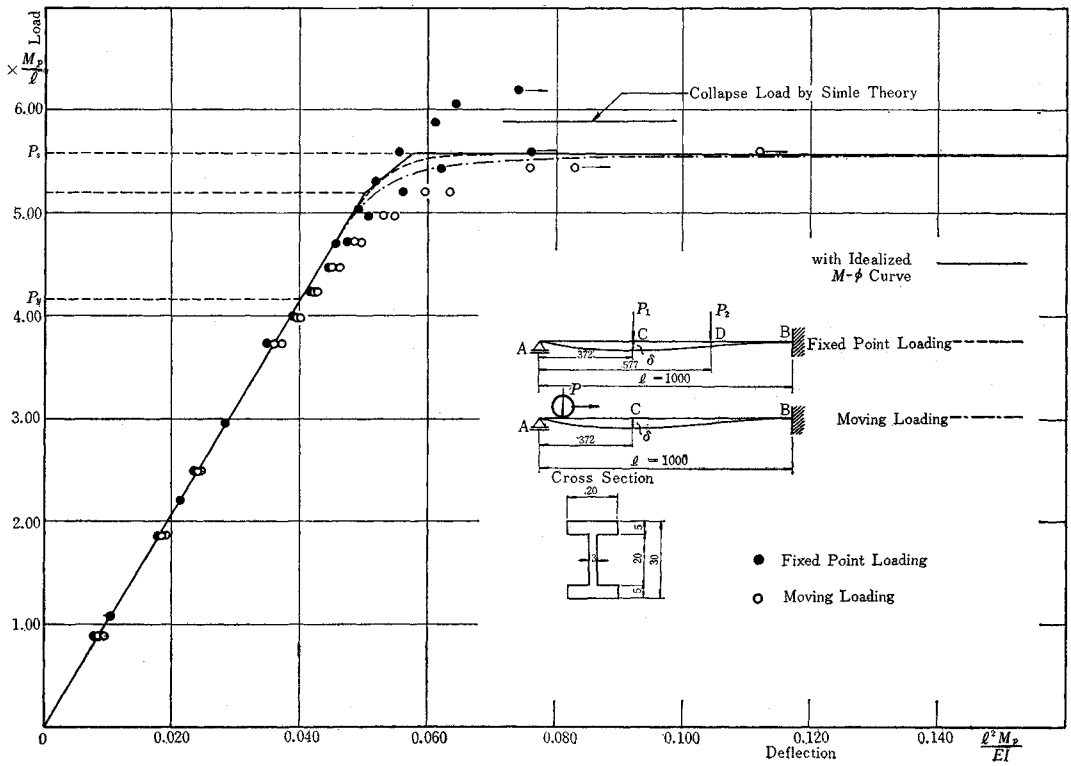
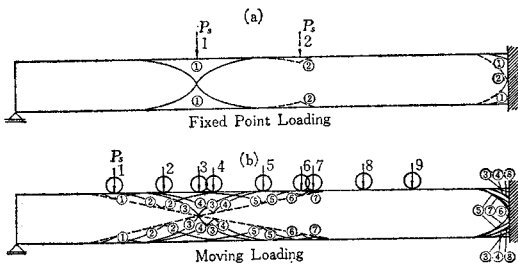




表-3

		長方形断面	I型断面
M <sub>Xc</sub>   ≤ M <sub>y</sub>	M <sub>Xc</sub>   ≤ M <sub>y</sub>	$\frac{\phi}{\phi_y} = \frac{M_{Xc}}{M_y}$	$\frac{\phi}{\phi_y} = \frac{M_{Xc}}{M_y}$
	M <sub>Xc</sub>   > M <sub>y</sub>	$\left  \frac{\phi}{\phi_y} \right  = \frac{1}{\sqrt{3-2\left  \frac{M_{Xc}}{M_y} \right }}$	フランジ内降伏 $\frac{bd^2}{4S} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi} \right)^2 \right]$ $+ \left  \frac{\phi}{\phi_y} \right  \left[ 1 - \frac{bd^2}{6S} \right] - \left  \frac{M_{Xc}}{M_y} \right  = 0$ の3次方程式より求める。 ウェブ内降伏 $\left  \frac{\phi}{\phi_y} \right  = \frac{1}{\sqrt{\frac{12S}{w d^2} \left( f - \left  \frac{M_{Xc}}{M_y} \right  \right)}}$
M <sub>Xc</sub>   ≤  M <sub>XD</sub>	M <sub>Xc</sub>   ≤ M <sub>y</sub>	$\frac{\phi}{\phi_y} = \frac{M_{Xc}}{M_y}$	$\frac{\phi}{\phi_y} = \frac{M_{Xc}}{M_y}$
	M <sub>Xc</sub>   > M <sub>y</sub>	$\left  \frac{\phi}{\phi_y} \right  = \frac{1}{\sqrt{3-2\left  \frac{M_{XD}}{M_y} \right  - \left( \left  \frac{M_{XD}}{M_y} \right  - \left  \frac{M_{Xc}}{M_y} \right  \right)}}$	フランジ内降伏 $\frac{bd^2}{4S} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\phi_y}{\phi'} \right)^2 \right]$ $+ \left  \frac{\phi'}{\phi_y} \right  \left[ 1 - \frac{bd^2}{6S} \right] - \left  \frac{M_{XD}}{M_y} \right  = 0$ の3次方程式より $\left  \frac{\phi'}{\phi_y} \right $ を求め $\left  \frac{\phi}{\phi_y} \right  = \left  \frac{\phi'}{\phi_y} \right  - \left( \left  \frac{M_{XD}}{M_y} \right  - \left  \frac{M_{Xc}}{M_y} \right  \right)$ ウェブ内降伏 $\left  \frac{\phi}{\phi_y} \right  = \frac{1}{\sqrt{\frac{12S}{w d^2} \left( f - \left  \frac{M_{XD}}{M_y} \right  \right) - \left( \left  \frac{M_{XD}}{M_y} \right  - \left  \frac{M_{Xc}}{M_y} \right  \right)}}$

Fig. 16 Penetration of Plastic Zone with Loading Condition.



に塑性領域が発生した消えてゆくかを示したものである。これより、くり返し固定点荷重によりはりに生ずる塑性領域より、くり返し移動荷重によりはりに生ずる塑性領域のほうがはるかに大きいことがわかる。したがって当然収束たわみもくり返し移動荷重によるものは大きいことが推測される。

(c) 理論値と実験値の比較検討 図-14 および図-15 はくり返し固定点荷重およびくり返し移動荷重によるたわみ安定性実験の結果(図-8 および図-9)よ

り得られた収束たわみと荷重の関係をプロットしたものである。ただし、実験では用いた鋼材により降伏応力が異なるため図では荷重およびたわみを無次元化してある。

図-14 および図-15 によればくり返し固定点荷重とくり返し移動荷重による収束たわみの差は長方形断面( $f=1.5$ )ではI型断面( $f=1.249$ )に比してその差は大きく、形状係数  $f$  が荷重-収束たわみ曲線に影響を与えている。

実験値と理論値は2種の異なる載荷状態に対してきわめて良好な一致を示している。

なお、図-14 および図-15 の実線は図-12 に示される  $M-\phi$  曲線において、 $M-\phi$  曲線を単純塑性理論に用いると同様の理想曲げモーメント曲率関係を用いて計算した収束たわみを示す。

これらの理論収束たわみ  $\delta_{cc}$  は長方形断面に対しては図-13 に示すようなひずみ硬化を無視した曲げモーメント曲率関係から求められる。

図-14 および図-15 にプロットした実験結果は、いくつかの点をのぞいて理論値とよく一致している。この

ことからたわみはひずみ硬化の影響が現われない範囲内で収束することがわかる。

## 6. 結 論

本研究ではくり返し移動荷重をうけるような桁橋構造物に塑性設計法を適用する場合に問題点の一つとなる構造物に弾性限度を超えた荷重がくり返し作用するときの桁橋の弾塑性たわみ挙動について理論的および実験的検討を加えた。このため、実験はまず移動荷重装置を試作し、長方形およびI型断面を持つ一端固定他端単純支持桁について、静的曲げ試験、くり返し固定点荷重によるたわみ安定性実験およびくり返し移動荷重によるたわみ安定性実験を行なった。

得られた結論はつぎのようである。

(1) 試作した移動荷重装置は本研究の目的に対して満足のいくもので、十分信頼するにたる実験資料をうることができた。

(2) くり返し固定点荷重またはくり返し移動荷重による変形硬化荷重は桁の崩壊メカニズムによる崩壊荷重よりわずかに小さく、その理論値は崩壊荷重の約96%である。実験結果によれば両荷重の差はほとんど認められなかった。

(3) くり返し固定点載荷による変形硬化荷重とくり返し移動荷重による変形硬化荷重はともに理想化した曲げモーメント曲率を用いての変形硬化荷重と同一であるが、図-14 および図-15 からわかるように載荷状態により収束たわみ性状は異なっている。このことは実験結果からも明らかである。

(4) 収束たわみ性状は用いた断面の形状係数によって影響をうけるが、一般に用いられるI型断面( $f \approx 1.14$ )では実用上その差を無視することができる。

(5) 変形硬化荷重以下の荷重ではひずみ硬化の影響は表われず、漸増崩壊に至ってその影響が表われる。

本研究に用いた試験はりはすべて高田機工(株)の協力をえて製作した。ここに付記して感謝の意を表する。

## 7. 記 号

- $b$  = I型桁のフランジ幅、長方形断面桁の幅
- $d$  = 桁の高さ
- $d_w$  = I型桁のウェブ高さ
- $E$  = ヤング係数
- $E_{st}$  = ひずみ硬化後のヤング係数
- $f$  = 断面の形状係数
- $k = E_{st}/E$
- $l$  = 試験桁のスパン

$M_B(M_C)$  = 点 B (点 C) における曲げモーメント

$M_p$  = 桁の全塑性モーメント

$m_R$  = 残留曲げモーメント

$m_{RB}(m_{RC})$  = 点 B (点 C) における 残留曲げモーメント

$M_{XC}(M_{XD})$  = 点 C (点 D) に荷重がのった場合の点 X の曲げモーメント

$M_{X \max}$  = 点 X の絶対最大曲げモーメント

$M_y$  = 降伏モーメント

$M_B^e)_{\min}$  = 点 B の弾性最大負曲げモーメント

$M_C^e$  = 点 C の弾性曲げモーメント

$P_s$  = 変形硬化荷重

$P_u$  = 崩壊荷重

$S$  = 弾性断面係数

$S_u$  = 崩壊荷重係数

$\bar{S}$  = 変形硬化荷重係数

$w$  = I型断面桁のウェブ厚さ

$\epsilon_{st}$  = ひずみ硬化に入るときのひずみ

$\epsilon_y$  = 降伏ひずみ

$\lambda = \epsilon_{st}/\epsilon_y$

$\sigma_y$  = 降伏応力

$\phi$  = 曲 率

$\phi_y$  = 降伏曲率

$r_1$  = 崩壊荷重による塑性ヒンジ位置の係数

$\bar{r}$  = 漸増塑性崩壊による塑性ヒンジ位置の係数

## 参 考 文 献

- 1) B.G. Neal; The Plastic Method of Structural Analysis. Chapman & Hall, London, 1959.
- 2) L.S. Beedle; Plastic Design of Steel Frames. John Wiley & Sons, New York, 1961.
- 3) A Joint Committee of the Welding Research Council and the American Society of Civil Engineers; Commentary on Plastic Design in Steel. Manuals of Engineering Practice No. 41.
- 4) Y. Fukumoto and H. Yoshida; On the Deflection Stability of the Two-Span Continuous Girder Bridges Under Variable Repeated Loads. Tran. J.S.C.E. July 1965.
- 5) C. Massonnet; Plastic Collapse and Shake-down Tests on Small Rolled Beams. IABSE, Publications Vol. 13, 1953
- 6) B.G. Neal and P.S. Symonds; Cyclic Loading of Portal Frames. Theory and Tests. IABSE, Publications Vol. 18, 1958
- 7) E.P. Popov and R.E. McCarthy; Deflection Stability of Frames under Repeated Loads. Proc. A.S.C.E. EM 1, June 1960
- 8) J. Heyman and B.D. Threlfall; The Repeated Loading of Ductile Steel Structures. Inst. of Civil Eng., Vol. 6933 Aug. 1966. (1966.11.30 受付)