

都市人口分布形態に関する情報理論的研究

THE INFORMATION THEORY APPLIED TO A STUDY ON THE DISTRIBUTION PATTERN OF URBAN POPULATION

天 野 光 三*・青 山 吉 隆**・藤 田 昌 久**

By Kozo Amano, Yoshitaka Aoyama and Masahisa Fujita

1. 緒 言

産業構造の高度化につれて、産業、人口の都市集中は著しく、都市の経済活動規模は急激に増大しつつある。これに対応するための都市公共施設の不足や公害の増大など、いわゆる都市問題は世界のほとんどすべての大都市に共通の課題となっている。そうした都市に関するさまざまな課題はいずれも根底で密接に結合しており、経済的、社会的にみた共通の基盤から派生する事象として取りあげねばならない。

このためには、将来における都市域の発達と土地利用、都市の経済活動機能、人文地理的客観条件の変化などに関する分析が必要である。本文においては、そのうちまず都市における人口分布形態について考察した基礎的研究についてのべる。

一般に、都市人口密度は、都市中心部までの時間距離に対して、指数分布をなすことが、指摘されており¹⁾、東京近郊住宅圏における実績値も都心部周辺からほぼ完全な指数分布をなして減少している。この現象は、都心部の影響力の大きい都市であるほど、顕著であると考えられる。産業活動にとって、都心部から遠のくことは、都市部の中核管理機能から受けるサービスが減少することを意味し、また個々の通勤者にとっては、毎日の通勤に要する通勤時間が増大することを意味する。そして、このことが、都心部から離れるにしたがって、人口密度が減少していく原因と考えられる。

都市人口分布形態の予測や、さらにのぞましい形態への誘導のためには、この当然の帰結ともいえる現象の量的解析が必要であり、本論においては、統計物理学および情報理論を応用して、その解析を試みた。

2. 都市人口分布モデル

まず、都市圏には、通勤者にとって、影響力の大きい都心部が一つ存在し、都市圏内に居住する家族は、その居住地選定にあたり、通勤あるいは産業活動などの形で、都心部までの時間距離に大きく規制されていると仮

定する。この都市圏を面積の等しい λ 個のゾーンに分割する。ゾーン $i(i=1, 2, \dots, \lambda)$ の時間距離を t_i とし、各ゾーンの面積は、すべて S に等しく設定する。このとき、都市圏内総人口を N 人として、各ゾーンの人口 n_i および人口密度 ρ_i の分布形態をつぎの2つの方法により求めてみた。

3. 統計物理学的考察

まずこの都市圏モデルを統計物理学的にあつかうために、つぎの定義をする。

ゾーン i の居住人口を n_i としたとき、通勤発生比率を k とおいて、ゾーン i の必要とする輸送力を $k \cdot n_i \cdot t_i$ で表わす²⁾。

この定義に基づいて、つぎの仮定を行なう。

仮定：現有輸送施設による輸送力は、有限であり、この最大値を $E \cdot N$ で表わせば、次式が成立する。

$$\sum_{i=1}^{\lambda} k \cdot n_i \cdot t_i \leq E \cdot N$$

ここに左辺は、人口分布形からみた、都市の輸送力の総和であり、 E は単位人口あたりの輸送力である。

さらに、この不等式が成立している時点においては、増加する人口は、その単位人口あたりの輸送力 E に誘導されて、それらの差 $E \cdot N - \sum_{i=1}^{\lambda} k n_i t_i$ を減少させる方向に分布していくものと考え、定常状態においては、すなわち、輸送機関（主に高速鉄道を考える）が整備されて、何年かたてば、 $\sum_{i=1}^{\lambda} k n_i t_i = E \cdot N$ が成立するものと仮定する。そして、この等号が成立する時点の人口分布形、すなわち都市人口分布形の向う方向を求めてみる。

各ゾーンを人口1人が選択する先験的確率は、面積を等しく設定してあるので、ゾーンの数の逆数、すなわち $1/\lambda$ に等しい。それゆえ各ゾーン $1, 2, \dots, \lambda$ にそれぞれ $n_1, n_2, \dots, n_\lambda$ 人ずつ同時に居住する確率、すなわち統計物理学という微視状態の生起確率 U は式(1)で表わされる。

$$U = \lambda^{-n_1} \cdot \lambda^{-n_2} \cdot \dots \cdot \lambda^{-n_\lambda} = \prod_{i=1}^{\lambda} \lambda^{-n_i} = \lambda^{-N} \dots \dots \dots (1)$$

この微視状態は、 N 人の ~~数~~ かで置換を行なっても実

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室

** 正会員 京都大学助手 工学部交通土木工学教室

現でき、結局微視状態の数 V は式 (2) で示される³⁾。

$$V = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_\lambda!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{\lambda} n_i!} \dots\dots\dots (2)$$

それゆえ、1つの人口分布形態の生起する確率、すなわち、巨視的状态の同時分布確率 W は、 U と V の積であり式 (3) で示される。

$$W = U \cdot V = \lambda^{-N} \frac{N!}{\prod_{i=1}^{\lambda} n_i!} \dots\dots\dots (3)$$

ところで W は、 N 人を各ゾーンに配分する方法が異なるのに対応して、一般に異なる。そして、最も実現しやすい分布形は、この巨視的状态の確率が最大のときである。また、この分布形に対して、つぎの条件式が与えられる。

$$\sum_{i=1}^{\lambda} n_i = N \dots\dots\dots (4)$$

さらに仮定より

$$\sum k n_i t_i = E \cdot N \dots\dots\dots (5)$$

すなわち、この都市圏モデルにおいては、最も実現する確率の大きい人口分布形は、条件式 (4) と (5) のもとに、式 (3) の W を最大にする分布形である。

ところで、式 (1) において $V = \lambda^{-N}$ は一定であるから、 W を最大にすることは、式 (2) で与えられる V を最大にすることと同値である。

いま式 (2) の対数をとると、式 (6) のようになる。

$$\log V = \log N! - \sum_{i=1}^{\lambda} \log n_i! \dots\dots\dots (6)$$

$n_i \gg 1$ であるから、スターリングの近似式

$$\log n_i! = n_i \log n_i - n_i \dots\dots\dots (7)$$

を用いて、式 (6) を整理すると、

$$\log V = N \log N - \sum_{i=1}^{\lambda} n_i \log n_i \dots\dots\dots (8)$$

となる。式 (8) で、 $N \log N$ は定数であるから、結局 W の最大値を求めることは、 $-\sum_{i=1}^{\lambda} n_i \log n_i$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$) を最大にする $\{n_i\}$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$) を求めることに帰着する。

そこで、条件式 (4)、(5) のもとに、ラグランジェの未定乗数法を用いて、 $\{n_i\}$ ($i=1, 2, \dots, \lambda$) を求める。まず式 (9) で定義される関数 $F(n_i, \mu, \theta)$ を、 n_i, μ, θ でそれぞれ偏微分し、この連立方程式を解いて、 n_i を求めればよい。ここに、 μ, θ はラグランジェ乗数である。

$$F(n_i, \mu, \theta) = -\sum_{i=1}^{\lambda} n_i \log n_i + \mu(N - \sum_{i=1}^{\lambda} n_i) + \theta(E \cdot N - \sum_{i=1}^{\lambda} k t_i n_i) \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} F(n_i, \mu, \theta) = -1 - \log n_i - \mu - k \theta \cdot t_i = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F(n_i, \mu, \theta) = N - \sum_{i=1}^{\lambda} n_i = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F(n_i, \mu, \theta) = E \cdot N - \sum_{i=1}^{\lambda} k t_i n_i = 0 \dots\dots\dots (12)$$

式 (10) より、

$$n_i = e^{-1-\mu-\theta k t_i} \dots\dots\dots (13)$$

式 (13) を式 (11) に代入し、 $\theta \cdot k = B$ とおいて整理すると、

$$n_i = N \cdot \frac{e^{-B t_i}}{\sum_{i=1}^{\lambda} e^{-B t_i}} \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) を式 (12) に代入し、 $E/k = t_0$ とおき、整理すると、

$$\sum_{i=1}^{\lambda} (t_0 - t_i) \cdot e^{-B t_i} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) を、 t_0 と t_i を与えて、数値解析的に解き、 B を求め、これを式 (14) に用いると

$$n_i = A e^{-B t_i} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、

$$A = \frac{N}{\sum_{i=1}^{\lambda} e^{-B t_i}}$$

さらにゾーン i の人口密度を ρ_i とすると、

$$\rho_i = \frac{n_i}{S} = \frac{A}{S} e^{-B t_i} \dots\dots\dots (17)$$

ところで、現実のゾーニングでは、面積を等しく設定することは、余り意義がないので、面積の影響を除くために次式で示す r_i を考え、これを人口密度比率と定義する。

$$r_i = \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} \rho_i} \quad (\sum_{i=1}^{\lambda} r_i = 1) \dots\dots\dots (18)$$

したがって、

$$r_i = \frac{e^{-B t_i}}{\sum_{i=1}^{\lambda} e^{-B t_i}} \dots\dots\dots (19)$$

この方法により、式 (15) を解いて、 B の値を求めておけば、任意のゾーニングに対しても、各ゾーンの時間距離を知ることにより、そのゾーンの人口密度比率が計算される。このとき、各ゾーンの人口密度が時間距離に対して、指数分布していることは明らかである。

ところで、統計物理学の概念を導入する以上、物理学におけるエネルギーの総和が一定であるという定理を何らかの形で仮定しなくてはならない。それに対応するものが、本論における輸送力一定の仮定であるが、つぎに、この仮定によらない別の手法によって行なった考察についてのべる。

4. 情報理論的考察

都市居住者が、各ゾーンを選択するにあたり、各ゾーンの都心部までの時間距離に大きく制約されるものとす

る。このことに基づいて、各ゾーンの時間距離を、情報理論でいう特性値と見做して、すなわち当該ゾーンに居住することにより、居住者が受ける損失の大きさとでもいうべき値を示す指標として、理論を展開していく。

すでにのべた都市人口分布モデルをここでも対象とすれば、巨視的狀態の確率は式(3)で表わされ、このWの最大は、式(2)の微視狀態の数Vの最大と同時であることは、先述のとおりである。いま各ゾーン内人口の都市通勤圏全域の総人口に対する比率を、

$$p_i = \frac{n_i}{N} \quad (\sum_{i=1}^{\lambda} p_i = 1) \quad \dots\dots\dots(20)$$

で定義し、式(20)を式(8)に代入すると、

$$\log V = -N \sum_{i=1}^{\lambda} p_i \log p_i = -N \cdot H(p_i) \dots\dots(21)$$

$$(i=1, 2, \dots, \lambda)$$

ここで、 $H(p_i) = -\sum_{i=1}^{\lambda} p_i \log p_i$ は、情報理論でいうエントロピーの形であり⁴⁾、Nが一定であれば、Vは、エントロピー最大るとき、最大値をとる。結局、巨視的狀態の確率Wの最大値は、エントロピー最大ときに生じる。特性値として、各ゾーンの時間距離をとりあげているのであるから、このモデルにおいて、最も実現しやすい人口分布形態は、各ゾーンの時間距離とゾーン内人口の積で、当該ゾーンの必要輸送力と定義すれば、単位輸送力あたりのエントロピーが最大るときと考えられる。これは、情報理論における、単位特性値当りのエントロピーという概念を応用したものである⁵⁾。

いま、ゾーンiの時間距離を t_i とし、 t_i の期待値を \bar{t} で表わせば、単位輸送力あたりのエントロピーは、式(22)で示される。

$$\frac{-\sum_{i=1}^{\lambda} p_i \log p_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} n_i t_i} = \frac{1}{N} \cdot \frac{H(p_i)}{\bar{t}} \quad (\bar{t} = \sum_{i=1}^{\lambda} p_i t_i) \dots\dots(21)$$

Nは定数であるから、結局 H/\bar{t} を条件式 $\sum_{i=1}^{\lambda} p_i = 1$ のもとに最大にする $\{p_i\}$ を求めればよい。次式で定義される関数 $G(p_i, \eta)$ をそれぞれ p_i, η で偏微分し、これを0に等しいとおいて、その連立方程式を解けばよい。ここに、 η はラグランジュ乗数である。

$$G(p_i, \eta) = \frac{H(p_i)}{\bar{t}} + \eta (\sum_{i=1}^{\lambda} p_i - 1) \dots\dots\dots(22)$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \bar{t} - H \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial p_i} + \eta = 0$$

$$\therefore -1 - \log p_i - \frac{H}{\bar{t}} \cdot t_i + \eta \cdot \bar{t} = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

両辺に p_i をかけて、 i について1から λ まで加えると、

$$-1 - \log p_i - \frac{H}{\bar{t}} \cdot t_i + 1 = 0$$

$$\therefore p_i = e^{-H/\bar{t} \cdot t_i} \dots\dots\dots(24)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{\lambda} p_i - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

式(25)に式(24)を代入して、

$$\sum_{i=1}^{\lambda} e^{-H/\bar{t} \cdot t_i} = 1 \quad \dots\dots\dots(26)$$

ここで、 $e^{-H/\bar{t} \cdot t_i} = X$ とおき、 $\sum_{i=1}^{\lambda} X^{t_i} = 1$ を数値解的に解き、正の実根を X_0 とすると、式(24)に代入して、

$$p_i = X_0^{t_i} \quad (0 < X_0 < 1, i=1, 2, \dots, \lambda) \quad \dots\dots(27)$$

式(27)で求まる $\{p_i\}$ は、各ゾーンの面積が等しいモデルにおける人口比率であるから、この値はまた、各ゾーンの人口密度の比率 $\{r_i\}$ に等しい。このことは、各ゾーンの人口密度を $\{\rho_i\}$ として次式から容易に理解される。

$$r_i = \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} \rho_i} = \frac{\frac{N}{S} \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} \frac{N}{S} \cdot p_i} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} p_i} = p_i \quad \dots\dots\dots(28)$$

そして、面積の異なるより一般的なゾーニングが設定された都市通勤圏モデルに対しては、この方法により求める比率は、人口密度比率と考えて適応することで面積の影響は除去される。このとき、人口密度が、時間距離に対して、指数分布をなしていることは、式(24)から明らかである。

さらに、先述の面積の異なる一般的都市通勤圏モデルに適応するとき、各ゾーンの時間距離より、式(26)を解き、人口密度比率 $\{r_i\}$ を求め、この r_i を用いて、次式により人口密度、人口が計算される。

$$\rho_i = \frac{r_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} r_i S_i} \cdot N \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$n_i = \frac{r_i S_i}{\sum_{i=1}^{\lambda} r_i S_i} \cdot N \quad \dots\dots\dots(30)$$

それゆえ、各ゾーンの面積が異なる一般的都市モデルに対しては、式(28)、(29)、(30)が適用される。しかし単位輸送力あたりのエントロピーが最大という確率の概念は、実限確率が無限大個の試行の後に生起するのと同じく、時系列のすべての断面でこれが実現されているのではなく、一つの閉鎖都市モデルにおける、時系列の指向する値を意味するものであり、さらに、これが実現された後は、その都市モデルは閉鎖されたものではなく、さらに時間距離的に拡大された都市モデルを対象とすべきであると考え。そこで、上記の意味から、式(18)で表わされる r_i を定常人口密度比率と定義し、今後 $r_i(\infty)$ で表わすことにし、実績人口密度比率は r_i で表わす。

そして、将来のゾーン別人口の予測を行なうにあたっては、その時系列上の当該時点を知ることが必要となるが、このことは、 H/\bar{t} の時系列を調べることににより、明らかとなるであろう。

そこで、つぎに以上の方法論を首都圏に適用した例をのべる。

5. 情報理論に基づく方法論の適用性と問題点

本論では対象とする通勤圏は次の条件を満足していることが必要である。

- a) 機能的条件：通勤圏は影響力の大きい一つの都心部を有している。
- b) 自然的条件：圏内の地形的条件が時間距離方向に対して均一と見做せる。
- c) 歴史的条件：通勤圏内の各地域の人口集積に大きな影響をおよぼすような歴史的条件は無いあるいは均一と見做せる。
- d) その他社会的、経済的条件は各地域とも均一と見なせる。

これらの条件を比較的満足しているであろうモデル地域として、首都圏をとりあげ、都心部の中心として、東京駅をとった。対象は、東京駅中心10～60 kmの範囲である。各ゾーンの東京駅までの時間はつぎの仮定により算出した。「通勤者は、居住地から最寄駅まで直線的に通勤し、その速度は駅から1 km 以内は0.1 km/分、1 km 以上は0.2 km/分である⁶⁾」。さらに、乗車駅から東京駅までの所要時間として、(列車時間間隔)÷2+(乗換駅まで

の時間)+(乗換所要時間)+(乗換駅から東京駅までの時間)を採用した⁷⁾。居住地から東京駅までの時間距離は、居住地から乗車駅までの所要時間と、上述の乗車駅から東京駅までの所要時間の和である。各ゾーンの人口、人口密度、面積は、行政区画の資料⁸⁾より集計し、これを、時間距離別に集計した結果が表-1である。

設定された時間距離に対して、つぎの方程式を考える。指数は時間距離である。

$$X^{25} + X^{40} + X^{45} + \dots + X^{150} + X^{155} = 1 \quad \dots\dots\dots(31)$$

ここで $X^3 = Y$ とおくと ($0 < Y < 1$)

$$Y^7 + Y^8 + \dots + Y^{31} = 1 \quad \dots\dots\dots(32)$$

式(32)を電子計算機により数値解析的に解くと、 $Y = 0.79579$

この値より、定常人口密度比 $r_i(\infty)$ が求められる。これを用いて、理論人口密度が求められる。実績人口密度と理論人口密度の比較は図-1に見られる。さらに実績人口密度比が理論人口密度比に接近

していく過程を図-2に示した。これは表-1の H/\bar{r} の増大傾向にもみられる。

本論では、各ゾーンの特性値として、時間距離のみを

表-1 実績値

No. (i)	特性値 (t _i)	(ρ _i) 人口密度 (人/km ²)				(r _i) 人口密度率			
		昭和25年	30	35	40	25	30	35	40
1	35分	6 324	7 929	9 669	11 749	0.20243	0.20764	0.26937	0.19868
2	40	4 596	5 788	6 995	9 009	0.14711	0.15157	0.15147	0.15235
3	45	4 281	5 374	6 554	7 979	0.13703	0.14073	0.14192	0.13493
4	50	2 601	3 225	4 272	5 382	0.08326	0.08446	0.09250	0.09101
5	55	1 594	2 075	2 729	3 876	0.05102	0.05434	0.05909	0.06554
6	60	1 376	1 718	2 414	3 532	0.04404	0.04499	0.05227	0.05993
7	65	1 309	1 626	2 095	2 945	0.04190	0.04258	0.04536	0.04980
8	70	1 003	1 249	1 556	2 237	0.03211	0.03271	0.03369	0.03783
9	75	1 099	1 281	1 490	2 172	0.03518	0.03354	0.03226	0.03673
10	80	839	1 032	1 204	1 709	0.02686	0.02703	0.02607	0.02890
11	85	721	875	1 043	1 432	0.02308	0.02291	0.02258	0.02422
12	90	655	764	802	1 051	0.02097	0.02001	0.01737	0.01777
13	95	654	731	771	921	0.02093	0.01914	0.01669	0.01557
14	100	450	518	569	835	0.01440	0.01357	0.01232	0.01412
15	105	499	518	503	514	0.01596	0.01357	0.01091	0.00870
16	110	473	503	541	606	0.01513	0.01317	0.01171	0.01025
17	115	432	496	530	591	0.01383	0.01299	0.01148	0.00999
18	120	437	461	469	482	0.01399	0.01207	0.01016	0.00815
19	125	397	461	465	538	0.01271	0.01207	0.01007	0.00910
20	130	347	375	371	373	0.01111	0.00982	0.00803	0.00631
21	135	319	326	323	326	0.01021	0.00854	0.00699	0.00551
22	140	244	253	231	249	0.00781	0.00663	0.00500	0.00421
23	145	247	247	239	243	0.00791	0.00647	0.00518	0.00411
24	150	152	159	148	175	0.00487	0.00416	0.00320	0.00296
25	155	192	202	199	209	0.00615	0.00529	0.00431	0.00353
計						1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
					H	1.16387	1.14399	1.12294	1.12780
					\bar{r}	60.726	59.352	57.715	57.408
					H/ \bar{r}	0.019166	0.019275	0.019457	0.019645

図-1 (a)

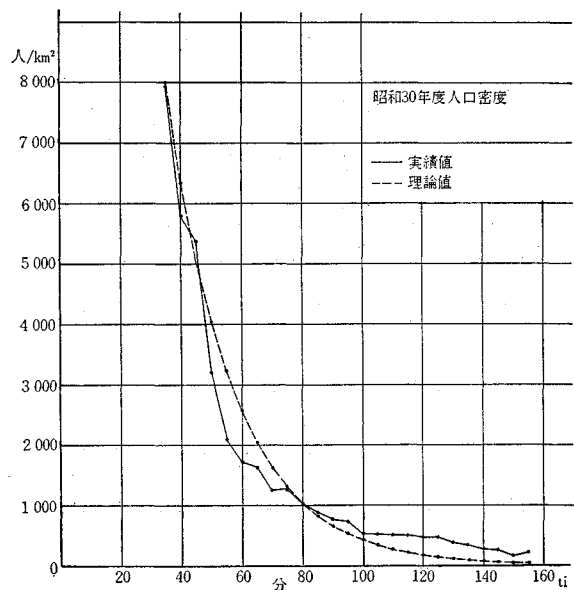
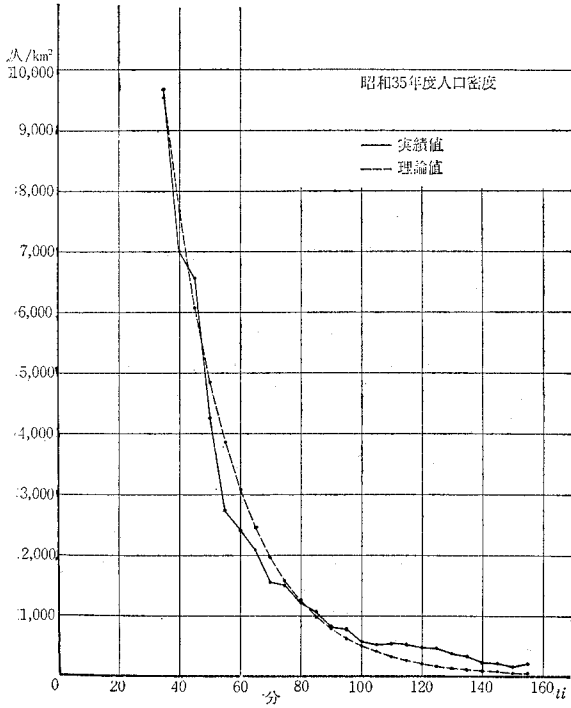


図-1 (b)



考慮してきたが、現実の各ゾーンの選択要因としては、それ以外に各ゾーンの地価、地理的、歴史的的条件など多くの複雑な要因が考えられる。そこで各ゾーンの特性値としては、地価は時間距離に従属性があることが指摘されている⁹⁾が、その他のそれぞれ独立な諸要因の複合体

表-2 理論値

No. (i)	特性値 (t_i)	(a _i ^A) 人口密度 (人/km ²)				人口密度率 (r_i) ∞
		昭和25年	30	35	40	
1	35分	6 662	8 020	9 553	12 393	0.20390
2	40	5 310	6 393	7 615	9 879	0.16247
3	45	4 228	5 091	6 063	7 866	0.12945
4	50	3 370	4 057	4 832	6 269	0.10314
5	55	2 685	3 233	3 851	4 996	0.08219
6	60	2 139	2 576	3 068	3 980	0.06549
7	65	1 705	2 052	2 445	3 172	0.05218
8	70	1 360	1 637	1 950	2 530	0.04158
9	75	1 083	1 303	1 552	2 014	0.03314
10	80	863	1 039	1 238	1 606	0.02640
11	85	687	827	985	1 278	0.02103
12	90	548	659	785	1 019	0.01676
13	95	436	525	626	812	0.01335
14	100	347	418	498	646	0.01064
15	105	276	332	396	514	0.00848
16	110	220	265	316	410	0.00675
17	115	176	212	252	327	0.00538
18	120	140	169	201	261	0.00429
19	125	112	135	160	208	0.00341
20	130	89	107	128	166	0.00272
21	135	71	86	103	133	0.00217
22	140	58	53	82	107	0.00173
23	145	46	55	66	85	0.00138
24	150	36	43	52	67	0.00110
25	155	29	35	42	54	0.00087
						1.00000
					H	1.14468
					\bar{t}	54.178
					H/ \bar{t}	0.021128

図-1 (c)

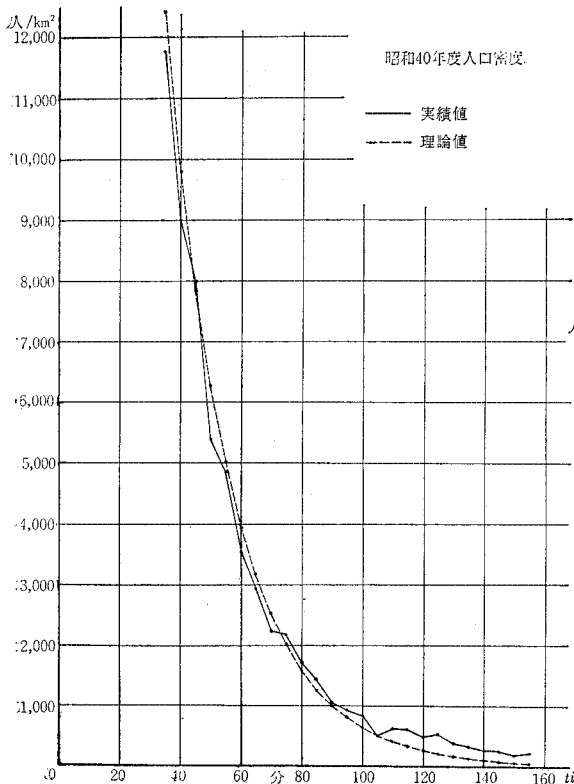


図-2 (a) 人口密度比

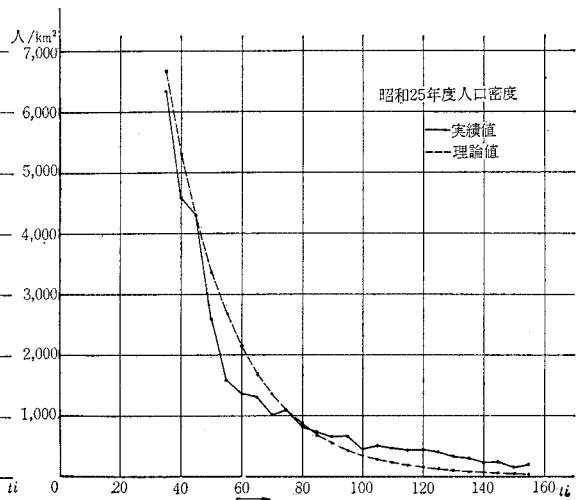
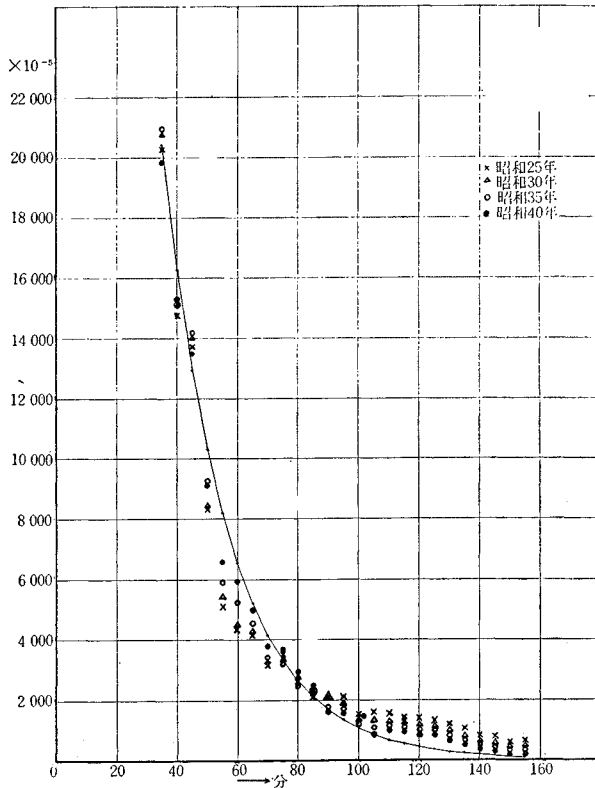


図-2(b)



を取りあげることが、より現実に接近したものとなると考えられる。しかし自然的、歴史的條件の正確な量的把握は非常に困難であり、なお今後の研究が必要である。

6. 結 語

本研究においては、都市人口の分布形態が、主として都心部の中枢管理機能地域からの時間距離に関して指数分布となり、かつそれが推移していく過程を統計物理学および情報理論を応用して説明しうることを明らかにした。そして首都圏における過去の実績値が、この方法論をかなり根拠づけるものであることを示した。しかしながらこの方法論を適用して、近郊各ゾーンの人口を予測し、実際の都市開発計画に適用するためには、理論の展開に用いたいくつかの仮定と、現実の都市の経済的、社会的活動機能との関連について、なお実証的な解明を要する点も残されているので、今後の研究課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 天野光三：都市通勤交通需要の推計に関する方法論的研究(学位論文)，昭和40年10月，pp. 73～75
- 2) 藤田昌久：鉄道網からみた都市発展過程に関する研究，京都大学土木工学教室卒業論文，昭和41年3月，pp. 4～6
- 3) ラドシュケヴィチ，中川毅訳：基礎統計物理学 pp. 122～127，1965年5月，東京図書
- 4) R.M. ファノ，宇田川銚久訳：情報理論，1965年5月，紀伊国屋書店
- 5) 国沢清典：ORのための情報の理論入門，昭和39年1月，日本科学技術連盟
- 6) 運輸省自動車局：運輸省バス統計，昭和38年
- 7) 国鉄東京工務局調査課：東京駅までの所要時間表，昭和39年3月
- 8) 国鉄東京工務局調査課：首都圏における町名別人口面積調査表，昭和39年3月
- 9) 上掲1) pp. 85～89 (1966.4.14・受付)