

# ダンパーによる吊橋のたわみ振動の制動について

## ON THE DAMPING OF VERTICAL VIBRATION IN SUSPENSION BRIDGES BY DAMPING EQUIPMENTS

倉 西 茂\*

By Shigeru Kuranishi

### 1. 緒 論

吊橋形式の橋梁は静的荷重に対してはきわめて能率のよい、合理的な構造となっており、長径間橋梁として最も適したものである。しかしその能率のよさの反面振動しやすいという大きな欠点がある。この振動しやすいということは一つは外力に対し変形が大きいということであり、もう一つは制動力が小さいということを表わしているものといえよう。前者の欠点を補うため、水平反力を大きくする、補剛桁の曲げ剛性がある程度大きくして設計する、あるいは吊材を斜めに張りせん断変形にも耐えられる形にして剛性を増すといった方法等がとられている。もちろん、第2、第3のような工夫をこらすことにより必然的に内部摩擦力の増加も来すことになり一石二鳥の方法といえる。しかしこういった部材材料の内部摩擦に頼る制動には限度があり、あまり大きな制動力を期待できない。もし振動を吊橋自身がもっている力で押さえようとするならば、積極的にダンパーを採用するしか方法がないものと思われる。

すでに、首都高速道路公団では水平地震力を分配させるため、連続桁の支点和橋脚間にダンパーを入れた例もあり、吊橋でも落橋で有名なタコマ橋にハイドロリックダンパーが取り付けられたという報告もあり、マキノ橋でも吊橋の中央でケーブルと補剛桁がダンパーで結ばれている。また Bronx-Whitestone 橋でもタワーと補剛桁間にフリクションダンパーを取り付けたという報告もある。本論文はもう少し基本的問題に立ちかえり、吊橋の基準振動の形をよく見てどのようなダンパーが吊橋の振動を押さえるに有効か考えて見たものである。吊橋の基準振動の形はエネルギー法により本質を見失わない範囲で簡単に求め、ダンパーによって基準振動の形は変化しないものとしてダンパーの効果は計算した。また高次の振動は別の問題とし、基本基準振動のみを対象とした。

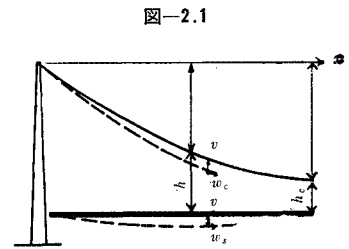
### 2. 吊橋の振動

吊橋の振動解析は主に F. Bleich<sup>1)</sup> による Ritz の方

法によって行なう。ただ記号およびパラメーターを変え振動数は吊橋の補剛係数、全死荷重および垂距がわかれば計算できるような形とした。

座標は 図-2.1

に示したようにとり、ケーブルおよび補剛桁の鉛直方向のたわみは  $v$ 、ケーブルの水平変位は  $w_c$ 、補剛桁の水平変位は  $w_s$



で補剛桁全長にわたって  $w_s$  は一定とした。またケーブルの質量は省略した。

いま吊橋がたわみ振動をしているとき吊橋に蓄えられる最大ポテンシャル エネルギーは近似的に、

$$V = \frac{1}{2} \left\{ EI \int_0^l v''^2 dx - H_w \int_0^l v' v dx + E_c A_c \int_0^l \epsilon_c^2 dx \right\} \quad \dots\dots(2.1)$$

で与えられる。ここで  $EI$  は補剛桁の曲げ剛性、 $H_w$  は死荷重によるケーブル水平分力、 $E_c$ 、 $A_c$  はケーブルのヤング率および断面積、 $\epsilon_c$  は振動によるケーブルの伸びひずみである。

運動エネルギーの最大値は円振動数を  $\omega$  とすれば、

$$T = \frac{1}{2} m_s \frac{\omega^2}{g} \left\{ \int_0^l v^2 dx + \int_0^l w_s^2 dx \right\} \quad \dots\dots(2.2)$$

で与えられる。 $m_s$  は単位長さ当りの吊橋の重量である。いま、

$$\left. \begin{aligned} c^2 &= \frac{l^2 H_w}{EI} & f/l &= n \\ M_s &= m_s \cdot l & H_w &= \frac{l^2 m_s}{8f} = \frac{M_s}{8n} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2.3)$$

と置けば、

$$\left. \begin{aligned} EI &= \frac{u}{8c^2} M_s l^2 \\ \frac{l^2 E_c A_c}{EI} &= \frac{l^2 H_w}{EI} \cdot \frac{A_c E_c}{H_w} = c^2 k \\ k &= \frac{E_c}{\sigma_c} = \frac{E_c}{H_w / A_c} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2.4)$$

と書き表わすことができるので式 (2.1) および式 (2.2) は、

\* 正会員 工博 東北大学助教授 土木工学科

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_s}{8c^2} \cdot \frac{1}{f} \left\{ l^3 \int_0^l v''^2 dx - c^2 l \int_0^l v'' v dx + c^2 k \cdot l \int_0^l \epsilon_c^2 dx \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_s \omega^2}{g} \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l v^2 dx + w_s^2 \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

と書き変えることができる。

ケーブルの水平方向変位  $w_c$  は

$$\begin{aligned} w_c &= w_{c0} - \int y' v' dx + \int \epsilon_c dx \\ &= w_{c0} - y' v - \frac{8f}{l^2} \int v dx + \int \epsilon_c dx \dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

で与えられる。

(1) 単径間吊橋の逆対称振動

ケーブルは水平方向に補剛桁と無関係に動くものとし、ケーブルは塔頂で変位は0とし、振動形は次式で与えられるものとする。

$$v = a \sin \frac{2\pi}{l} x \dots\dots\dots(2.8)$$

ケーブルの伸びは逆対称振動のため起こらないものとするれば式(2.5)、(2.6)中の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^l v''^2 dx &= \left( \frac{2\pi}{l} \right)^4 \cdot \frac{l}{2} a^2 \\ \int_0^l v'' v dx &= - \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{l}{2} a^2 \\ \int_0^l v^2 dx &= \frac{l}{2} a^2 \end{aligned}$$

となり結局、式(2.5)、(2.6)は

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \frac{M_s}{c^2 f} \left\{ \pi^4 + \frac{c^2 \pi^2}{4} \right\} a^2 \\ T &= \frac{1}{2} \frac{M_s}{2g} \omega^2 a^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

となり、 $\omega^2$ は次式で与えられる。

$$\omega^2 = \frac{g}{f} \alpha_a \dots\dots\dots(2.10.a)$$

ただし、

$$\alpha_a = (2\pi^4/c^2 + \pi^2/2) \dots\dots\dots(2.10.b)$$

ケーブルの水平方向変位は  $w_{c0}=0$ ,  $\epsilon_c=0$  より

$$\begin{aligned} w_c &= -n \left\{ 4 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) \sin \frac{2\pi}{l} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{4} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right) \right\} a \dots\dots\dots(2.11) \end{aligned}$$

最大エネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \frac{M_s}{f} \alpha_a \cdot a^2 \dots\dots\dots(2.12)$$

で与えられる。

(2) 単径間吊橋のケーブル中央を補剛桁に固定した場合の逆対称振動

ケーブルが補剛桁に固定されたため生ずる影響は、左半分、右半分のケーブルに生ずるケーブルの水平力の差

と補剛桁の橋軸方向の剛体的振動にのみ現われるとし、ケーブル中央で補剛桁とケーブルは変位が等しいとして取り扱う。補剛桁の曲げ剛性が小さい場合や、固定点が補剛桁より高い場合、センターダイアゴナルステーで固定されている場合は、上記の条件のみでは少々不足の場合もあるが本論文で必要としている精度の範囲内では十分と思われる。

いま吊橋の振動モードは式(2.8)と同じく

$$v = a \sin \frac{2\pi}{l} x$$

とする。吊橋の左半分を考え、左半分では式(2.8)において  $\epsilon_c$  は一定とする。  $w_{c0}=0$ ,  $x=0$  で  $v=0$ ,  $x=l/2$  で  $y'=0$  であることを考慮に入れると、ケーブルのバックステーの伸びを省略すれば

$$w_s = - \frac{8f}{l^2} \int_0^{l/2} v dx + \epsilon_c \frac{l}{2} \dots\dots\dots(2.13)$$

よって

$$\epsilon_c = \frac{2}{l} w_s + \frac{16f}{l^2} \int_0^{l/2} v dx \dots\dots\dots(2.14)$$

が得られる。

$$\int_0^{l/2} a \sin \frac{2\pi}{l} x dx = \frac{l}{\pi}$$

であるから式(2.5)は

$$V = \frac{1}{2} \frac{M_s}{f} \left\{ \left( \frac{\pi^4}{c^2} + \frac{\pi^2}{4} \right) a^2 + \frac{k}{2} \left( w_s + \frac{8n}{\pi} a \right)^2 \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

また、式(2.6)は

$$T = \frac{1}{2} \frac{M_s \omega^2}{g} \left( \frac{1}{2} a^2 + w_s^2 \right) \dots\dots\dots(2.16)$$

と書ける。

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial w_s} = 0$$

を満足すべき  $\omega^2$  は下記の条件で求められる。

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{f} \left\{ \left( \frac{\pi^4}{c^2} + \frac{\pi^2}{4} \right) + \frac{32kn^2}{\pi^2} \right\}, & -\frac{4nk}{\pi f} \\ -\frac{4nk}{\pi f}, & \frac{\omega^2}{g} - \frac{k}{2f} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(2.17)$$

よって

$$\omega^2 = \frac{g}{f} \alpha_{af} \dots\dots\dots(2.18)$$

が得られ、式(2.18)中

$$\begin{aligned} \alpha_{af} &= \left( \frac{\alpha_a}{2} + \frac{16kn^2}{\pi^2} + \frac{k}{4} \right) \\ &\quad \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha_a}{2} + \frac{16kn^2}{\pi^2} - \frac{k}{4} \right)^2 + \frac{32n^2k^2}{\pi^2}} \dots\dots\dots(2.19) \end{aligned}$$

である。

結局たわみ振動と橋軸方向の補剛桁の連成振動となり、その振幅比  $r_{af}$  は

$$r_{af} = \frac{\frac{4nk}{\pi}}{\left(\frac{\alpha_a}{2} + \frac{16kn^2}{\pi^2} - \frac{k}{4}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_a}{2} + \frac{16kn^2}{\pi^2} - \frac{k}{4}\right)^2 + \frac{32n^2k^2}{\pi^2}}} \dots\dots\dots(2.20)$$

最大エネルギーは

$$W = \frac{M_s}{4f} \alpha_{af} (1 + 2 \cdot r_{af}) a^2 \dots\dots\dots(2.21)$$

で与えられる。

ケーブルの水平変位は右半分では

$$w_c = -n \left\{ 4 \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right) \sin \frac{2\pi}{l} x + \frac{4}{\pi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right) \right\} a + \frac{x}{l} \left( 2r_{af} + \frac{16n}{\pi} \right) a \dots\dots\dots(2.22)$$

で与えられる。

(3) 単径間吊橋の逆対称振動と補剛桁の遊動円木振動との連成振動

(1) ではケーブルは補剛桁と無関係に水平方向に振動し得るものとして取り扱ったが、実際には吊橋のたわみ振動によりケーブルの橋軸方向の変位が生じ、吊材が傾き補剛桁は橋軸方向の力を受けることになる。いま逆対称たわみ振動と補剛桁の橋軸方向の連成振動にはケーブルの伸び、吊材の伸び等といったものは考えず、吊材の傾斜による補剛桁のポテンシャルエネルギーの増加のみを考える。

図-2.2 に示したようにケーブルが  $w_c$ 、補剛桁が  $w_s$  だけ水平変位することにより補剛桁の得るポテンシャルエネルギー  $dV_1$  は

$$dV_1 = m_s (1 - \cos \beta) h \dots\dots\dots(2.23)$$

$$\beta = \frac{w_s - w_c}{h}, \quad 1 - \cos \beta \doteq \frac{\beta^2}{2}$$

で与えられるゆえ

$$V_1 = \frac{1}{2} m_s \int_0^l \left( \frac{w_s - w_c}{h} \right)^2 \cdot h dx \dots\dots\dots(2.24)$$

が得られる。よって吊橋の得る全ポテンシャルエネルギーは

$$\frac{l^3}{EI} m_s = \frac{l^2 H_w}{EI} \cdot \frac{l m_s}{H_w} = 8 c^2 n$$

であることを考慮して

$$V = \frac{1}{2} \frac{M_s}{8 c^2 f} \left\{ l^3 \int_0^l v''^2 dx - c^2 \int_0^l v'' v dx + 8 c^2 n \int_0^l \frac{(w_s - w_c)^2}{h} dx \right\} \dots\dots\dots(2.25)$$

と書ける。

また運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \frac{M_s \omega^2}{g} \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l v^2 dx + w_s^2 \right\} \dots\dots\dots(2.26)$$

で与えられる。

いま

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{1}{h} dx &= \frac{1}{n} d_1, \quad \int_0^l \frac{w_c}{h} dx = d_2 \cdot a \\ \int_0^l \frac{w_c^2}{h} dx &= n \cdot d_3 \cdot a^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.27)$$

と置けば、補剛桁のたわみ曲線を

$$v = a \sin \frac{2\pi}{l} x$$

とし次式を得る。

$$V = \frac{1}{2} \frac{M_s}{f} \left\{ \left( \frac{\pi^4}{c^2} + \frac{\pi^2}{4} \right) a^2 + d_1 w_s^2 - 2 n d_2 a w_s + n^2 d_3 a^2 \right\} \dots\dots\dots(2.28)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{M_s}{g} \omega^2 \left( \frac{a^2}{2} + w_s^2 \right)$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial w_s} = 0$$

より振動数  $\omega$  を定める式は次式で与えられる。

$$\det. \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{2g} - \frac{1}{f} \left\{ \left( \frac{\pi^4}{c^2} + \frac{\pi^2}{4} \right) + n^2 d_3 \right\} & \frac{n d_2}{f} \\ \frac{n d_2}{f}, & \frac{\omega^2}{g} - \frac{d_1}{f} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(2.29)$$

よって

$$\omega^2 = \frac{g}{f} \alpha_{as} \dots\dots\dots(2.30)$$

$$\alpha_{as} = \left( \frac{\alpha_a}{2} + \frac{d_1}{2} + n^2 d_3 \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha_a}{2} - \frac{d_1}{2} + n^2 d_3 \right)^2 + 2 n^2 d_2^2}$$

が得られる。たわみ振動と遊動円木振動の振幅比は

$$\frac{w_s}{a} = r_{as} \dots\dots\dots(2.31)$$

$$r_{as} = - \frac{n d_2}{\alpha_{as} - d_1}$$

で与えられる。全振動エネルギーは

$$W = \frac{M_s \alpha_{as}}{4 f} (1 + 2 r_{as}^2) a^2 \dots\dots\dots(2.32)$$

で与えられ、ケーブルの水平変位は式 (2.11) と同じである。

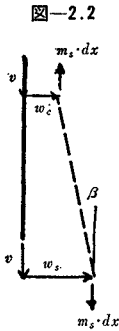
(4) 単径間吊橋の対称振動

式 (2.5), (2.6) より出発し、塔頂で変化は0と仮定し、ケーブルの伸び縮みも考え、振動モードを

$$v = a_1 \sin \frac{\pi}{l} x + a_2 \sin \frac{3\pi}{l} x \dots\dots\dots(2.33)$$

と置けば、前記の場合と同じような操作を経て求める振動数  $\omega$  は次式で与えられる。

$$\det. \begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{2g} - \frac{A_1}{f}, & -\frac{B}{f} \\ \frac{B}{f}, & \frac{\omega^2}{2g} - \frac{A_2}{f} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(2.34)$$



ここで、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi^4}{16c^2} + \frac{\pi^2}{16} + \frac{32kn^2}{\pi^2} \\ A_2 &= \frac{81\pi^4}{16c^2} + \frac{9\pi^2}{16} + \frac{32kn^2}{9\pi^2} \\ B_1 &= \frac{32kn^2}{3\pi^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.34.a)$$

である。よって

$$\omega^2 = \frac{g}{f} \alpha_s \dots\dots\dots(2.35)$$

$$\alpha_s = (A_1 + A_2) \pm \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4B_1^2}$$

$a_1 a_2$  の比を  $r_s$  とすれば

$$r_s = \frac{(A_2 - A_1) \pm \sqrt{(A_2 - A_1)^2 + 4B_1^2}}{2B_1} \dots\dots\dots(2.36)$$

全振動エネルギー  $W$  は

$$W = \frac{M_s \omega^2}{4g} (1 + r_s) a_1^2 = \frac{M_s}{2f} \alpha_s (1 + r_s^2) a_1^2 \dots\dots\dots(2.37)$$

で与えられる。

ケーブルの水平変位は

$$\begin{aligned} w_c &= -4n \left[ \left\{ \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \left( \sin \frac{\pi}{l} x + r_s \sin \frac{3\pi}{l} x \right) \right\} \right. \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left\{ \left( 1 - \cos \frac{\pi}{l} x \right) + \frac{r_s}{3} \left( 1 - \cos \frac{3\pi}{l} x \right) \right\} \\ &\quad \left. - \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{r_s}{3} \right) \frac{x}{l} \right] a_1 \dots\dots\dots(2.38) \end{aligned}$$

で与えられる。

(5) 3 径間吊橋の逆対称振動

ここで3径間吊橋の代表として取り扱う吊橋は各径間とも単純支持で、ケーブルは塔頂で自由に移動できるものとする。ケーブルがタワーで弾性固定されているものとしても、タワーの受け持つ振動エネルギーは全振動エネルギーに比較して小さいことが F. Bleich<sup>1)</sup> によっても報告されているので、取り扱いの簡便さからも塔頂でケーブルは自由に移動できるものとした。

3径間吊橋の持つ振動エネルギーは本論文の記号にしたがって書けばつぎのとおりになる。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( \frac{m_s}{g} \omega^2 \int_0^l v^2 dx + 2 \frac{m_{s1}}{g} \omega^2 \int_0^{l_1} v_1^2 dx \right) \\ V &= \frac{1}{2} \frac{M_s}{8c^2 n} \left\{ l^2 \left( \int_0^l v'^2 dx + 2j \int_0^{l_1} v_1'^2 dx_1 \right) \right. \\ &\quad - c^2 \left( \int_0^l v'' v dx + 2 \int_0^{l_1} v_1'' v_1 dx_1 \right) \\ &\quad \left. + c^2 k \left( \int_0^L \epsilon_c dx + 2 \int_0^{L_1} \epsilon_c dx_1 \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.39)$$

ケーブルの伸び率は

$$\epsilon_c = \frac{1}{L} \left( \frac{8n}{l} \int_0^l v dx + \frac{4n_1}{l_1} \int_0^{l_1} v_1 dx_1 \right) \dots\dots\dots(2.40)$$

で与えられる。

ここで側径間に関する記号には1を付して表わし、

$$j = \frac{EI_1}{EI}, \quad n_1 = \frac{f_1}{l_1}$$

$\bar{L}$  はケーブル全長を表わす。

いま振動形を

$$\left. \begin{aligned} \text{側径間で } v_1 &= -\bar{a}_1 \sin \frac{\pi}{l_1} x_1 \\ \text{主径間で } v &= a_2 \sin \frac{2\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.41)$$

で表わせば、ハンガーの傾斜、および支間中央でのケーブルと補剛桁の結合を考えに入れなければ、振動の逆対称性よりケーブルの伸びは生じない。また吊橋の右あるいは左半分だけ考えても伸び縮みは生じないことより式(2.40)より

$$\frac{8n}{l} \int_0^{l/2} v dx + \frac{4n_1}{l_1} \int_0^{l_1} v_1 dx_1 = 0 \dots\dots\dots(2.42)$$

より

$$\frac{\bar{a}_1}{a_2} = \frac{2n}{n_1} = \frac{2fl_1}{f_1 l} \dots\dots\dots(2.43)$$

が得られる。いま  $f=f_1$ ,  $l=2l_1$  の場合には  $\bar{a}_1/a_2=1$  となり側径間と中央径間との振幅は等しくなる。普通の3径間吊橋はこの形に近い形をしているわけで、 $f=f_1$ ,  $l=2l_1$ ,  $m_s=m_{s1}$  を標準の3径間吊橋にとれば単径間のものと振動数に変化がなく振動エネルギーは単径間の2倍となる。

ケーブルの水平変位は側径間では

$$w_{c1} = 4n \left\{ \frac{x_1}{l_1} \sin \frac{\pi}{l_1} x_1 + \frac{1}{\pi} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{l_1} x_1 \right) \right\} a_2$$

中央径間では

$$\left. \begin{aligned} w_c &= \frac{8n}{\pi} - 4n \left\{ \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \sin \frac{2\pi}{l} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{l} x \right) \right\} a_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.44)$$

で与えられる。ここで注意すべきことは側径間が中央径間の半分の場合は支間中央でケーブルの水平変位は起こらないことで(2)、(3)の問題は起こらない。 $l=2l_1$  でない場合でも、この問題の影響は小さいものと思われる。

(6) 3 径間吊橋の対称振動

いま振動形を

$$\left. \begin{aligned} v &= a_1 \sin \frac{\pi}{l} x + a_3 \sin \frac{3\pi}{l} x \\ v_1 &= -\bar{a}_1 \sin \frac{\pi}{l_1} x_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.45)$$

と置けば、側径間の場合は逆対称振動と、中央径間では単径間の対称振動と同じ形となるが、ケーブルの伸びの計算が違って来る。

振動数は単径間の場合と同ように式(2.39)で与えられる  $T, V$  を使用し

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial a_3} = 0, \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial \bar{a}_1} = 0 \dots\dots\dots(2.46)$$

より求められる。ただ単径間吊橋の対称振動と異なるところは普通の径間割, ケーブル断面積をもった吊橋では中央径間に振動の節が生じないことである。ダンパーをタワー付近に設ける場合, タワー付近の振動振幅が大きい方が有難いわけであるが, ケーブル断面積が大きく, 伸びが小さくなるとタワー付近の振幅は小さくなっていく。いま  $l_1/l=1/2$ ,  $j=1$ ,  $f=f_1$  としケーブルの伸びはない振動を考えると式 (2.40) は 0 となり  $a_1, a_3, \bar{a}_1$  の間にはつぎの関係が得られる。

$$a_1 + \frac{a_3}{3} = -\bar{a}_1 \dots\dots\dots(2.47)$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial a_3} = 0$$

より

$$\det. \begin{vmatrix} \frac{2\omega^2}{g} - \frac{A_3}{f}, & \frac{\omega^2}{2g} B_2 \\ \frac{\omega^2}{3g} - \frac{B_2}{f}, & \frac{10}{9} \frac{\omega^2}{g} - \frac{A_4}{f} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(2.48)$$

が得られる。ここで

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= \frac{17\pi^4}{8c^2} + \frac{9}{8}\pi^2 \\ A_{21} &= -\frac{745\pi^4}{72c^2} + \frac{89}{8}\pi^2 \\ B_2 &= \frac{2}{3} \frac{\pi^4}{c^2} + \frac{1}{3}\pi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.49)$$

である。

よって振動数  $\omega$  は次式で与えられる。

$$\omega^2 = \frac{g}{f} \frac{9}{19} \left\{ A_3 \pm \sqrt{A_3^2 - \frac{19}{9}(A_2A_4 - B_2^2)} \right\} \dots\dots\dots(2.50)$$

ここで

$$A_3 = 11 \frac{11}{36} \frac{\pi^4}{c^2} + 11 \frac{23}{36} \pi^2$$

である。

ケーブルの水平変位は式 (2.40) と式 (2.38) を組み合わせて, 中央径間で

$$\begin{aligned} w_c &= \left[ \frac{8n}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3} r_{s3} \right) - 4n \left[ \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \sin \frac{\pi}{l} x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r_{s3} \sin \frac{3\pi}{l} x \right] + \frac{2}{\pi} \left[ \left( 1 - \cos \frac{\pi}{l} x \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. = \frac{r_{s3}}{3} \left( 1 - \cos \frac{3\pi}{l} x \right) \right] + \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{r_{s3}}{3} \right) \frac{x}{l} \right] a_1 \end{aligned} \dots\dots\dots(2.51)$$

で与えられる。

ここで,

$$r_{s3} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{\alpha_{s3} - 3B_2}{6\alpha_{s3} - 3A_3} \dots\dots\dots(2.52)$$

である。

全運動エネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \frac{M_s \omega^2}{g} \left( 1 + \frac{5}{9} r_{s3}^2 + \frac{1}{3} r_{s3} \right) a_1^2 \dots\dots\dots(2.53)$$

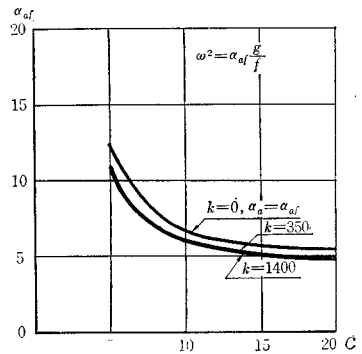
で与えられる。

### 3. 計算例

前章で述べた各種の振動形は, 吊橋のもつ  $c$  の値, ケーブルに働いている応力度, 吊材の長さ,  $f/l$  等によってどのように変化するか各パラメーターに数値を入れて計算してみることにする。

図-3.1 は単径間吊橋でケーブル中央を補剛桁に固定した場合の逆対称振動数を与える係数  $\alpha_{af}$  が  $c$  および  $k$  の値によってどのように変化するかを示したものである。 $k=350, 700, 1400$  にとって計算す

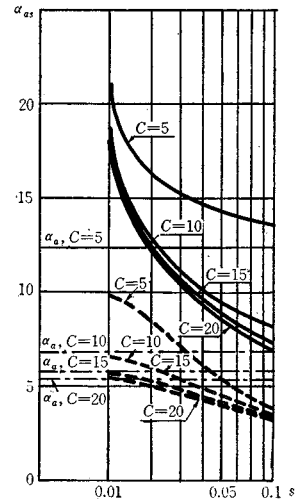
図-3.1



ると, すなわち死荷重によるケーブル応力度を  $60 \text{ kg/mm}^2, 30 \text{ kg/mm}^2, 15 \text{ kg/mm}^2$ , ヤング率を  $21 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  にとって  $\alpha_{af}$  の値の変化をみると, この程度のケーブル応力度では図に表われるほどの変化はみられないことがわかる。 $k=0$  の場合は (1) の場合すなわちケーブルの水平移動に対し補剛桁は影響を与えない場合と一致し, この場合より, 振動数は小さくなる。図-3.2 (a) は (3) の場合, すなわち逆対称たわみ振動と遊動円木振動の連成振動の振動数を与える係数  $\alpha_{as}$  を径間中央の吊材の長さ  $s$  と垂距との比  $s$  を変えて示したもので, 実線は  $s$  が大きくなるとたわみ振動となるもの, 点線は遊動円木振動となる振動を与える

図-3.2 (a)

実線は  $s$  が大きくなるとたわみ振動, 点線は  $s$  が大きくなると遊動円木振動となる振動を与える。



ものである。 $s$  が小さくなると振動数に大きな影響があることがわかる。もちろん  $s$  が小さくなれば主ケーブルの伸び縮みも考慮に入れる必要がある。図-3.3 は径間  $4.8 \text{ m}$ ,  $f=480 \text{ mm}$  の模型吊橋 ( $c=11.5$ ) のハンガーの長さを中央で  $20 \text{ cm} \sim 0 \text{ cm}$  に変えて振動数の変化を測定した結果で吊材の長さの影響がよく表われている。手で振動を吊橋に与えて実験を行なったものであるが, 吊材が  $2 \text{ cm}$  のとき

図-3.2 (b) 図-3.2 (a) の  $s$  をパラメーターとして示したもの

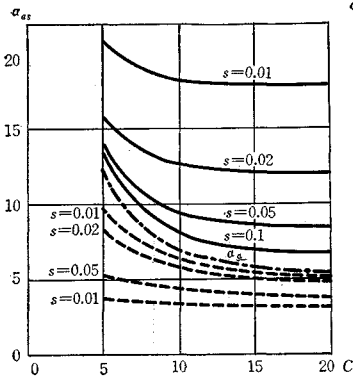


図-3.3 span 4.8 m の吊橋のハンガ一の長さによる振動数の変化

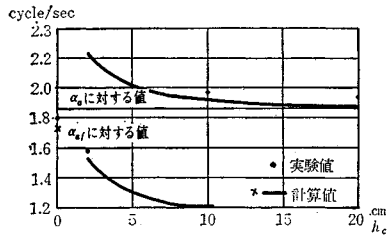


図-3.4 (a) たわみ振動が主なものの橋軸、鉛直振動振幅比

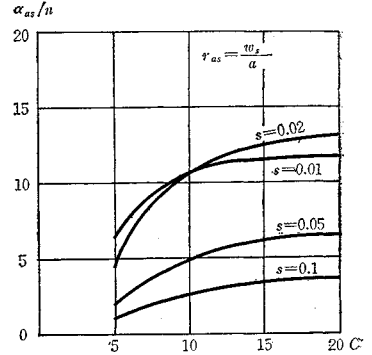


図-3.4 (b) 遊動円木振動が主なものの橋軸、鉛直振動振幅比

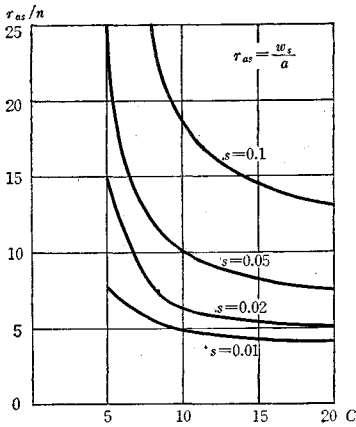


図-3.4 (c) 図-3.4 (a) の  $C$  をパラメーターとしたもの

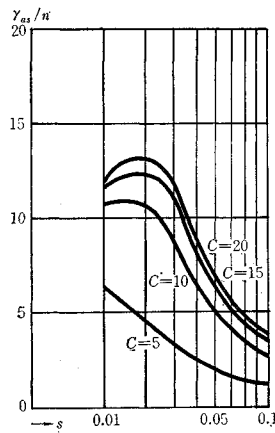


図-3.4 (d) 図-3.4 (b) の  $C$  をパラメーターとしたもの

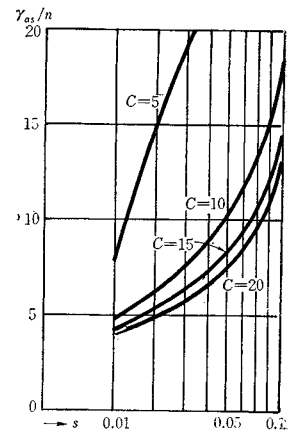


図-3.5 ケーブルを補剛桁に結合した場合のたわみ、橋軸方向振動振幅比

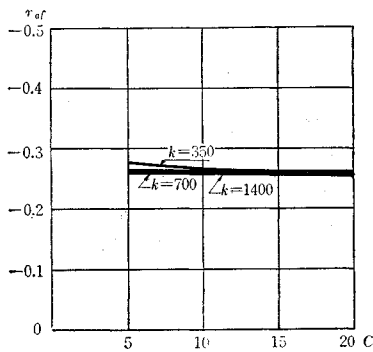


図-3.6 (a) 単径間対称振動

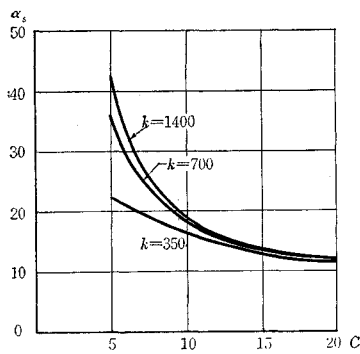
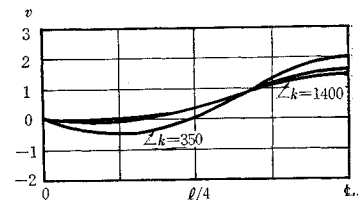


図-3.6 (b)



遊動円木振動に属するものと思われる振動の方が表われて振動数は低くなっている。この現象の説明は 6. で行なう。

図-3.4 は (3) の振動のたわみ振動と橋軸方向の振動

の振幅比  $r_{as}$  をパラメータを変えて示してある。

図-3.5 は (2) の場合のたわみ振動と橋軸方向の振動の振幅比を示したもので、この場合は  $c$  の値、 $k$  の値にかかわらず  $r_{af}$  は約 0.26 となっている。図-3.6,

図-3.7 (a) 3 径間対称振動係数

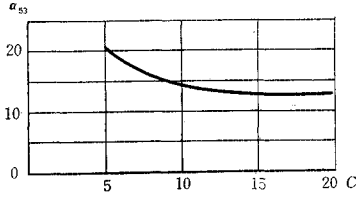


図-3.7 (b) 3 径間対称振動形

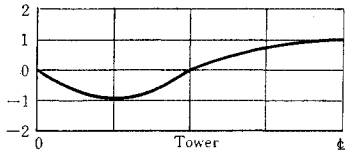


図-3.8 単径間逆対称振動のケーブル水平変位図

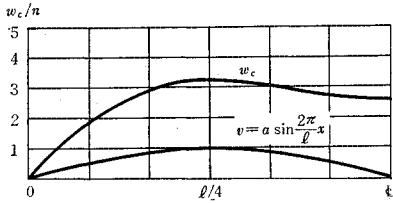


図-3.9 3 径間、逆対称振動のケーブル水平変位図

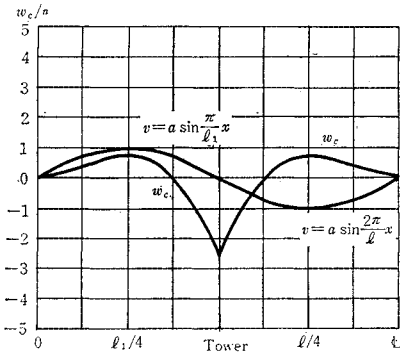
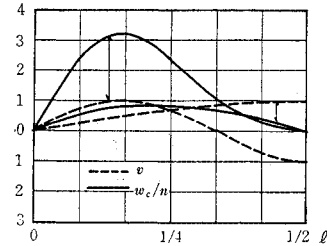


図-3.10 たわみとケーブル水平変位の関係



3.7 は 3 径間の単純吊橋の  $\alpha_5$  の値および振動形を示してある。この章での結果は特にことわらない限り  $f/l=1/10$  にとって計算してある。図-3.8 は単径間逆対称振動の場合の補剛桁のたわみとケーブルの水平変位の関

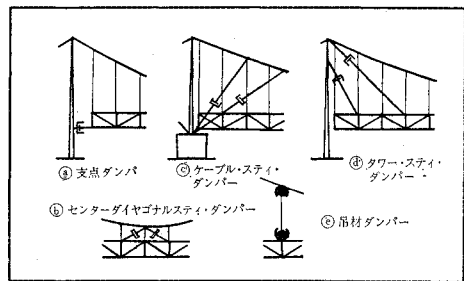
係を示したもので、径間中央でケーブルの水平変位はかなり大きく  $n=1/10$  ならば、最大たわみ振幅の約  $1/4$  の振幅となる。径間中央の吊材の長さは一般に小さいものである。これが補剛桁にたわみ振動と橋軸方向の振動の連成振動を起こさせる大きな原動力となっている。図-3.9 は 3 径間で  $l=2l_1$  の場合のケーブルの水平変位を示したものであるが、ケーブルの水平変位は塔頂で最も大きくなり、中央径間中央では水平変位は 0 となっている。塔付近では吊材の長さも長く、吊材の傾斜も小さくなり補剛桁に橋軸方向の力を加えることも少なく、たわみ振動と橋軸方向の振動はほとんど連成しないと思われる。このことがいままでも吊橋に設けられたダンパーのように補剛桁とタワー間、あるいは支間中央でケーブルと補剛桁間に入れたものではたわみ振動の場合はあまりその効果は現われない原因と思われる。ねじれ振動の場合は、両側主桁がそれぞれたわみ振動をしていると考えると、それぞれの橋軸方向の動きは止められることになり支間中央ではケーブルとの相対変位は逆対称一次振動のとき特に大きくなり、センターダイアゴナルステイが大きな役割を果たすことになり、タワーのねじれ剛性も大きな影響を与える。

図-3.10 は  $v = \sin \frac{\pi}{l} x$ ,  $v = \sin \frac{3\pi}{l} x$  なるたわみ曲線に対応したケーブルの水平変位曲線を示したものである。

#### 4. 吊橋用ダンパーの取り付け位置について

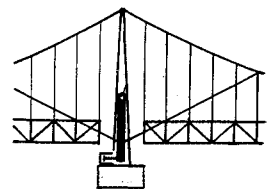
吊橋のたわみ振動を制動するダンパーを取り付ける位置として図-4.1 ①~⑥に示したようなものが考えられる。① および ⑥ のものは前章で述べたように、たわみ振動と橋軸方向の振動が連成する場合に有効に働くが

図-4.1



それ以外の場合はあまり有効に働かない。すなわち、単径間吊橋の逆対称振動に対しては有効であるが、同じ逆対称振動でも 3 径間の場合にはあまり有効とはならない。特

図-4.2



に 図-3.7 に示したように、側径間と中央径間の比が 1/2 でロッキングタワーの場合にはその効果はきわめて小さくなる。㉔、㉕ のものは直接吊橋のたわみ振動を減衰させようとするものである。㉔ の場合はダンパーを比較的剛な橋脚上に装置しケーブルをかいして主ケーブルの振動を押さえようとするものである。㉕ の変形として 図-4.2 のようにケーブルに必要な静的な力を加える方法も考えられるが、側径間と中央径間とが同時に上方あるいは下方にたわむ場合には有効でない。㉕ は塔の振動にも制動を与える利点があるが、ダンパーより補剛桁に水平力も加わり厳密な振動解析はかなり複雑になるものと思われる。また ㉔、㉕ の方式はある程度吊橋のねじり振動の制動にも役立つものと思われる。㉔ に示したものは吊材の支点到適当なダンパーを入れたものでその効果はあまり大きくはないと思われるが、たわみ振動の結果起こる吊材の傾斜によって制動力を全径間にわたって起こさせようとするものである。この吊材の傾斜による吊橋の減衰率の増加は前節で述べた実験でもよく表われていた。

一応考えられるダンパーの取り付け位置を示したが、もちろん㉔~㉕までのものを組み合わせて用いることもできる。また ㉔、㉕ のものは吊橋断面を横切って装置することにより、ケーブルおよび補剛桁の横振動の制動にも役立たせることができるものと思われる。

5. ダンパーによる吊橋の制動について

ダンパーの種類として、摩擦型、速度比例型、速度 2 乗比例型等があるが、いま標準として速度比例型ダンパーをとって考えると、各規準振動に対するダンパーの変位を  $u$  とし、吊橋の振動 1 cycle で失われるエネルギーは、 $c$  をダンピング力係数として

$$\Delta W = \int_t^{t+T} c_m \dot{u}_m du = \int_t^{t+T} c_m \dot{u}_m^2 dt \dots (5.1)$$

で与えられる。いま

$$u = U \sin \omega t$$

とすれば

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_t^{t+T} c_m \int_t^{t+T} U_m^2 \omega^2 \cos \omega t \cdot dt \\ &= \int_t^{t+T} c_m U_m^2 \omega \pi \dots \dots \dots (5.2) \end{aligned}$$

が得られる。

1 cycle により失われるエネルギーと全振動エネルギーの比を  $\varphi$  とし対数減衰率を  $\delta$  とすれば、

$$\frac{\Delta W}{W} = \varphi = 2 \delta \dots \dots \dots (5.3)$$

なる関係があるから

$$\delta = \frac{\Delta W}{2W} \dots \dots \dots (5.4)$$

より吊橋の対数減衰率は計算される。

いまダンパーによって吊橋の振動モードおよび振動数

に変化がないものとすれば  $W$  の値は 2. に示した値を用いればよい。吊橋のようにきわめて自由度の高い構造物ではダンパーの設置によって振動形、振動数は大きな影響を受けるものと思われるが、これらの問題は本論文の目的とするところよりさらに進んだ問題である。また高次の振動についても論議を行っていないが、これらも振動形の変化の問題とも関連したさらに進んだ問題と思われる。近似的に取り扱うならば、たわみ振動の形を

$$v = a_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$n = 4, 5, 6, \dots$$

と置いて取り扱うことができる。

6. 減衰力および減衰率の計算例

2. で述べた二、三の振動についてダンパーの効果を計算して見る。

最初に支点ダンパーによる単径間吊橋の逆対称振動の制動について計算してみる。

ケーブルは中央で補剛桁に結合されているものとする。いま吊橋の寸法をつぎに示したものとする。

$$f = 100 \text{ m}, k = 700, c = 10, M = 10\,000 \text{ t}$$

$$f/l = 1/10$$

すると式 (2.18) より

$$\omega = 0.7721/\text{sec}$$

よって  $T = 8.09 \text{ sec}$

橋軸方向の振動振幅は式 (2.20) より

$$\omega_s = 0.2592 a$$

全振動エネルギーは式 (2.21) より

$$W \rightarrow \frac{M}{4f} \alpha_{af} (1 + 2 \cdot r_{af}) a^2$$

ダンパーは左右端に 1 個ずつあるものとするれば

$$\Delta W = 2 \cdot C \omega \pi \cdot \omega_s^2$$

よって対数減衰率 1 を得るにはダンピング力係数  $C$  は

$$C = 1 \cdot \frac{W}{\Delta W}$$

で与えられる。上記の数値を入れて計算すると

$$C = 10.89 \text{ ton/cm/sec}$$

が得られる。

径間中央の吊材の長さ 2 m すなわち  $s = 0.02$  とし他は前記と同じ条件で計算する。図-3.2 からわかるとおり吊材の長さが長くなるとたわみ振動が主となる振動と遊動円木振動になるものがある。3. で述べた模型吊橋についてそれらの振動エネルギーを計算すると 図-6.1 に示したように中央吊材の長さが短くなると遊動円木振動が主な振動の方が現われ易くなり実験もこのことを示している。 $s = 0.02$  では遊動円木振動の方がエネルギーは小さく、この形のものが表われるものと思われる。すると式 (2.30), (2.31) より

$$\alpha_{as} = 5.8302, \omega = 0.7558$$



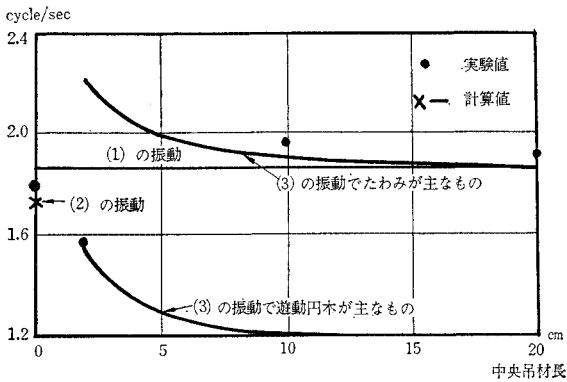
図-6.1 たわみ振動が主なものと円木振動が主なものと  
の振動エネルギーの比較図

表-6.1

ダンパー形式	取付け位置	逆対称1次振動 t/cm/sec	対称1次振動 t/cm/sec
タワー ダンパー	l/12	2.4	180.0
	l/6	1.6	720.1
ケーブル ステイ ダンパー	l/12	4.8	75.0
	l/6	5.8	566.0

$$r_{as} = -0.635, C = 2.75 \text{ t/cm/sec}$$

となり主ケーブルを補剛桁に結合した場合より小さなダンピング力係数でよいことになる。

つぎに主ケーブルを補剛桁に結合した吊橋に © 型、ケーブルステイダンパーおよび ㊦ 型、タワーステイダンパーを設けた場合の逆対称振動および対称振動の対数減衰率を1にするために必要な係数Cの値を表-6.1に示す。なおステイ取付け位置は l/12, l/6 で、ダンパーは両側支点側に1個ずつ取り付けるものとする。

逆対称一次振動に対してはケーブルステイダンパーよりタワーダンパーの方が能率はよくなっている。対称振動についてはダンパーの能率は非常に落ちているがダンパー取付け点付近が振動の節に当たっているため、3径間吊橋でははるかに能率はよくなり逆対称一次振動の値に近くなる。ケーブルステイダンパーのほうが能率がよくなっているが、たわみ振動の節の点でもケーブルの水平変位があるのでその分だけダンパーが働いているためである。なおダンパーの取付け位置はダンパーの働きを最大にする点を選らんだものではない。ダンパーも粘性ダンパーで復動で利くものとした。

## 7. 結 語

エネルギー法により吊橋の起こり得る振動に二、三考察を加え、ダンピングがないものとした振動形を使って吊橋にダンパーを設置したときの効果を簡単に計算した。計算例は両側に1個ずつの場合を計算したものであ

るが高次の振動もダンブするには数多くのダンパーを設置することが必要になってくるものと思われる。以上の計算結果を見ると吊橋の最大欠点の一つであるダンピング力の不足はこういったダンパーの設置によりかなり改善されることが期待される。本論文ではダンパー設置の効果をきわめて簡単な仮定の下に論じたが、さらにダンパーによる振動形の変化、過渡特性の変化、タワーも含めての振動特性の変化といった点に研究を進めたいと思っている。

なお本論文作成に当って実験その他協力を得た、助手の高橋龍夫君、学生（現在道路公団）の落合定流君に感謝の意を表したい。

## 主な記号

l: 支間または中央径間支間

l<sub>1</sub>: 側径間支間

1: 側径間についての量に付す

EI: 補剛桁の曲剛性

E<sub>c</sub>: ケーブルのヤング率

A<sub>c</sub>: ケーブルの断面積

H<sub>w</sub>: 死荷重によるケーブル水平反力

m<sub>s</sub>: 単位長さ当りの補剛桁重量

M<sub>s</sub>: 補剛桁全重量 = m<sub>s</sub>l

c:  $l\sqrt{H_w/EI}$

h: ハンガーの長さ

f: ケーブル垂距

n: f/l

h<sub>c</sub>: 径間中央の吊材の長さ

s: h<sub>c</sub>/f

α: 円振動数を与える係数

ω: 円振動数

T: 周期

ε<sub>c</sub>: 振動によるケーブルのひずみ増加分

w<sub>s</sub>: 補剛桁の橋軸方向の変位

w<sub>c</sub>: ケーブルの水平変位

C: ダンパーのダンピング力係数

k: ケーブルのヤング率と死荷重によるケーブル応力度の比

## 参 考 文 献

- 1) Bleich, F., etc.,: "The mathematical theory of vibration in suspension bridges" 1950.
- 2) Rocard, Y.: "Dynamic instability" 1958 Crosby Lockwood, London.
- 3) 平井 敦: "鋼橋 III" 1952, 技報堂.
- 4) 平井・伊藤: "重床式無補剛吊橋について" 土木学会論文集 64号, 1959.9.
- 5) 菊地貞博: "橋梁耐震用オイルダンパーの計画および性能実験" 土木技術, 37年3月.
- 6) 坪井他6名: "大スパン吊屋根構造の設計上の諸問題" 第11回橋梁構造研究発表会, (1966.6.9・受付)