

岩盤上土層表面における弾性変位について*

SURFACE DISPLACEMENT OF SOIL-ROCK SYSTEMS UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOADS

植下 協**・G.G. マイヤホフ***
By Kano Ueshita and G.G. Meyerhof

1. 緒言

半無限弾性体の表面に鉛直荷重が加えられたときの応力と変位の問題は Boussinesq¹⁾ によって解かれ、その結果は土質力学においてきわめて広く利用されている。それに対し、剛盤上弾性体の問題は Filon²⁾ によって始めて扱われ、その後 Melan³⁾, Marguerre⁴⁾, Biot⁵⁾, Pickett⁶⁾ らにより同様の問題の種々の場合が扱われたが、これらはいずれも剛盤上に生ずる応力の値に注目した研究であった。

剛盤上弾性体の表面沈下をはじめて扱ったのは Steinbrenner⁷⁾ であるが、彼は Boussinesq の解を利用した近似式を示し、この式が Terzaghi の Theoretical Soil Mechanics に紹介されたので一般によく知られ、岩盤上土層表面の弾性的沈下を知るためにもっぱら用いられてきた。最近の重要な研究として、Burmister⁸⁾ が剛盤上弾性体の応力と変位について多くの厳密解を示したが、彼の行なった計算は長方形等分布荷重の場合で、弾性体のポアソン比が 0.2 と 0.4 の場合に限られている。その後、Mandel⁹⁾, Sovinc¹⁰⁾ もこの問題の変位に関する計算を行なっている。

しかし、上述の従来の研究結果のみでは、岩盤上土層表面の弾性的沈下に関して、Steinbrenner の近似式にとっかわるに十分な厳密解が求められておらず、Steinbrenner 近似式の精度を十分検討することもできない。そこで、筆者らはポアソン比が 0 から 0.5 の範囲に対し、また円形等分布荷重、帯状等分布荷重、長方形等分布荷重に対し、また岩盤-土層接面の粗滑の異なる境界条件に対し計算し、種々の場合を図表化し、この問題の理論的傾向を調べ、また Steinbrenner の近似解との比較を行なった。

またこの問題で、下層がある程度圧縮性のある

* この研究の詳細は American Society of Civil Engineering の Soil Mechanics and Foundations Division に投稿中であるがそれを和文にて要約したものが本報文である。また、本報文の前半については第 1 回土質工学研究発表会¹¹⁾にて紹介した。

** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

*** Ph. D., D. Sc. Dean, Nova Scotia Technical College, Halifax, Nova Scotia, Canada.

二層系と考えた場合の表面変位量についても解析し、剛盤上弾性体の場合の結果と比較した。

2. 剛盤上弾性体の表面変位

(1) 変位影響値の定義

一般に剛盤上弾性体表面の鉛直変位 w は弾性論によりつぎのように表わしうる。

$$w = (p/E) BI \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 p : 荷重強度

E : 弾性体の弾性係数

B : 載荷面の幅 (または載荷面の大きさを表わすする値)

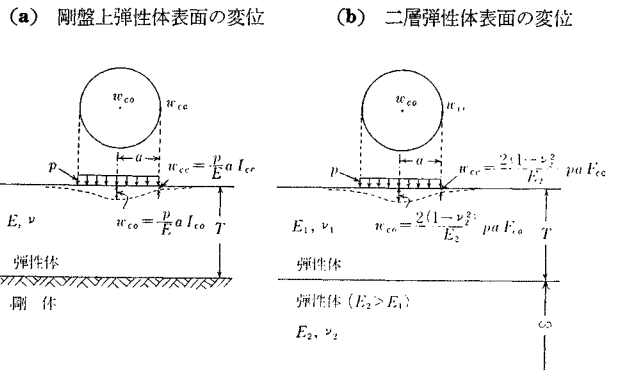
I : 変位影響値

この I は弾性理論により、弾性体のポアソン比、弾性体の層厚 T と B との比、載荷面の形状、二層間接面の条件等できまるものである。

(2) 円形等分布荷重の場合の変位影響値

剛盤上弾性体表面に円形等分布荷重が加わったときの中心点における変位影響値 I_{co} を LGP-30 および HITAC-5020 電子計算機で計算した。この場合の変位影響値 I_{co} はつぎのように定義される。

図-1 円形等分布荷重による岩盤上土層表面の弾性沈下



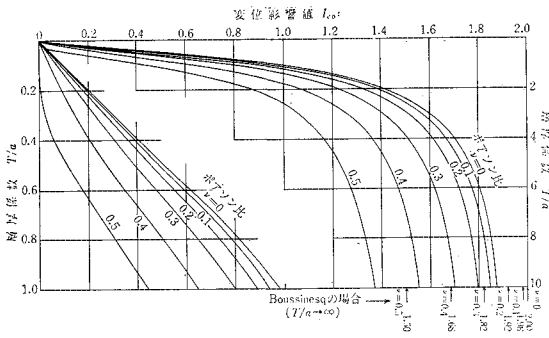
$$I_{co} = w_{co} / \left(\frac{p}{E} a \right) = f(T/a, \nu, \text{接面の条件}) \dots (2)$$

ここに、 w_{co} : 円形等分布荷重の中心点における変位 (図-1 参照)

a : 円形等分布荷重の半径

図-2 は二層界面が粘着性の場合を仮定し、ポアソン比 ν をパラメーターとして、厚さ係数 T/a と変位影響

図-2 円形等分布荷重中心点の変位影響値と層厚係数 (粘着接面の場合)



値 I_{co} との関係を示している。これらの曲線は T/a が増大すると Boussinesq の関係、すなわち

$$I_{co} = 2(1 - \nu^2) \dots \dots \dots (3)$$

に近づく。

(3) 帯状等分布荷重の場合の変位影響値

帯状等分布荷重の中央点に対する変位影響値 I_{so} はつぎのように定義される。

$$I_{so} = w_{so} \frac{p}{E} b = f(T/b, \nu, \text{接面の条件}) \dots (4)$$

ここに、 w_{so} : 帯状等分布荷重の中央点における変位 (図-3 (a) 参照)

この I_{so} を接面が粘着性の場合と滑動性の場合の両条件で LGP-30 電子計算機により計算した。その結果からつぎに定義される帯状荷重隅角部の変位影響値 I_{sc} を

図-3 帯状等分布荷重による岩盤上土層表面の弾性沈下

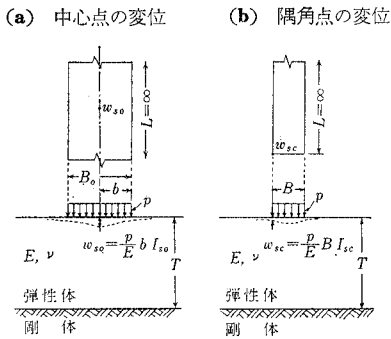
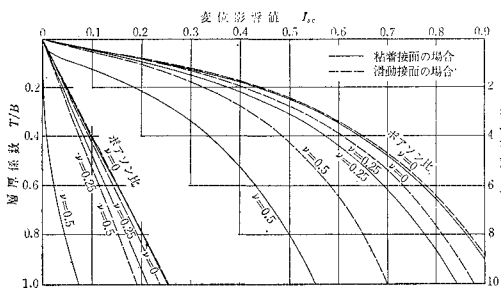


図-4 帯状等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係



重ね合せの原理で求めた。

$$I_{sc} = w_{sc} \frac{p}{E} B = f(T/B, \nu, \text{接面の条件}) \dots (5)$$

ここに、 w_{sc} : 帯状等分布荷重の隅角部における変位 (図-3 (b) 参照)

I_{sc} についての計算結果を図-4 に示す。図-4 によれば、変位影響値におよぼすポアソン比と界面条件の影響は $\nu=0.5$ 付近において顕著であるが、 $\nu=0$ 付近では微小である。

(4) 長方形等分布荷重の場合の変位影響値

長方形等分布荷重隅角点に対する変位影響値 I_{rc} はつぎのように定義される。

$$I_{rc} = w_{rc} \frac{p}{E} B = f(T/B, L/B, \nu, \text{接面の条件}) \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 w_{rc} : 長方形等分布荷重の隅角部における変位 (図-5 参照)

B : 長方形載荷面の幅

L : 長方形載荷面の長さ

I_{rc} については、円形等分布荷重についての計算をもとに図解により求めた。その結果を各ポアソン比別に図-6 (a), (b), (c), (d), (e), (f) に示した。これらの曲線は T/B が無限大において Boussinesq 理論にもとづく次式の値となる。

$$I_{rc} = \frac{(1 - \nu^2)}{\pi} \left[\lambda \log_e \frac{1 + \sqrt{\lambda^2 + 1}}{\lambda} + \log_e (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \right] \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 $\lambda : L/B$

なお Steinbrenner⁷⁾ は剛盤上弾性体表面の長方形分布荷重隅角点の変位影響値の近似値をつぎのように与えた。

$$\left. \begin{aligned} I_{rc} &= (1 - \nu^2) I_1 + (1 - \nu - 2\nu^2) I_2 \\ I_1 &= \frac{1}{\pi} \left[\lambda \log_e \frac{(1 + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \sqrt{\lambda^2 + \delta_B^2}}{\lambda(1 + \sqrt{\lambda^2 + \delta_B^2 + 1})} + \log_e \frac{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \sqrt{1 + \delta_B^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \delta_B^2 + 1}} \right] \\ I_2 &= \frac{\delta_B}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\lambda}{\delta_B \sqrt{\lambda^2 + \delta_B^2 + 1}} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

図-5 長方形等分布荷重による岩盤上土層表面の弾性沈下

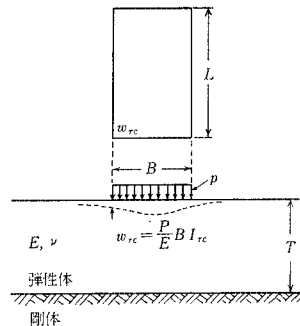


図-6 (a) 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係 (ポアソン比 0.5, 粘着接面の場合)

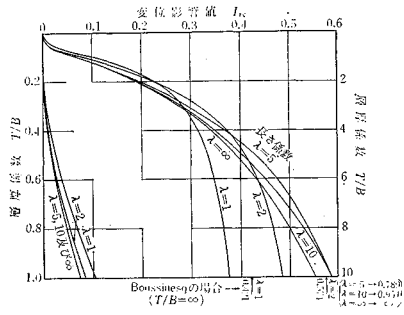


図-6 (d) 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係 (ポアソン比 0.2, 粘着接面の場合)

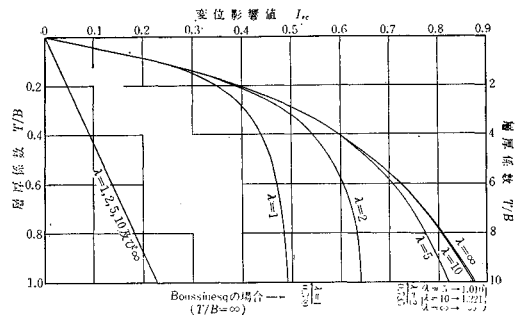


図-6 (b) 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係 (ポアソン比 0.4, 粘着接面の場合)

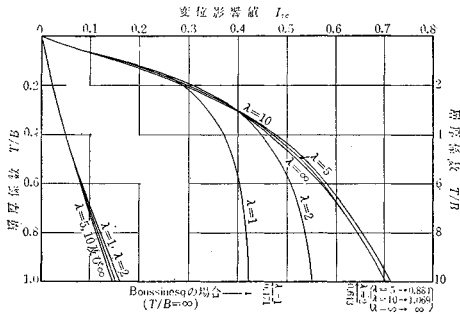


図-6 (e) 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係 (ポアソン比 0.1, 粘着接面の場合)

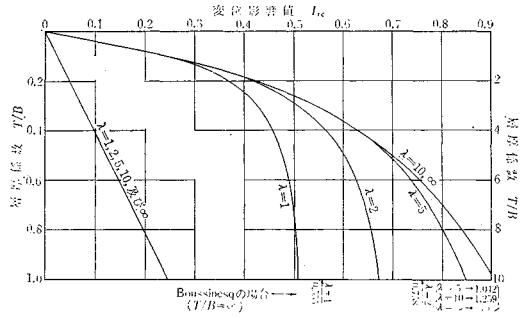


図-6 (c) 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係 (ポアソン比 0.3, 粘着接面の場合)

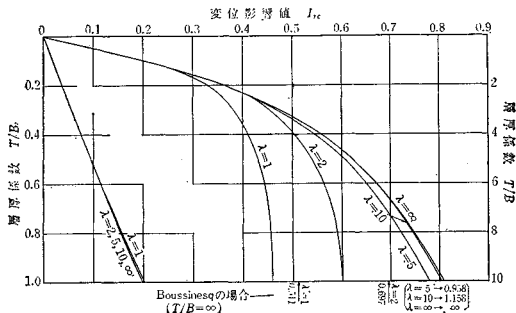
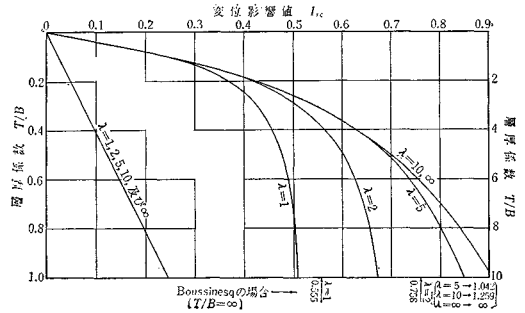
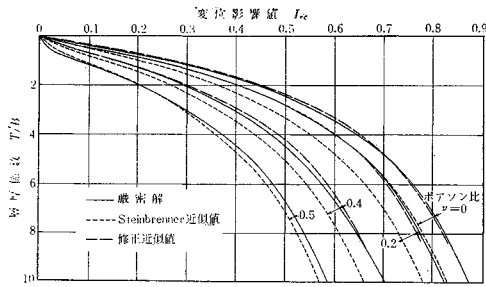


図-6 (f) 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数の関係 (ポアソン比 0, 粘着接面の場合)



図一 長方形等分布荷重隅角点の変位影響値と層厚係数との関係における Eteinbrenner 近似値と弾性論厳密解との比較(長さ係数 $\lambda=5$, 粘着接面の場合)



ここに、 $\delta_B = T/B$

この近似式と厳密解の値を $\lambda=5$ の場合に対して示してみると、図一7 のようになる。すなわちポアソン比 0.5 のときはかなりよく近似した値を与えているが、ポアソン比が小さくなると近似解は少しく小さい値を与えることがわかる。誤差は条件によって異なるが常に 1 割以下とみなせる。もし厳密解をさらによく近似計算しようとするれば、 δ_B の代わりにつぎのような等価層厚係数 δ_B' でおきかえるとよい。すなわち、

$$\delta_B' = n \delta_B \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 n は等価係数で、 $\nu=0\sim 0.4$ に対し、1.2 が適当である。

3. 二層弾性体(硬地盤上土層)の表面変位

前章の剛盤上弾性体に対しては変位影響値を用いて考察したが、二層弾性体に対しては、以下に定義されるような変位係数 F で考察するのが習慣的であり、便利でもある。

$$F_{co} = w_{co} \left[\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} pa \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$F_{ce} = w_{ce} \left[\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} pa \right] \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 F_{co} : 二層弾性体の円形等分布荷重中心点に対する変位係数

w_{co} : 二層弾性体の円形等分布荷重中心点に対する変位

F_{ce} : 二層弾性体の円形等分布荷重縁部に対する変位係数

w_{ce} : 二層弾性体の円形等分布荷重縁部に対する変位係数

E_2 : 下層の弾性係数

ν_2 : 下層のポアソン比

舗装構造のように上層が下層より硬い場合の二層弾性体の変位係数については Burmister¹¹⁾ が広範に計算しており、剛盤上弾性体については Burmister⁹⁾ と筆者らが広範に計算した。しかしこの章で扱おうとする硬地盤上土層のような二層弾性体問題は Kirk¹²⁾ が F_{co} に対

し $E_1/E_2=0.2$ の場合を計算した以外には見あたらない。そこで筆者らは、 $\nu_1=\nu_2=0.5$ で $E_1/E_2=0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ の場合の F_{co} と F_{ce} を IBM 7094 にて計算し、その結果を図一8 に示した。

この二層弾性体の場合を剛盤上弾性体の場合と比較するためにはつぎに定義する修正変位係数 F_{co}' 、 F_{ce}' を用いるほうがよい。

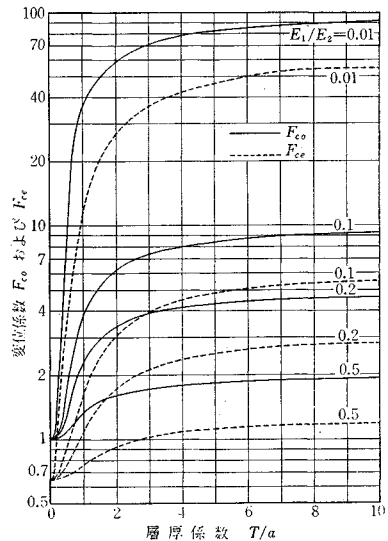
$$F_{co}' = w_{co} \left[\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} pa \right] \dots\dots\dots (12)$$

$$= \frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} F_{co}$$

$$F_{ce}' = w_{ce} \left[\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} pa \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$= \frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)} F_{ce}$$

図一8 円形等分布荷重のもとでの二層弾性体の荷重面中央点および縁部での変位係数 (F_{co} および F_{ce}) と層厚係数との関係 ($\nu_1=\nu_2=0.5$, 粘着接面の場合)



図一9 円形等分布荷重のもとでの二層弾性体の荷重面中央部での修正変位係数 F_{co}' と層厚係数との関係 ($\nu_1=\nu_2=0.5$, 粘着接面の場合)

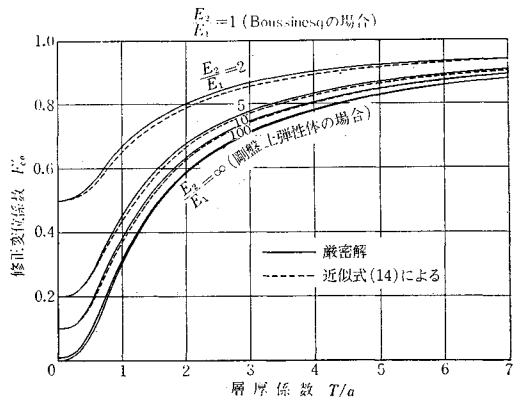
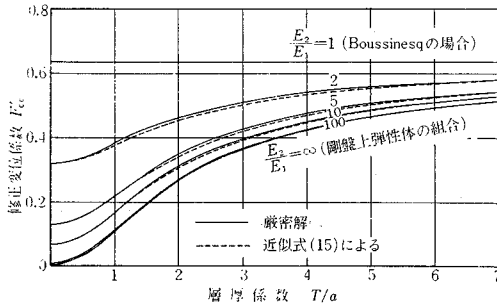


図-10 円形等分布荷重のもとでの二層弾性体の荷重面縁部での修正変位係数 F_{ce}' と層厚係数との関係 ($\nu_1=\nu_2=0.5$, 粘着界面の場合)



これら二層弾性体の F_{co}' , F_{ce}' を剛盤上弾性体の場合および Boussinesq の場合と比較して示したのが、図-9 および 図-10 である。

なお、剛盤上弾性体の修正変位係数 F_{cor}' および F_{cer}' にもとづいて任意の二層弾性体の修正変位係数 F_{co}' および F_{ce}' を近似的に次式で求めることができる。

$$F_{co}' = F_{cor}' + \frac{E_1}{E_2} (1 - F_{cor}') \dots\dots\dots(14)$$

$$F_{ce}' = F_{cer}' + \frac{E_1}{E_2} (0.637 - F_{cer}') \dots\dots\dots(15)$$

ここに、

$$F_{cor}' = \frac{1}{2(1-\nu_1^2)} I_{co}$$

$$F_{cer}' = \frac{1}{2(1-\nu_1^2)} I_{ce}$$

式 (14)、式 (15) で計算した修正変位係数も比較のために 図-9、図-10 に記入して示した。

4. 結 言

この報文の結果と結論を要約すればつぎのようである。

(1) 岩盤上土層表面の弾性的沈下量を推定する目的をもって、剛盤上弾性体表面に円形等分布荷重、帯状等分布荷重、長方形等分布荷重などが加わったときの弾性変位量を変位影響値のかたちで、弾性理論にもとづき数値計算した。

(2) Steinbrenner の近似解と弾性論厳密解の比較を行なったが、両者の相異は概して1割以内とみなせる。 $\nu=0.5$ では Steinbrenner 式の近似度はよいが、ポアソン比が0から0.4の範囲で近似度をさらによくするためには、Steinbrenner 式中の δ_B の代わりに $\delta_B' = 1.2\delta_B$ を用いるとよい。

(3) 上層弾性体のポアソン比が0.5に近い場合には剛盤上弾性体の変位量は界面の状態およびポアソン比の相異に大きい影響をうけるが、ポアソン比が0に近くなると、二層界面の状態、ポアソン比の相違の影響はほとんどなくなる。

(4) 二層弾性体(硬地盤上土層)の各層のポアソン比を0.5と仮定したときの円形等分布荷重面の中心と縁部における表面変位量を変位係数または修正変位係数の形で計算した。また剛盤上弾性体の変位影響値にもとづき、一般の二層弾性体の修正変位係数を近似計算する方法を示した。

なお、この研究は植下が文部省在外研究員として、名古屋大学から Nova Scotia Technical College に派遣され、National Research Council of Canada の Post-Doctoral Research Fellowship を得て、Meyehof 研究室で行なったものである。この出張研究をご援助下さった各関係方面に感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Boussinesq, J. : "Applications des Potentials", à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques, Paris, Gauthier-Villard, 1885.
- 2) Filon, L.N. G. : Phil. Trans. Royal Society, Series A, Vol. 201, 1903, p. 107.
- 3) Melan, E. : Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht", Beton u. Eisen, Vol. 18, 1919, pp. 83-85.
- 4) Marguerre, K. : "Druckverteilung durch eine elastische Schicht auf starrer rauher Unterlage", Ingenieur-Archiv, Vol. 2, 1931, pp. 108-117.
- 5) Biot, M.A. : Effect of Certain Discontinuities on the Pressure Distribution in a Loaded Soil", Physics, Vol. 6, 1935, pp. 367-375.
- 6) Pickett, G. : "Stress Distribution in a Loaded Soil with Some Rigid Boundaries", Proc. H.R.B., Vol. 18, Part 2, 1938, pp. 35-48.
- 7) Steinbrenner, W. : "Tafeln zur Zetzungsberchnung", Die Strasse, Vol. 1, 1934, pp. 121-124.
- 8) Burmister, D.M. : "Stress and Displacement Characteristics of a Two-Layer Rigid Base Soil System: Influence Diagrams and Practical Application" Proc. H.R.B., Vol. 35, 1956, pp. 773-814.
- 9) Mandel, J. : "Consolidation of Clay Layers", Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, 1957, pp. 360-363.
- 10) Sovinc, I. : "Stresses and Displacements in a Limited Layer of Uniform Thickness, resting on a Rigid Base, and subjected to an Uniformly Distributed Flexible Load of Rectangular Shape" Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, 1961, pp. 823-827.
- 11) Burmister, D.M. : "The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Application to the Design of Airport Runways" Proc. H.R.B., Vol. 23, 1943, pp. 126-148.
- 12) Kirk, J.M. : "Beregning of nedsynkningen i lagdelte systemer", Dansk Vejtidskrift, Vol. 38, No. 12, 1961, pp. 294-296.
- 13) 植下 協 : 「岩盤上土層表面の弾性的沈下について」, 第1回土質工学研究発表会講演集, 1966, 土質学会, pp. 175~178.

【付 記】 本論文における計算のうち、円形等分布荷重に対する変位影響値 I および変位係数 F を求める理論および計算過程を一例として紹介する。

(1) 計算に用いた座標系

この論文で円形等分布荷重による表面変位を求めた地

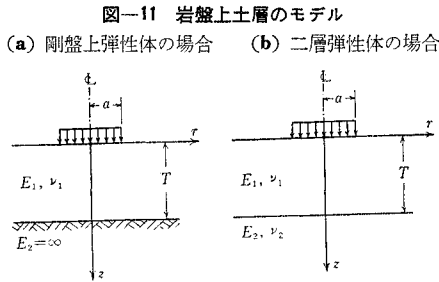


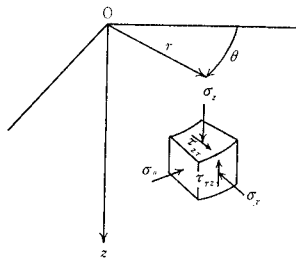
図-11 岩盤上土層のモデル

(a) 剛盤上弾性体の場合 (b) 二層弾性体の場合

盤のモデルは、図-11

(a) に示す剛盤上弾性体の場合と、図-11 (b) に示す二層弾性体の場合とである。この問題は軸対称であるため、図-12 に示すような円筒座標で考え、原点は地表面の荷重中心点にとり、z 点は下方を正とした。

図-12 座標系



(2) つりあい方程式

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

ここに、 σ_r = 半径方向の直応力

σ_θ = 円周方向の直応力

σ_z = 鉛直方向の直応力

τ_{rz} = 円周に沿い鉛直方向に働くせん断応力

これらの応力は土質力学における習慣に従い、圧縮応力を正とした。各応力の正方向を 図-12 の矢印で示してある。

(3) 適合条件式

$$r^4 \phi_j = 0$$

$$\text{ここに、} \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$\phi_j = j$ 番目層内の応力関数

(4) 応力関数で表現した各応力

$$\sigma_{zj} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} - (2 - \nu_j) \nabla^2 \phi_j \right]$$

$$\sigma_{rj} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} - \nu_j \nabla^2 \phi_j \right]$$

$$\sigma_{\theta j} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} - \nu_j \nabla^2 \phi_j \right]$$

$$\tau_{rzj} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} - (1 - \nu_j) \nabla^2 \phi_j \right]$$

ここに、 j は j 番目層内の値であることを示す。

(5) 変位に関する式

$$w_j = \frac{1 + \nu_j}{E_j} \left[2(1 - \nu_j) r^2 \phi_j - \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} \right]$$

$$u_j = -\frac{1 + \nu_j}{E_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial z}$$

ここに、 $w_j = j$ 番目層内のある点の鉛直変位

$u_j = j$ 番目層内のある点の半径方向変位

これらの変位は座標軸プラス方向を正とする。

(6) 応力関数

適合条件式を満足する応力関数はつぎのようなものである。

$$\phi_{mj} = J_0(m\rho) [c_{j1} \cosh m\zeta + c_{j2} \sinh m\zeta + c_{j3} \zeta \cosh m\zeta + c_{j4} \zeta \sinh m\zeta]$$

ここに、 $\zeta = \frac{z}{T}$

$$\rho = \frac{r}{T}$$

J_0 = 第1種0次のベッセル関数

m = 無次元のパラメーター

$c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}$ は j 番目層に対する積分定数で境界条件によって定まるものである。

(7) 境界条件

(7-A) 地表 ($\zeta=0$) における条件

$$(i) \sigma_{z1} = p \alpha \int_0^\infty J_1(m\alpha) J_0(m\rho) dm$$

[Fourier-Hankel 変換]

$$= \begin{cases} p & [\alpha > \rho > 0 \text{ に対し}] \\ \frac{1}{2} p & [\rho = \alpha > 0 \text{ に対し}] \\ 0 & [\rho > \alpha > 0 \text{ に対し}] \end{cases}$$

$$= \int_0^\infty \sigma_{zm} dm$$

ここに、

$$\alpha = \frac{a}{T}$$

J_1 = 第1種1次のベッセル関数

$$\sigma_{zm} = p \alpha J_1(m\alpha) J_0(m\rho) \quad [\zeta=0 \text{ に対し}]$$

(ii) $\tau_{rz1} = 0$

(7-B) 二層接面 ($\zeta=1$) における条件

(7-B-1) 剛盤上弾性体 (粘着接面) の場合

(i) $w_1 = 0$ (岩盤を非圧縮性と仮定)

(ii) $u_1 = 0$ (弾性体と剛体とは接面で相対移動しないと仮定)

(7-B-2) 二層弾性体 (粘着接面) の場合

(i) $w_1 = w_2$

(ii) $u_1 = u_2$

(iii) $\sigma_{z1} = \sigma_{z2}$

(iv) $\tau_{rz1} = \tau_{rz2}$

(7-C) 無限深さ ($\zeta = \infty$) における条件 (二層弾性体の場合に対し)

(i) $\sigma_{z2} = 0$

(ii) $w_2 = 0$

(8) $c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}$ を決めるために用いた応力と変位の式

$$\sigma_{zmj} = \left[c_{j1} \sinh m \zeta + c_{j2} \cosh m \zeta + c_{j3} \left(\zeta \sinh m \zeta - \frac{1-2\nu_j}{m} \cosh m \zeta \right) + c_{j4} \left(\zeta \cosh m \zeta - \frac{1-2\nu_j}{m} \sinh m \zeta \right) \right] \times \frac{m^3}{T^3} J_0(m \rho)$$

$$\tau_{rzmj} = - \left[c_{j1} \cosh m \zeta + c_{j2} \sinh m \zeta + c_{j3} \left(\zeta \cosh m \zeta + \frac{2\nu_j}{m} \sinh m \zeta \right) + c_{j4} \left(\zeta \sinh m \zeta + \frac{2\nu_j}{m} \cosh m \zeta \right) \right] \times \frac{m^3}{T^3} J_1(m \rho)$$

$$w_{mj} = - \frac{1+\nu_j}{E_j} \left[c_{j1} \cosh m \zeta + c_{j2} \sinh m \zeta + c_{j3} \left(\zeta \cosh m \zeta - \frac{2-4\nu_j}{m} \sinh m \zeta \right) + c_{j4} \left(\zeta \sinh m \zeta - \frac{2-4\nu_j}{m} \cosh m \zeta \right) \right] \times \frac{m^2}{T^2} J_0(m \rho)$$

$$u_{mj} = \frac{1+\nu_j}{E_j} \left[c_{j1} \sinh m \zeta + c_{j2} \cosh m \zeta + c_{j3} \left(\frac{1}{m} \cosh m \zeta + \zeta \sinh m \zeta \right) + c_{j4} \left(\frac{1}{m} \sinh m \zeta + \zeta \cosh m \zeta \right) \right] \times \frac{m^2}{T^2} J_1(m \rho)$$

ここに, $\sigma_{zj} = \int_0^\infty \sigma_{zmj} dm,$

$$\tau_{rzj} = \int_0^\infty \tau_{rzmj} dm,$$

$$w_j = \int_0^\infty w_{mj} dm$$

$$u_j = \int_0^\infty u_{mj} dm$$

(9) 計算した式

$$w_{co} = - \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_0^\infty \left[c_{j1} - c_{j4} \frac{2-4\nu_j}{m} \right] \frac{m^2}{T^2} dm$$

$$w_{ce} = - \frac{1+\nu_1}{E_1} \int_0^\infty \left[c_{j1} - c_{j4} \frac{2-4\nu_j}{m} \right] \times \frac{m^2}{T^2} J_0(m \alpha) dm$$

これらの式を次式に代入し, I または F の値として計算した。

変位影響値:

$$I_{co} = w_{co} \left/ \frac{p}{E} a \right.$$

$$I_{ce} = w_{ce} \left/ \frac{p}{E} a \right.$$

変位係数:

$$F_{co} = w_{co} \left[\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} pa \right]$$

$$F_{ce} = w_{ce} \left[\frac{2(1-\nu_2^2)}{E_2} pa \right]$$

(10) 計算の実施手順

上述の式により I および F を求めるには無限範囲の数値積分を行なわねばならないが, その方法としては $J_1(m \alpha)$ がゼロとなる区間ごとに Gauss の 8 点公式を利用して区分求積してゆき, この数値積分をつぎの関係が満たされるまで続けた。

$$\frac{\text{(第 } N \text{ 番目区間の積分による増分)}}{\text{(第 } N \text{ 番目区間までの総積分値)}} < 0.001$$

しかし, 収れんのわるい場合は上記方法による 100 区間の積分後も上式の関係が満たされない場合があった。しかしここに述べる積分法によると, 積分値は各区間ごとに最終値の上下に振動しつつ収れんする性質をもち, 最終 2 回分の答の平均により十分精度の高い答の得られることがわかっていたので, 100 区間の積分を行なった場合は, 上式の関係とは無関係に計算を打ち切った。