

アナログ コンピューターによる橋梁下部構造の動的挙動の解析に関する研究

STUDIES ON THE ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOURS OF THE BRIDGE SUBSTRUCTURE BY USING THE ANALOGUE COMPUTER

佐藤亮典*・川崎鉄一郎**

By Sokenori Sato and Tetsuichiro Kawasaki

1. 緒 言

名四道路木曽川橋の下部構造は、40 m 強の深い井筒基礎で、底面の影響を無視して曲げ弹性振動を比較的純粹な形で検討できる好適な構造物であるので、建設省土木研究所の指導を得て、これの振動実験を行なった。試験結果については、目下、土木研究所においても解析中であるが、これと平行して当工事事務所で行なった解析が、きわめて興味深い結果を示したので、これを紹介するとともに、その結果について若干の考察を試みた。

従来、曲げ変形を考慮した振動方程式が4階の偏微分方程式で解析的に解けなかったので、

- (1) 地盤反力をバネで置換して考える方法、
- (2) 地上部を等価な片持ばかりとして解く方法¹⁾、
- (3) 動的ひずみが静的ひずみにほぼ相似であると仮定して、Rayleigh-Ritz のエネルギー法による方法、
- (4) その他粘性抵抗、曲げ変形、加振力など条件の一部がない場合、または、無視できる場合の解法、

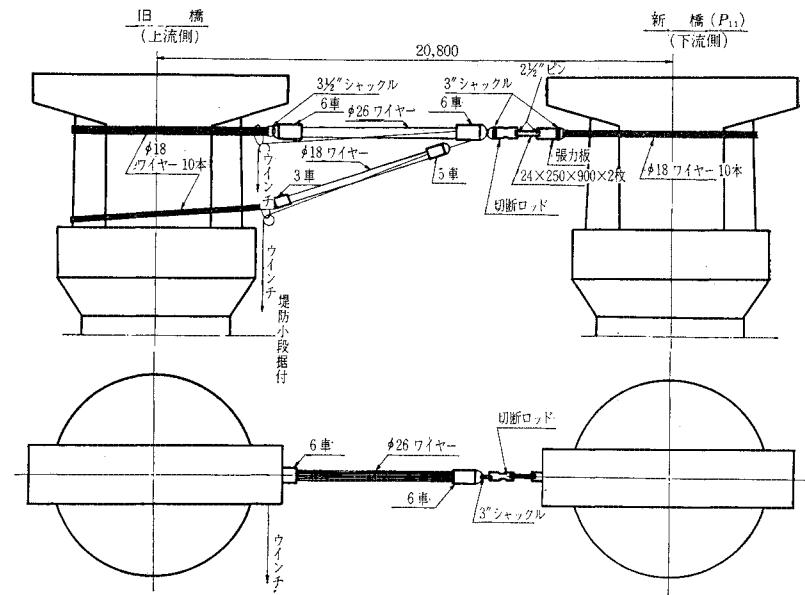
など、種々の仮定にもとづく簡便法が考えられていたが、仮定の無理から生ずる誤差、無視した項の影響など、多くの問題を含み、実験との符合も必ずしも満足できるものではなかった。また、解析法であるため、導入する条件にも限界があり、少しでも厳密に近づけようとすればきわめて複雑難解となる。

これに対し、ここで述べる方法は、差分式を利用することにより、4階の偏微分方程式を連立2階常微分方程式になおし、アナログコンピューター（以下アナコンと略称）

する）を利用して厳密解を得たものであって、解析の結果は振動実験の結果ともきわめてよく一致し、その妥当性が実証された。したがって、その解析法をさらに展開して地震動に対し適用してみたところ、特に共振状態において、従来の物部式による解析値の数倍に達する曲げモーメントが発生するという結果を示した。そして、この結果を検討することによって、地震時の応力解析の場合には必ず動的な解析によるべきこと、その場合、曲げ変形が無視できないことなどの結論を得た。したがって、曲げ変形を考慮できる厳密解法として、しかも、技術に習熟しさえすればきわめて容易である実用解法として、さらに、諸条件をきわめて容易かつ、自由に導入できる将来性のある解法として、アナコンによる本解法の意義を強調するとともに、今後の展開の方向、および、それとともに問題点などに論及したものである。

新しい方法であると述べたが、従来から知られている曲げ振動方程式と、アナコンによる微分方程式の解法とを組み合わせ、偏微分方程式であるために導入のための若干の操作を加えたものに過ぎない。しかし、従来から

図-1 自由振動加振段取図



* 正会員 日本道路公団 東京支社岩瀬工事事務所長

** 正会員 日本道路公団 名古屋支社工事部工事課

解析不可能として種々の略算法によらざるを得なかったことから考えても、これらの既知の知識を組み合わせることにより、少なくともorthodoxな実用厳密解法を得たことに大きな意義があるものと考える。

以下実験の概要について解析法を紹介し、解析の結果に対して若干の考察を加える。

2. 振動実験の概要

実験は強制振動試験と自由振動試験とからなる。強制振動は最近土木研究所で製作した最大出力40t、周波数0.5~5サイクルの大型起振機を橋脚天端に載せて発生させた。また、自由振動は、試験橋脚の上流側にある古い橋脚をアンカーとして50t、および、100tの張力をあたえ、これを急に切断することによって得た。この切断は、ワイヤロープの中間に設けてある切断ロッドが所定張力に達すれば自動的に切断するようにしたものである。地盤状況、計器の埋設状況、起振要領などを図-1~3に示す。土圧計、水圧計には共和電業製のカールソン型を、加速度計にも共和電業製のものを使用した。ま

図-2 計器取付状況図

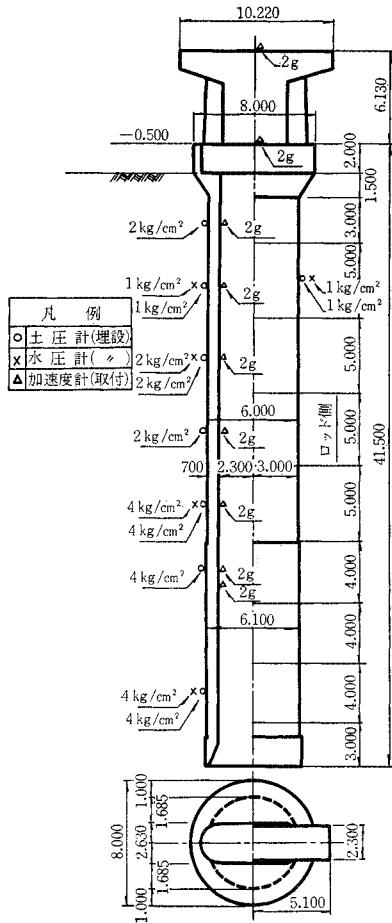
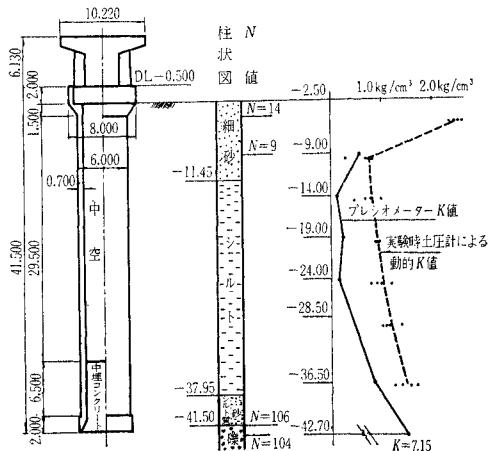


図-3 実験K値おたびプレシオメーターK値(kg/cm³)



た、実験結果を図-6~8の解析結果に併記して示した。

3. 解析

地震における井筒の振動を示す微分方程式は、周知のように、図-4のモデルによって、式(1)となる。すなわち、絶対静止系X-U座標に対し大地座標系x-yが振動するすれば

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + mA \frac{\partial^2 (U+y)}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} + KB_y = 0$$

ここで、
m: 単位体積あたり井筒質量

C: 井筒単位長あたり粘性係数

A: 井筒断面積

K: 土の反応係数

B: 井筒幅

となる。これを変形すると

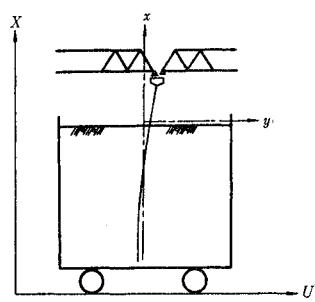
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + mA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial t} + KB_y = -mA \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \dots \dots \dots (1)$$

となる。これは、あたかも、静止座標系にある井筒が地震による外的加振力 $mA(\partial^2 U / \partial t^2)$ を受けたかのような状態と同様である。今回の解析においては、地震動を正弦波と仮定し、つぎのように表わした。

$$U = u \sin(\omega t + a)$$

$$\therefore (\partial^2 U / \partial t^2) = -u \omega^2 \sin(\omega t + a) \quad \dots \dots \dots (2)$$

図-4



また、起振機による強制振動に対しては、式(1)の右辺を $-f \sin \omega t$ として橋脚天端に作用させねばよい。 f は起振機の最大加振力を表わす。

さて、式(1)は周知のように一般的には解けない。したがって、近似的解析法として種々の方法が考えられるが、前述のとおり種々の問題点がある。そこで、上式をそのまま解く方法として電子計算機を使用する解法を検討したが、偏微分方程式であるため、導入に若干の工夫を要した。参考のため検討した方法を示すとつぎのとおりである。

(1) デジタル コンピューターによる方法

$\partial^2 \{EI(\partial^2 y / \partial x^2)\} / \partial x^2$ を $\Sigma f_i y_i$ の形になおし、 n 元連立常微分方程式とし、行列式の固有値問題として解く方法²⁾ であって、名古屋大学成岡教授と山口大学中川助教授が鋼製煙突の横振動解析に用いている。この方法は一次振動のみでなく高次の振動まで解析できる利点はあるが、行列式の解を得た後、さらに数値積分やデジタル量の整理など少なからぬ労力を必要とすること、地質条件に対応して任意の粘性係数を入れにくいくこと、しかも、きわめて難解であること、などの欠点がある。今回の解析をこの方法でも実施したが、結果はかなり近いものであった。

(2) アナコンによる方法(1)

自由振動の場合、すなわち、式(1)の右辺が 0 となる場合は、解が関数分離形になることが予想できるので、その形を $y = \phi(x)\psi(t)$ とおく。すると、式(1)は

$$\begin{aligned} & EI\phi''''(x) + KB\phi(x)\} \psi(t) \\ & = -\{mA\psi''(t) + C\psi'(t)\}\phi(x) \end{aligned}$$

と変形することができる。したがって、

$$\begin{aligned} & EI\phi''''(x)/\phi(x) + KB \\ & = -\{mA\psi''(t) + C\psi'(t)\}/\psi(t) = \text{const.} \end{aligned}$$

とし、偏微分方程式を地上部地中部など数個の連立常微分方程式になおして固有値を求める方法である。しかし、この方法は右辺に強制力が入った場合の解法が困難なことと、同じ連立常微分方程式として解くなら条件を自由に導入できる次項の方法がすぐれているとして、この方法は採用しなかった。

(3) アナコンによる方法(2)

式(1)の $\partial^2 \{EI(\partial^2 y / \partial x^2)\} / \partial x^2$ を差分式になおし、 $(\partial^2 y / \partial t^2)$ に関する連立 2 階常微分方程式としてアナコンに導入する方法である。この方法は地質状況、断面形状の変化、地震波形などに対応して、自由に条件を考慮でき、土の塑性変形、乾性摩擦、底面反力の影響など解析法ではとうてい考えられない諸種条件をもきわめて広範に導入できる。しかも、機械の容量さえ許せば、断面力、変位など振動時の全モードを 1 回の操作で把握でき、きわめて実用的でさえある。これに対し、アナログ量であるための有効数字の問題、高次振動がはじめて出

たとき別に調和分析を行なう必要があるなど、若干の問題はあるが、現在までの略算法の精度や、土に関する数字の精度などを考えれば、これでも十分であろう。

さて、この第 3 の方法についてアナコン導入までの操作を順を追って説明する。基本方程式(1)の左辺第 1 項を差分式になおすと、つぎの式(3), (4)のとおりとなる。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right]_n = \frac{1}{(4x)^2} \left(\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{n-1} - 2 \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n + \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{n+1} \right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{n-1} &= \frac{EI_{n-1}}{(4x)^2} (y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n) \\ &= -M_{n-1} \\ \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n &= \frac{EI_n}{(4x)^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) \\ &= -M_n \\ \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{n+1} &= \frac{EI_{n+1}}{(4x)^2} (y_n - 2y_{n+1} + y_{n+2}) \\ &= -M_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

これと式(1)から、

$$\begin{aligned} m A_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= \frac{1}{(4x)^2} (M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1}) \\ &\quad - C \frac{dy_n}{dt} - K_n B_n y_n - m A_n \frac{d^2 U}{dt^2} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (5)$$

添字 n は n 番目ブロックに対する数値であることを示す。境界条件として $n=0.5$ 、および、 $n=N+0.5$ (N は分割数) における断面力の条件を用いて、

$$n=0.5; M_{0.5}=0, S_{0.5}=0$$

$$n=N+0.5; M_{N+0.5}=0, S_{N+0.5}=0$$

$n=0.5$ の境界条件、 $M_{0.5}=(M_0+M_1)/2=0$ 、 $S_{0.5}=(M_0-M_1)/4x=0$ が同時に成立するためには、

$$M_0=0, M_1=0$$

となる。全く同様にして、

$$M_N=0, N_{N+1}=0$$

を得る。上部工の質量を考える場合は、上部工質量が近似的に $n=1$ の点に作用するものとし、境界条件は上述の場合と同様に考えた。

式(5)は各ブロックごとに一つずつできるから、 N 個の未知数 y_n に関する N 元連立 2 階常微分方程式となる。これに各ブロックごとの数値を入れ、スケール変換を施して図-5 のようなブロック図を組んだ。その場合の諸数値は下記の方針によって表-1 のとおり決定した。

(a) I : 振動は弾性限度内でおこるとして、コンクリートの引張を無視せず、全断面について計算した。

(b) C : 地中では深浅にかかわらず一様であると仮定して、自由振動試験の減衰モードに一致するように逆

に決めた。

(c) K : プレシオメーターによる実測値を採用し

表-1 各数値一覧表

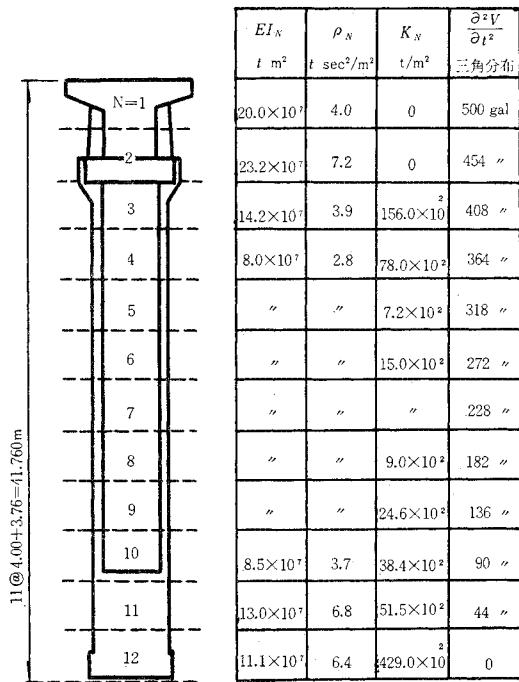
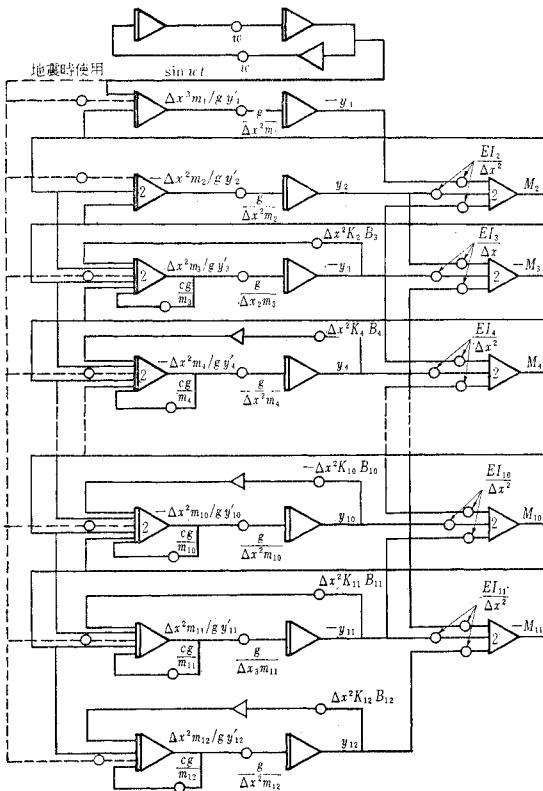


図-5 基本ブロック図



た。

(d) $(\partial^2 U / \partial t^2)$: 地震動を正弦振動と仮定して、 $(\partial^2 U / \partial t^2) = -u \omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$ とし、震度 $u \omega^2$ は深さ方向に一様に分布するものと逆三角形に分布するものの 2 種類を考え、平均値で 250 gal になるように決めた。

解析結果を整理し実験結果と対比して示したものは、図-6~11 である。以下、解析結果について考察する。

4. 解析結果の考察

(1) 反力係数

解析にはプレシオメーターの測定値を使用したが、図-3 に示すように、振動時に土圧計が示した動的な反力を変位で除した動的反力係数はその数倍の大きさになった。解析結果が実験結果より周波数は低く、変位は大きい目に出了原因の一つは、このためと考えられる。本地域の粘土は特に鋭敏比が高い上に、塑性変形の影響もあるので、動的な反力係数はプレシオメーターによる静的な反力係数より小さいだろうと予想していたが、結果は全く逆であった。この原因の一つとして、粘性土中では特に動的な瞬間変位に対し水の逃げ場がないため大きな瞬間圧力を生ずること、土の慣性力が影響することなどが考えられるが、これは今後の問題であろう。

また、この値を従来の Terzaghi らによる反力係数と比較するとはるかに大きい。これは Terzaghi 理論が小さい杭を対象としたもので、杭幅に反比例して反力係数が小さくなり、したがって、杭幅が増しても全抵抗値は増加しないとしている点に問題がある。大きな井筒などに対し、Terzaghi 式にかわる式として、 N -値、 qu -値と動的反力係数 K との関連を見出すことも、今後の課題である。

(2) 固有周期

固有周期を求めるることは振動解析の焦点であり、これが実際と符合するかしないかは、解析法の当否判定の鍵とさえ考えられている。今回の実験では、起振機に低周波のものを使ったため、強制振動における共振点が確認できなかったが、自由振動においては、5.0~5.5 c/s の固有振動数を示し、解析値の 4.7 c/s ときわめて近似した。若干の差を生じたのは、前述のとおり、反力係数として実際より小さい値を採用したことによる。

(3) 粘性係数

前述のように、地中では const. と仮定して、自由振動試験結果の減衰状況に符合するように、逆に粘性減衰定数を決めた。粘性係数を決める既存の理論がないこと、したがって、現段階としては実物試験によるしか推定の方法がないことが、今後の大きな問題点である。しかも、この値が共振点における最大振幅にきわ

図-6

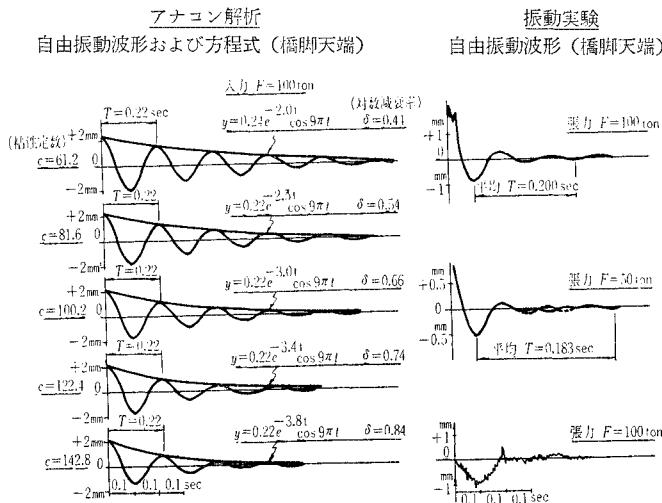
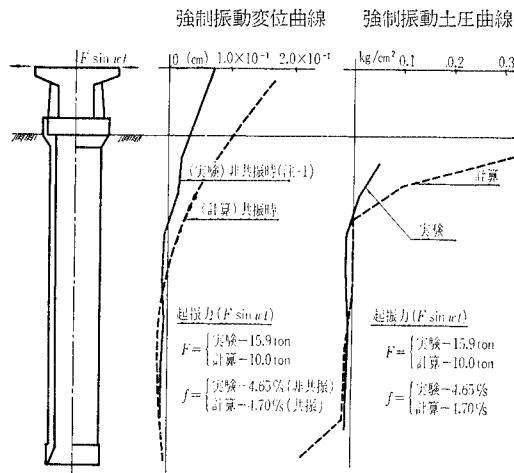
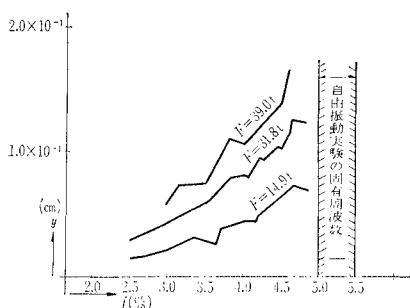


図-7



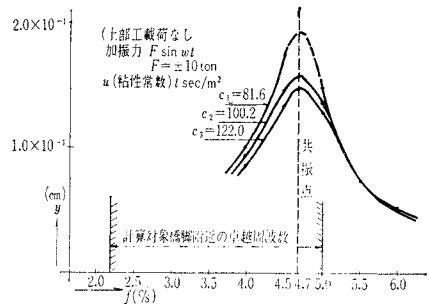
注-1 ただし実験周波数 4.65 c/s は共振点ではないが実験周波数中最も共振点に近いものである。

図-8 振動実験の共振曲線（橋脚天端）



めて大きな影響をもつて、この定数の決定は振動解析の必須条件である。多数の実験をかさねることによって、既知の N -値、 qu -値などの関係を見出すか、あるいは、簡便な測定法を考察することが、今後の重大な課題であろう。

図-9 アナンコン計算の共振曲線（橋脚天端）



さて、本解法で求めた C の値について考察しよう。一般的には、 $C/mA = 2n_{ave} = 2(\delta/T)$ (δ ：対数減衰率、 T ：周期) となるはずで、自由振動の減衰モードから δ/T を決め、これから逆算した C を用いてアナンコンに導入すれば、自由振動と相似の減衰曲線が再現できるはずであった。

C の値はつぎのようにして決めた。すなわち、系全体としての平均粘性 C_{ave} を平均質量で割った値 $2n_{ave}$ が $2(\delta/T)$ に等しいとして、

$$12 C_{ave} \sum_1^{12} mA_i = 2n_{ave} = 2(\delta/T) \quad \dots \dots \dots (6)$$

とおき、地中部の C のみでこれと等価な抵抗をするものとする。地中部各ブロックの C は、その有効度に応じて加重平均すると、

$$C = C_{ave} \sum_1^{12} \frac{1}{mA_i} \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right) / \sum_1^{10} \frac{1}{mA_i} \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right) \quad \dots \dots \dots (7)$$

となる。ここに、加算記号 Σ に付した 12、および 10 の数字は、それぞれ、全井筒、および、地中部井筒の分割ブロック数を示す。実験結果から $\delta \approx 0.5$ 、 $T \approx 0.2$ 秒、 $(\partial y_i / \partial t) \propto y_i$ として式 (6)、式 (7) によって計算した C はおよそ $33 t \text{ sec}/m^2$ となった。これから (C/mA_i) を計算して各ブロック方程式に入れ、アナンコンを動作したところ、得られた減衰はきわめて小さく、所期の $\delta=0.5$ のモードは得られなかった。結果的には $C \approx 100 t \text{ sec}/m^2$ を入れたとき始めて予定どおりの減衰が得られた。これは、頭部における粘性の影響が予想外に大きく、速度を加味して加重平均してもなお おおよばないことを示す。極端な場合、地上に突出したこの種埋設構造物を、等価な片持ばかりにおきかえて解く解法があることからも明らかのように、振動性状に対しては上部の影響が決定的で、地上部分の C が 0 となった場合、同等な減衰を得るために地中部の C をきわめて大きくする必要が生じたのは当然といわねばならない。今後の C -値算定にあたり、このウェイトの置き方の問題、換言すれば、局部の粘性が系全体の減衰におよぼす影響を数式化することは、きわめて重要、かつ、困難な問題となるう。

なお、今回は減衰力として地中の粘性抵抗のみを問題としたが、特に変位が大きくなつた場合土の塑性変形の影響も問題であり、また、上述のように井筒頭部の影響が大きいとすれば、空気中の減衰要因も無視できないであろうし、さらに、乾性摩擦も考慮する必要がある。それぞれの導入の方法、影響度の検討は今後の課題であるが、同時に、これらの条件を比較的容易に導入できるのも、アナコンによる解析の大きな利点である。

また、実験の減衰はあまりはっきりしないので、特に第一波は過広現象として無視しえないが、第一波を考えればこれよりかなり大きくなる。解析結果の変位量が実験の変位量よりかなり大きいのは、これも一つの原因かと思われる。

(4) 地震時の最大曲げモーメント

さて、以上のように諸数値を決定し、固有周期、反曲点位置など振動モードが実験結果とよく一致したので、解析法、および、諸定数が当を得たものであるとして、上部工を載荷した全構造物に対する地震時の動的挙動を解析した。これをまとめたものが図-10、11である。

図-10 地震時共振曲線(解析値)

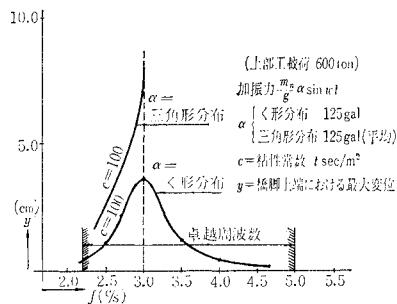
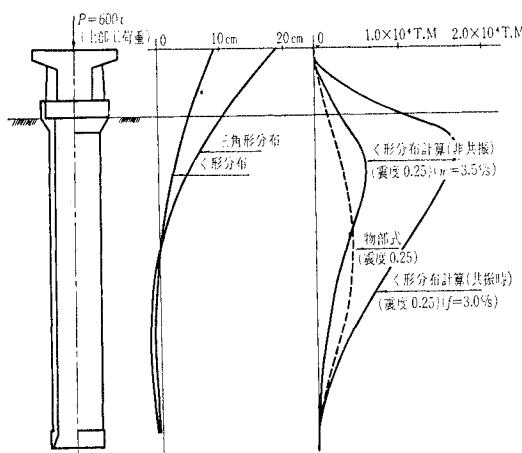


図-11

地震時変位曲線(共振時) 地震時モーメント曲線

$f = (\text{地震周波数}) = 3.0 \text{ c/s}$ 物部式のアナコン計算
 $k = 0.25$



まず、曲げモーメントの最大値が物部式で計算したものの3倍以上となったことは、きわめて重要である。もっとも、共振点から 0.5 c/s 以上ずれると逆に物部式を下回る値となるが、このように、同一加速度であっても振動数によって変位、断面力に著しい差を生じること、その差の生じ方に粘性係数の値がきわめて大きい影響をもつことなどの周知の事実は、振動を考えることなしに地震時応力を論じ得ないことを示す。なお、本地域の卓越周期が $0.2 \sim 0.45 \text{ 秒}$ ということから考えても、過去の地震記録から推しても、本解析結果が示す 3.0 c/s という共振点は、十分予想できる周期であることを付言しておく。

つぎに、曲げモーメントの最大部位、および、反曲点位置が、物部式によるよりかなり上方に偏っている点について考察する。この原因の一つは上層部に K -値の大きい砂層があるためと考えられ、必ずしも物部式の不適合を示すものではないが、 K -値の変化に自由に対応できる点は、本解法のすぐれた点でもあり、結果が信頼できる理由でもあろう。いま一つの原因是、後述の曲げ変形を考慮したことによる当然の結果であり、この意味においては、曲げ変形を無視してないだけに、本計算の方が正しいといえる。なお、上層部の反力が大きくなればなるほど、曲げモーメントは相対的に小さくなるのが普通で、上層部反力が大きいにもかかわらず、3倍の曲げモーメントが計算されたことは、物部式的な反力分布の場合、これをさらに大きく上回ることが予想される。さらに、震度分布が三角形となる場合も差はいよいよ大きくなり、静的な解法ではとうてい地震時の応力を推定できないと考えられる。

(5) 差分方程式の誤差

本解法が式(1)をそのまま解いた厳密解という意味では、方法論的な問題や仮定にもとづく誤差の問題などは考えられない。唯一の誤差導入の可能性は差分式だけであるので、これによる本解法の誤差を論じよう。

簡単のため $EI = \text{const.}$ とし、式(3)、(4)をまとめつぎの形に表わすものとする。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right]_n = \frac{EI_n}{(\Delta x)^4} \cdot (y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}) \quad (6)$$

$y = f(x)$ とすれば、 y_{n+i} は $f(x_n + i \Delta x)$ を意味するので、これを Taylor 級数に展開すれば、

$$\begin{aligned} f(x_n + i \Delta x) &= f(x) + (i \Delta x) f'(x_n) \\ &\quad + (i \Delta x)^2 \cdot f''(x_n) / 2 ! \\ &\quad + (i \Delta x)^3 \cdot f'''(x_n) / 3 ! \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} y_{n+i} &= y_n + (i \Delta x) y'_n + (i \Delta x)^2 y''_n / 2 ! \\ &\quad + (i \Delta x)^3 y'''_n / 3 ! \dots \end{aligned}$$

これを $i = -2 \sim +2$ について計算し式(6)の右辺に

代入すると右辺は、

$$EI_n \left\{ \frac{\partial^4 y_n}{\partial x^4} + \frac{(4x)^2}{6} \frac{\partial^6 y_n}{\partial x^6} + \frac{(4x)^4}{91} \frac{\partial^8 y_n}{\partial x^8} \dots \right\}$$

となり、

左辺 $\approx EI_n \frac{\partial^4 y_n}{\partial x^4}$ との差 $EI_n \{(4x)^2 y_x^{IV}/6 + (4x)^4 y_x^{VI}/91 \dots\}$ が差分式の誤差となる。反力がおおよそ物部式によるものとして、今回の解析の分割数 12, $\Delta x = 4\text{ m}$ の場合に対して略算すると、相対誤差は (1/50) 程度となり、ほとんど問題にならないことがわかった。必要に応じて分割数を増すことにより、分割数の自乗に逆比例して誤差を縮めることもできる。なお、前進差分や後退差分を用いると、誤差がかなり増すので、本例のように中心差分を用いることが望ましい。

(6) 曲げ変形の影響および簡便法に対する考察

偏微分方程式 (1) が解析的に解き難いのは曲げ変形

の項 $\partial^2 \{EI(\partial^2 y / \partial x^2)\} / \partial x^2$ があるためで、かりにこの影響が小さければ地盤力をバネで置換するなど種々の簡便法が考えられる。そこで、この影響量を検討することにより、これを無視することによって生じる誤差の程度を推定し、略算法の可能性を論じよう。

曲げ振動は式 (1) で表わされるが、以下簡単のため、 $EI = \text{const.}$ としてつぎの形に書くこととする。

$$EIy_x^{IV} + mA y_{tt} + Cy_t + KBy = -mAU_{tt} \dots (7)$$

さて、曲げの影響を論ずるため、今回の解析結果、および、略算法を用いた場合の力の平衡図を描くと、図-12～14 となる。

図-12 は今回のアナンコンによる解析結果で、物部式との比較を容易にするため、物部式とほぼ同じ大きさの曲げモーメントを生じた地震動解析、 $f = 3.5 \text{ c/s}$, $u \omega^2 = 250 \text{ gal}$, く形分布のものを使用した。変位の最大時における力のつりあいを考えると、粘性抵抗は変位に対し位

相が 90° 進み、地震力は共振状態で位相が 90° 遅れているので、内力 EIy_x^{IV} 、慣性力 mAy_{tt} 、地盤反力 KBy の 3 力で平衡を保つことになる。したがって慣性力と反力は解析結果の変位によって計算し、内力はその差として計算した。

さて、曲げ変形を無視することは、 $EI = \infty$ とし、変位をロッキングだけとして解くことで、内力とは無関係に

慣性力と地盤反力のつりあい条件から不動点、固有値などが求まる。内力は慣性力と地盤反力の差として受動的に求まる。 mA を一定とし、反力係数 K が深さに比例するとして、曲げを無視した場合の動的平衡を定性的に示したのが図-13 である。反力図は 2 次曲線となり、慣性力図は直線形となる。

さらに、慣性力も無視して静的に解いた結果が図-14 で、いわゆる物部式として下部構造応力計算の定説となっているものである。変位がロッキングのみで、反力係数が深さに比例する結果、2 次曲線反力を生じたのは周知のとおりである。図-12～14 をもとにして、曲げの影響を考察すると下記のとおりである。

a) まず物部式による変位、反力、曲げモーメントは図-14 の y_R , p , m_p で示される（ただ

図-12 アナンコンによる解析結果

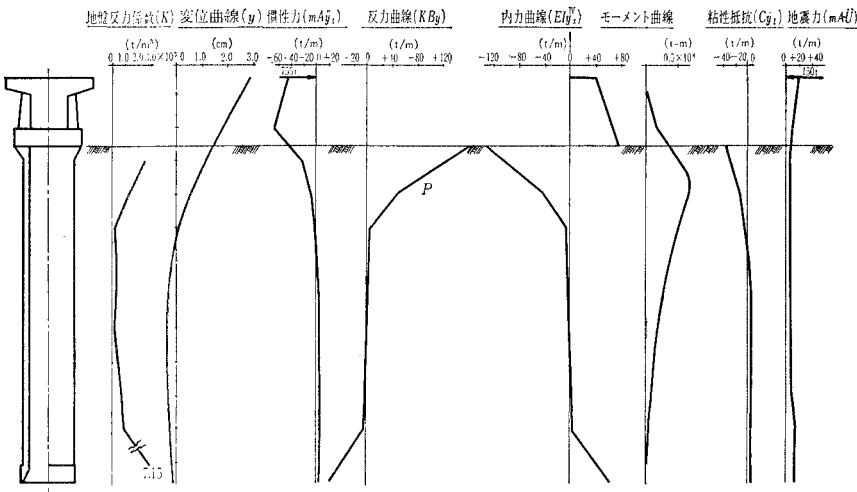


図-13 曲げ変形を無視した時の動的平衡図

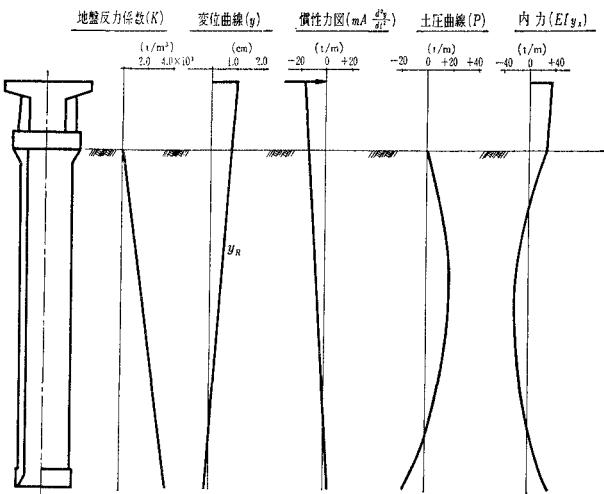
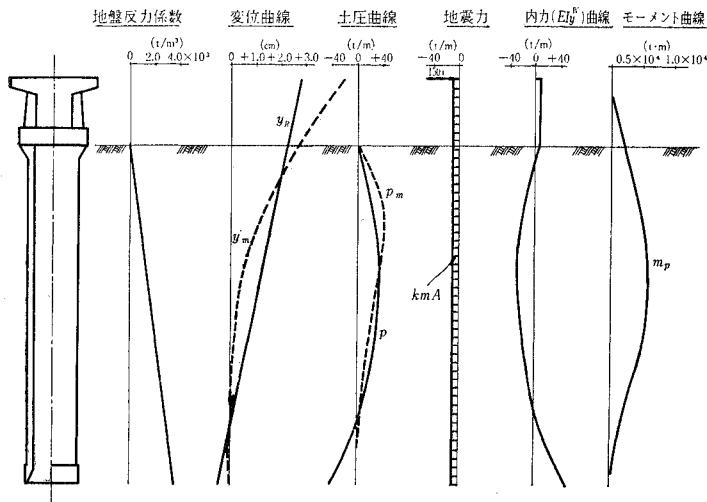


図-14 曲げ変形を無視した静的解法(物部解法)とその修正値



し変位の絶対量は不明)。しかるに、 EI は有限であるので曲げモーメント m_p に対応する曲げ変形を生ずる。 $EIy_{xx} = -m_p$ を積分し、便宜上反力 0 の点と、井筒底の変位とを 0 として積分定数を決め、求めた変位が y_m である。 y_R が y_m に修正されれば、反力係数はもとのままとしても、反力 p は当然変わる。これを p_m とする。反力の修正は曲げモーメント m_p の修正を必要とし、かくして曲げモーメント → 変形 → 反力 → 曲げモーメントと修正は無限に続き、結局曲げを考慮した式

$$EIy_{xx} + KBy = kma (k \text{ は地震係数}) \dots \dots (8)$$

の解に収束する。この式を解き、その結果を利用してエネルギー法で解いたものに、後藤尚男氏の振動解析法³⁾がある。それはさておき、図-14 の y_R と y_m 、 p と p_m の差異は、変形を無視したときの誤差の大きさを示唆する。

b) アナコン解析による反力 p (図-12) はさらにモードが異なる。これは前述の曲げ変形を考慮したための当然の結果でもあるが、いま一つの原因是、上部砂層の大きい反力係数をそのまま反映させた結果である。 p が一部ランキン受働土圧を越えているのは不合理で修正を要するが、これらの修正をも含めて、地質条件を自由に考慮できるのも、本解法の特長であり、今後の展開に期待できる理由でもある。また、上部砂層、中間粘土層、下部砂礫層という地層構成は、深い冲積層の典型的地層で、この意味では今回の解析の方が、物部式的な一様地質の仮定よりかえって一般性があるともいえよう。

c) さらに別の角度から曲げ変形の影響を論ずるために、変形を曲げ変形 y_M とロッキング変形 y_R とに分けて

考えよう。これをモデル化して示したのが図-15 で、実変形を y とし、不動点 F でこれに接する線 y_R を引けば、 y_R はロッキング変形を表わし、 y_R 線と y 線の距離 y_M は曲げ変形を表わすことになる。アナコン解、物部式の修正値などの変位曲線を、この考え方で y_M と y_R に分けてみると、 y_M はきわめて大きく、どうてい無視し難いことがわかる。

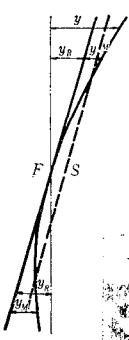
d) しかも、なお、 y_R については図-15 の S 線のような直線変位で代用することも考えられる。この場合の難点は、 S 線は実変位とは全く別の架空の変位であるため、地盤反力係数との関連が取れないことである。したが

って、井筒の振動計算に必要な平均反力係数は地質調査のみでは決まらず、井筒の剛度との関連において決まるここと、極論すれば、井筒変位の計算が終ってからでなければ計算に必要な K 値が決まらないという矛盾を生ずる。結局、 y_M が意外に大きく、変形の大部分が y_M からなっている事実は、変位を直線とみなすことの無理を示し、 y_M の特に小さい短い井筒や剛度の大きい井筒以外は曲げ変形を無視することは適当でないと考えられる。

e) 力の平衡に着目して、図-12 と図-13 を比較すると、曲げ変形を無視することにより、慣性力は井筒頭部に集中した形から井筒全体に直線状に分散する形となり、反力図の最大部は大きく下方に移動する。振動性状に対しては地表付近の影響が特に大きいことを考えると、上記外力の分布形状の変化は振動性状にかなり大きく影響するものと思われる。

f) 動的な曲げ変形を静的に推定する方法は、図-12 の mAy_{tt} を無視するか、または、これと等価な集中荷重 H で代用して解くことである。しかしながら、 H の大きさは従来便宜的に考えられている上部工質量に地震係数を掛けた数値とは全く異なり、上部の慣性力、すなわち、上部工質量をも含めた mAy_{tt} の面積に等価な横力となるはずで、これは厳密には変位量や振動数が決まらねば求まらない数値である。しかも慣性力 mAy_{tt} は地震係数によって決めた数字とは大きさも全く異なり、分布形状も全く違うことは、図-12 の $mA\ddot{U}$ と比較すれば明らかであり、土木研究所でも地震応答動的係数として 6 倍近くまで認めている倍率である。したがって、この方法は H の仮定が技術的に困難であるだけでなく、かりに大きさだけは見出したとしても、その分布形状の違いは依然として大きな誤差の原因となることが考えられる。

図-15



g) 図-12 から推定すると、振動に関係しているのは地表付近が大部分で、反力 KBy の重心点付近を固定点として片持ばかりとしての解法が可能のように思われる。しかしながら、一般に杭に対して考えられている仮想固定点の位置 $B^{-1} = (KB/4EI)^{-0.25}$ を使って本井筒に対し計算すると、約 20 m の深さとなり、全く使用できない。したがって、井筒に対し固定点をどのように仮定するかは今後の問題であるが、本例で考えられるかぎりでは、不動点、傾斜の不变点、反力の重心位置などが全くべつべつの位置にあるので、この解法に対する見とおしあわめて悲観的である。

以上総合すると、曲げを無視したとき、曲げを静的に考えた場合、いずれも、誤差を生ずる可能性がきわめて大きいので、現段階としては適当な簡便法は考えられず、したがって、曲げ振動方程式を仮定も簡略化も用いずにそのまま解くことができる方法としてアナコンによる解法を推奨する。

5. 結論

以上を要約するとつぎのとおりである。

(1) 従来解析不可能として種々の略算法が考えられていた橋梁下部構造の振動解析に対し、アナコンを使用することによって厳密解を得た。その結果は同時に実施した実験結果ともよく符合し、その妥当性を実証された。

(2) 本解法を地震動に適用したところ、従来の静的解法による解析値の数倍に達する曲げモーメント発生が予想されたことは、きわめて重大である。その結果の重大性にかんがみ、本方法をさらに展開し、信頼性を再確認することは目下の急務である。一方、その異状な曲げモーメントは、共振点の近傍でのみ発生し、しかも、その数値に粘性抵抗の値が大きく影響するなどの事実は、振動を無視して地震時の応力を論ずるわけにはいかないことを示す。

(3) 深い基礎では曲げ変形の影響が特に大きいこと、しかも、静的な曲げで動的な曲げを推定するのはきわめて困難であり、かつ、かなり大きな誤差が入る危険が多いので、現段階では適当な略算法を考えることは困難で、したがって、仮定も簡略化も用いずに曲げ振動方程式をそのまま解くことができる本解法を推奨する。

(4) 本解法が厳密解という意味において方法論的な問題点がないとすれば、今後の問題は諸定数の決定とい

う点にしばられるであろう。すなわち、 K 、 C などの値を従来の N -値、 qu -値などとの関連において求めるか、別途に簡易な試験方法を考案するかが今後の課題であろう。特に粘性係数については、局部的な値が系全体の減衰におよぼす影響度が不明で、この問題を解くことが、常数決定の前提として重要、かつ、困難な問題となるであろう。

(5) その他、土の乾性摩擦、塑性変形、空気中の粘性抵抗、底面反力、上部工の縦振動の影響など今後の課題は山積されている。一方、このような条件を比較的容易に導入できるのも、この方法の魅力でもあり、将来に期待できるゆえんでもあろう。

以上、今回実施した解析と実験の概要、ならびに、結論を述べた。最後に、本実験、および、解析を実施するにあたり種々ご指導をいただいた建設省土木研究所の吉田、栗林、足立ほか各技官の方々、名古屋大学成岡教授ほか研究室の方々に感謝の意を表するとともに、ご協力をいただいた白石基礎工事(株)、日立電子(株)に謝意を表するものである。

参考文献

- 1) 土木研究所：新潟地震調査報告、土木研究所報告 125 号、昭 40.6.
- 2) 成岡昌夫・中川建治：鋼製煙突の地震強度に対する一検討、建築学会論文報告集、78 号、昭 37.10, pp. 7~12, および、90 号、昭 38.9, pp. 8~12.
- 3) 後藤尚男：橋梁下部構造の振動性状について、土木学会誌、38-4、昭 28.4, pp. 142~147.
- 4) Fifer S.: Analogue Computation, 1961, McGraw Hill.
(1966.7.27・受付)

付記

なお、土木学会論文集第 131 号(昭 41.7)に発表された後藤尚男・亀田弘行両氏の解法が、一見、本論文の解法と類似している感があるため、この点について付言しよう。後藤・亀田両氏の解法は、地盤反力をブロックごとのバネに置換して解く点は本解法と類似しているが、杭の剛性を総計して杭頭変位に対する弾性抵抗に置換し、質量および粘性抵抗も等価な値として杭頭部に集中させ、一自由度の振動系として解いたもので、質量、粘弹性抵抗などすべてが系全体に分布している多自由度系の振動として多元連立常微分方程式を解いた今回の方法とは本質的に全く異なる解法である。したがって、前記の解法は質量などが分散している構造物には、この解法の適用が困難であるが、質量などの変化を自由に消化できる今回の方法とは具体的に相違する点と考える。