

開水路中のスルースゲートの振動に関する基礎的研究

A FUNDAMENTAL STUDY OF THE VIBRATION PHENOMENA IN A SLUICE GATE

荻原 国 宏*

By Kunihiro Ogihara

1. はじめに

ここで扱う振動現象は、開水路中に設置されるスルースゲートに発生する振動である。しかし開水路に作られるスルースゲートについても、その用途および機能によって種々なタイプのものが考えられる。特にここで対象としているのは、ゲート上部よりの越流する流れと、ゲート下部より流出する流れをともなうタイプのスルースゲートである。この種のゲートについては Eduard Naudasher¹⁾ 氏の実験および瀬田川の洗ぜき²⁾ の例がある。いずれの場合もかなり激しい振動が発生することが報告されている。筆者はそのような現象に対してごく基本的な問題より解明すべく以下のような実験および解析を行なったものである。

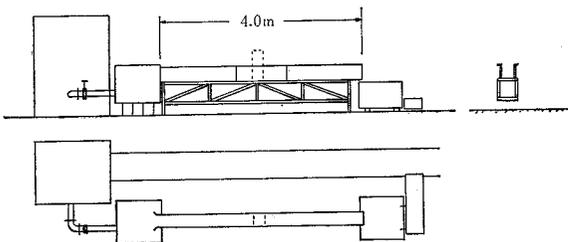
このような振動現象は、いわゆる水力弾性 (Hydroelasticity)³⁾ といわれる現象に属し、特に流れと構造物の相互作用によって生ずる Flow induced Vibration⁴⁾ と呼ばれているものの一つと考えられる。

2. 実験装置および実験方法

実験装置は図-1のような長さ 4 m、断面 40 cm×30 cm の長方形木製水路で、水路中央部にゲート本体および板バネを設置できるようになっている。ゲート部は図-2 のように橋脚部に一門のゲートが設置されており、その上部は板バネと連結棒によってつながっている。したがって、ゲートと板バネによって一質点系の振動系が作られている。

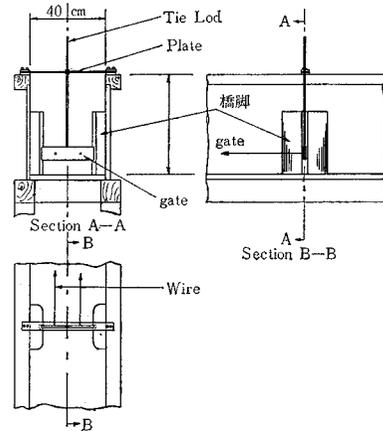
本来はゲートと橋脚部における摩擦力が大きく振動現

図-1 実験水路一般図



象に影響を与えているのであるが、振動時に働くクーロンダンピングを把握できない現時点で、その影響をも考慮に入れて実験を行なうことは現象をよりいっそう複雑化するので、ここではクーロンダンピングができる

図-2 小型スルースゲート
ゲート本体 板バネ



だけ少なく、粘性減衰力のほうが大きい状況において実験を行なった。そのためにゲートは図-2 でもわかるごとく、ワイヤで上流側に引張られて、上下方向に自由な運動ができるようにセットされている。振動記録は、板バネに接着された Strain Gauge を通して電氣的に Strain-Meter および電磁オシログラフによってとられた。

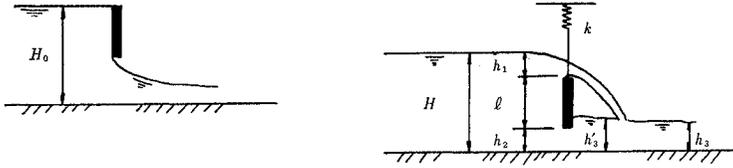
つぎに実験状況であるが、基本的な問題をめざす点よりゲートは長方形ゲートリップをもつものに主体をおき、ゲートリップの影響については引続き行なう予定にしてある。流れの状況は図-3 に示されるごとく、上流側水深 H 、下流側水深 h_2 、ゲート開度 h_2 (または h_1) によって特徴づけられる。振動問題を扱う場合には、さらに板バネの定数 k をも考慮に入れなければならない。これら各種のファクターを変えて各状況において発生してくる振動を解析分類するのが実験の主眼点である。このために実験として以下のものを行なった。

(1) 発生振動の大きさとゲートの位置および流況との関係

(2) ゲートに作用している平均的な外力と流況との

* 正会員 東洋大学助教授 工学部土木工学科

図-3



関係

(3) ゲート上面, 下面に働いている圧力

(4) ゲート付近の水路床の圧力分布について

これらの測定結果と振動との関連についてつぎの実験結果のところでのべよう。

3. 実験結果

振動に対する実験に先だってゲートの大きさおよび質量, 板バネ係数, 系の固有振動数および粘性減衰力(静水中の値)についての値を求めておいた³⁾。その結果は表-1である。

表-1

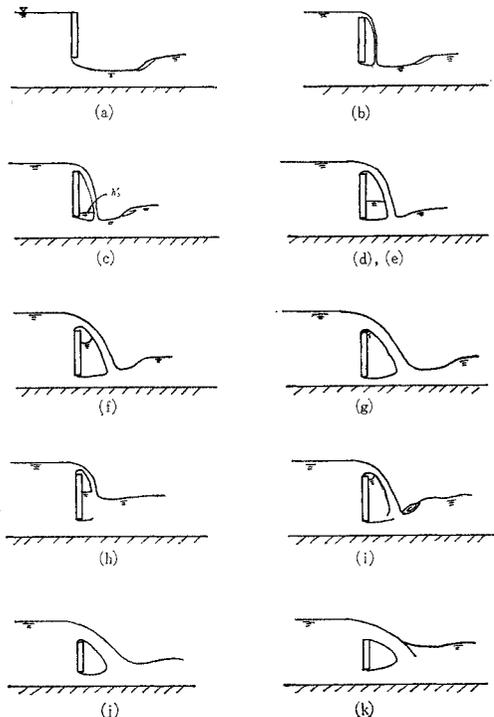
ゲート本体	幅 20.0 cm, 高さ 5.0 cm, 厚さ 1.2 cm, 質量 968 g
板バネ係数	No. 1 $k=3450$ g/cm, No. 2 $k=15610$ g/cm
系の固有振動数および粘性減衰係数	No. 1 $n=58.6$ 1/sec, $r=2.72$ 1/sec No. 2 $n=126.0$ 1/sec, $r=4.66$ 1/sec

(n, r については後章参照)

(1) 流れの状況と振動記録

振動実験中にゲートの各位置において現われる流れの状況は, 当然のこととして下流側のせき上げのあるかな

図-4



いかによって異なってくるわけである。その状況は図-4に表わした一連のスケッチ図によって示され, 図中(a)より(g)までは下流側をせき上げない時の流れで, ゲートを徐々に下げて行った時に生ずる流れの状況を示してある。

また(h), (i), (j), (k)は下流側をせき上げた時の流況である。

(a)は自由流出, (b), (c)はゲート越流水がはく離していない時, (d), (e), (f)は上部で越流水がはく離している場合を示し, (g)はゲート上端に若干の気泡が残っている場合である。また(i)は下流側の跳水がゲート付近に達している場合である。さらに(j), (k)はゲート高に比して上流側水深が大きい場合である。これらの流れの各状況にともなって発生してくる振動は異なり, 代表的なものにわけるとつぎのように分類できる。

① 越流水のナップの落下点がゲート下端部に近く, ゲート下端部の受ける圧力変動が越流水の影響を受けるような場合には, ゲートの動きが越流水の変動を起し, その越流水の変動がゲートの動きを左右するというような自励的な振動が発生してくる。この種の振動では越流水のナップ(nap)が非常に激しく振動しているのがわかる。流れは(c)のような場合に多い。

② 越流水の量がさらに多くなってその影響が水路床まで達する場合に発生するもので, (f)のごとき流況において生ずる。振動の発生サイクルは①と同じである。

③ 下流側の跳水がゲート付近に達している場合には, その進退にともなって起こる振動が認められる。

図-5 代表的振動記録例

(2), (3)は他のものの1/3に gain をおとしてある

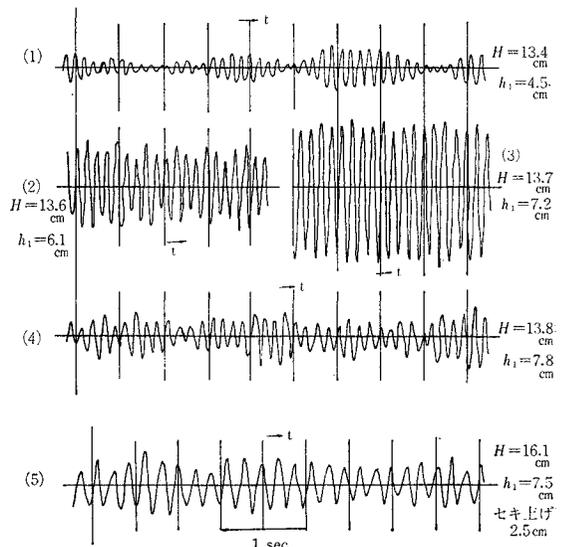
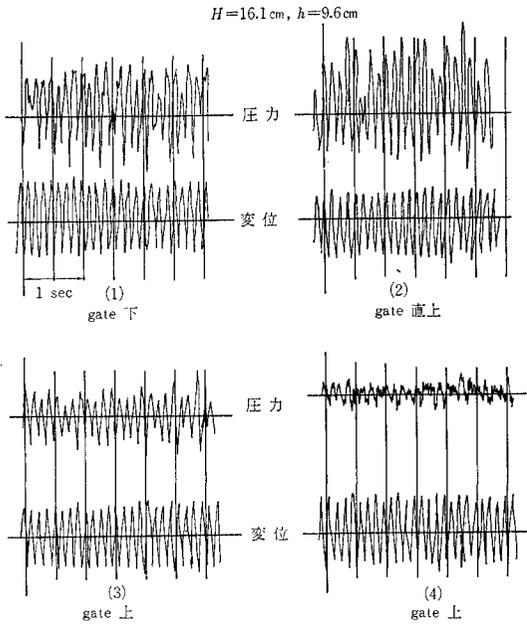


図-6

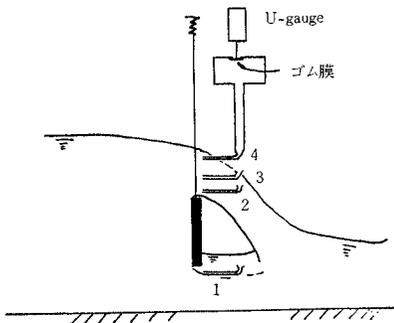


(i) の場合である。

④ 下流側をせき上げて (j), (k) のごとき流況になると振動自体はあまり大きくないが振動系には無関係な、むしろ流水およびゲート形状に支配される強制振動タイプの振動が発生してくる。

以上のような各種の振動状態が認められるが、それらの代表的なものが 図-5, 6 に示してある。図-5 の記録例は上流側水深 $H_0=12.0$ cm に相当するものであって (1) より (4) までは下流側のせき上げのない場合で、番号の増す順にしたがってゲートは下っている。(5) は下流側をせき上げてやった場合である。このうち (1)~(4) までは前記 ①, ② に相当する振動で、(5) は ④ に相当するものと考えられる。図-6 はゲートの振動変位とゲート付近を流れる水流の変動との関係を示すものであり、その関連位置は 図-7 中の番号に一致している。なお水流の変動は、日野幹雄氏考案の Total head tube によった。

図-7



(2) 振動の特性

ゲート部の流れを種々と変えてやることによって(1)のべたごとく各種の振動が発生してくる。ここではそれらの振動に影響している流量、下流側せき上げ高、系の固有振動について代表的な例によって実験結果をまとめておく。

a) 下流側せき上げ高および系の固有振動との関係

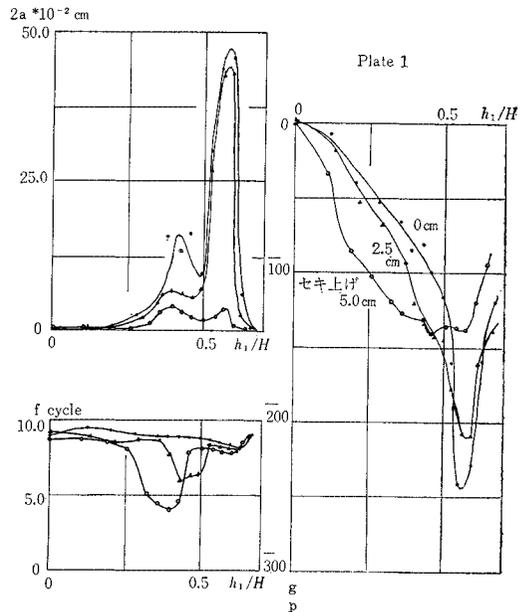
板バネ No. 1 および No. 2 を使用し、上流側水深 $H_0=14.0$ cm の場合で下流側水深を 0 cm, 2.5 cm, 5.0 cm (Sill の高さ) にした時の振動特性(振幅、卓越周波数)とゲートに働いている平均外力を越流水深 h_1 との関係によって整理したのが 図-8, 9 である。これらの図よりつぎの事柄が判明する。

① 下流側のせき上げの影響は、振幅に対しては小さくするように働くとともに、卓越周波数においては、その値を固有周波数より小さい値にする傾向を示す。すなわち、せき上げのない場合にはほぼ一定の周波数であるのに比し、せき上げのある場合にはそれより低い周波数をもつ振動が現われてくる。これは先に (1) でのべた ①, ② の振動に前者が相当し、④ の振動が後者に相当していると考えられる。これは 図-5, 6 の振動記録と合わせて考えればよくわかる。

② せき上げた場合の振動は板バネ No. 1, No. 2 の両方において、ほぼ同じ周波数をもっている点より、この種の振動は振動系に関係なく流れとゲート形状より生ずる後流による強制振動であると考えられる。

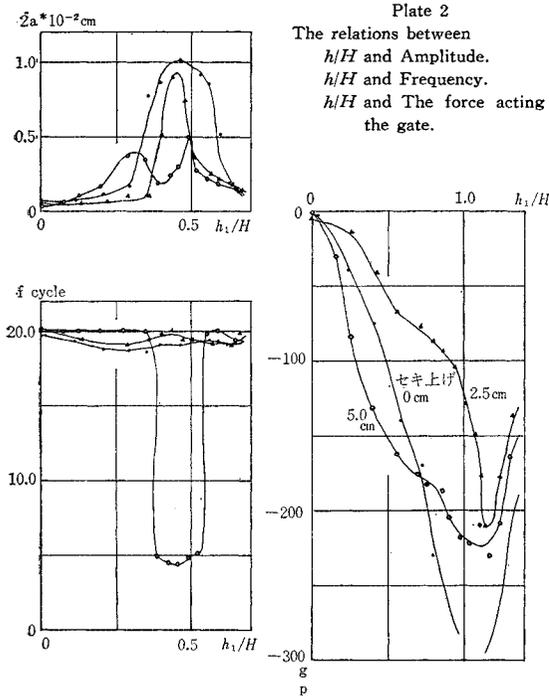
③ せき上げのない場合の振動が最も大きくなる点は

図-8



The relations between h_1/H and Amplitude.
 h_1/H and Frequency.
 h_1/H and The Force acting on a gate.

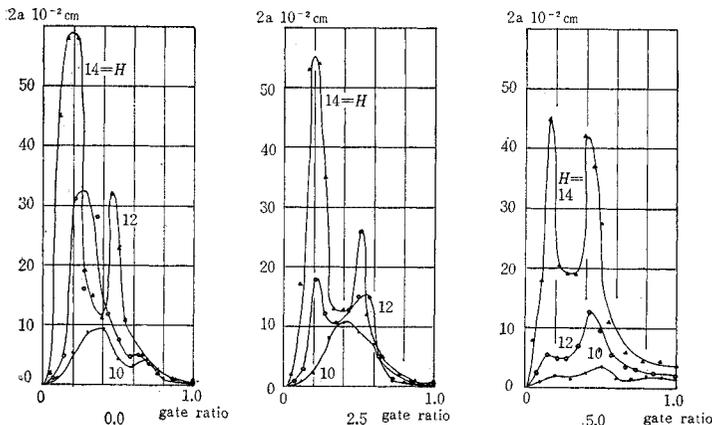
図-9



板パネ No. 1, No. 2 で異なっていることは注目し、この振動が振動系自体の影響を受けるものであると考えられる。

b) 流量の多少による振動の相違 流量の多少ということは、越流水深の相違となって表われるので、結局上流側水深 H の違いとなる。そこで H の影響をみるためにゲートの開度(全移動距離を1とした時の割合)で示すと図-10のごとくなる。これはせき上げごとに整理してあるが、いずれの場合も H の増加にしたがって振幅も全般的に増す傾向を示している。このことは流れによって振動系に供給されるエネルギーが流量の増加にともなって大きくなると考えらるべき。なお下

図-10 (振幅～流量)



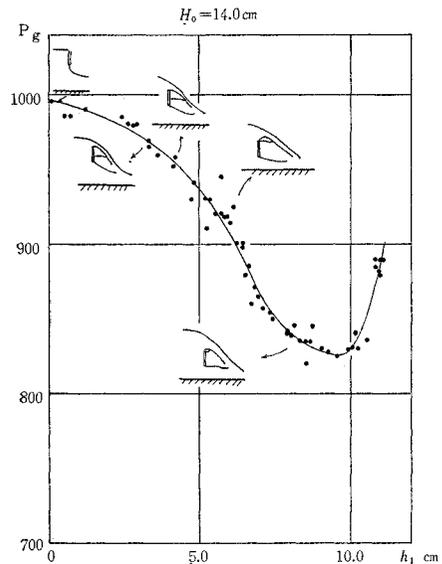
流側のせき上げによる影響は振動の振幅を小さくするように働いている。

(3) ゲートに働く静的外力および水路床圧力分布

振動の特性については前記のごとくなっているが、ゲートに働く静的外力および振動の大きくなる状況での水路床の圧力分布はどのようになっているかについて興味ある事柄なのでここに整理しておく。

a) ゲートに働く静的外力とゲート上、下面に働く水圧との関係 ゲートに働いている静的な力の変化については、先の図-8, 9中の $P-h_1/H$ 曲線として描かれているが、ここでは特に $H_0=14.0$ cm の場合の曲線をバネばかりで測定したものを示すと図-11のようになる。一方、同一の場合にゲート上面および下面に働く圧力は図-12のごとくなっており図中の P_u および P_L

図-11



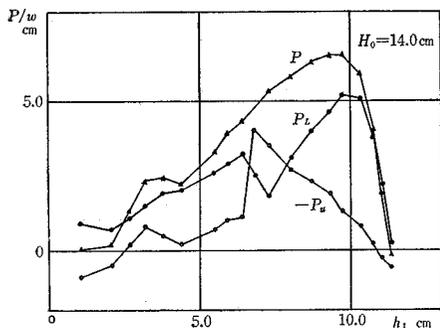
(The force acting the gate.)

は、それぞれゲート上、下面の圧力を示し、 P は上向きを(+)とした場合のそれらの合力を示している。この P の曲線と図-11のそれとはよく似た傾向を示しており、圧力の合力に受圧面積(24.0 cm²)を乗ずることによって、その絶対値もほぼ等しいことがわかる。またゲート下面の圧力をゲート後側の水深 h_3' (図-3参照)とゲートの開き h_2 よりつぎのように書くことが考えられる。

$$P_L = w(h_3' - h_2) \dots\dots(1)$$

この式の由来はゲート開度がある程度大きい時に、流れの影響がゲート下

図-12



P_L は (+), P_u は (-) の値であるが gate に対して向上きに働く力を (+) として図示したので $-P_u$ として書き込んである。

表-2

h_1 (cm)	P_L/w (実測) (cm)	P_L/w (計算) (cm)
2.5	2.4	2.0
6.0	3.8	4.0
7.0	4.4	4.6

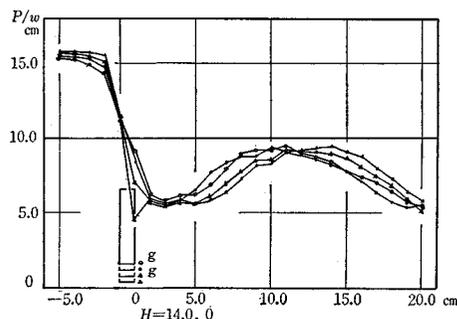
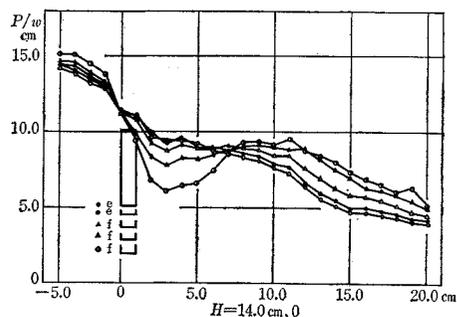
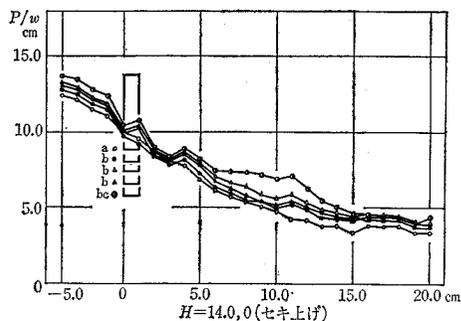
面に直接およばない状態にあり、ゲート下面の受ける圧力は流出水面とゲート下面との間にたまった水の静水圧分であると考えて導かれている。

実測値と式(1)による計算値の比較を表-2に示しておく。

b) 水路床圧力分布 振動が大きくなるのはゲート上部よりの越流量がかなり大きくなり、ゲート下部より流出する流れをさえぎるようになってからである点に注目して、水路床圧力分布について調べてみた代表例 ($H_0 = 14.0$ cm でせき上げのない場合) を 図-13 の一連の図に示した。図はゲートが下がって行く各状態でのゲート位置と合わせて示してあり、流れの状況は a, b, c, e, f, g として 図-4 の流況図の記号に一致させてある。これより水路床に越流水の影響が表われるのは e, f, g となってからであり、a, b, c では表われていない。また f では a, b, c に比してゲートの動きによるゲート後部の水路床圧力変動の割合が大きくなっていることがわかる。さらに進んで g の状況ではそれが小さくなっている。これらの事実はちょうど f の状態で振動が大きいことと関連して考えると興味ある事実が浮かんでくる。すなわち、ゲートの動きによって生ずるゲート後流部(ここではゲート後部の水路床の圧力)の圧力変化の割合の大きい場合に振動が大きくなる点である。したがって (f) のような振動に対しては振動外力としてゲート後流部の圧力変動を考えに入れることが考えられ、それは当然ゲートの動きに左右されるタイプのものである。

以上、実験よりわかった事実を上げてきたが、これらの振動現象に対して若干の解析を行なってみる。

図-13



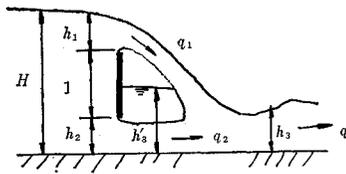
4. 実験結果に対する解析

自励的な振動の原因は種々あるが、それは、その流れの状況によって変わってくるものである。本論文では、これらの振動のうち、特に流況図 (f) について検討したわけである。当然、筆者の手法および解析方法があてはまらないような流況での振動もありうるわけである。本論文中でもそれについてのべてある。

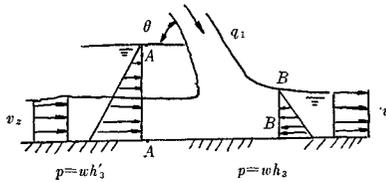
(1) 流量とゲート下面に働く圧力

さて実験結果のところでのべたようにゲートの運動はゲート上、下面の受ける圧力変動に左右されている点に注目して、ここではゲート下面の受ける圧力と後流部水深 h_2' の関係について調べる。流れの状態を 図-14 のごとく考えて、(a) の h_3' と流量 q_1, q_2, q および水深 h_3 との関係を求める。状態をもっと模式化して考え (b) 図のような流れを考えた運動量方程式を作り h_2' について解くと、

図-14



(a)



(b)

$$h_3'^2 = h_3^2 - \frac{2\alpha q_1 v_1}{Bg} + \frac{2}{B^2 g} \left(\frac{q^2}{h_3} - \frac{q_2^2}{h_2} \right) \dots (2)$$

ただし、ここでBはゲート幅(水路幅)右辺第2項は落水水の水平方向の運動量成分である。それが無視できる場合には次式となる。

$$h_3'^2 = h_3^2 + \frac{2}{B^2 g} \left(\frac{q^2}{h_3} - \frac{q_2^2}{h_2} \right) \dots (3)$$

$$q = q_1 + q_2$$

ここで、実験値 h_3, q_1, q_2, q, h_2 を使用して h_3' を求め、実測の値との比を求めたところ、計算値のほうが実測値より $H_0=14\text{ cm}$ の場合で 1.53 倍、 $H_0=12.0\text{ cm}$ の場合で 1.57 倍大きく出ている。

この差は結局、落水水の水平方向運動量の差が入ってきたものと考えられる。したがって式(2)によって計算すべきものであるが、 α, v_1 等の値を推定しにくいので、以下では式(3)に β なる係数 $\left\{ \beta = \left(\frac{1}{1.55} \right)^2 \right\}$ をかけた式を使うことにする。

つぎに h_3' の変動とゲート変位 z との関係について求めてみよう。ゲート下面に働く圧力変動による振動外力は式(1)より、

$$P_L = \Delta P_L B d_0 = W B d_0 \Delta (h_3' - h_2) = W B d_0 (\Delta h_3' - \Delta h_2) \dots (4)$$

さらに $\Delta h_3'$ の値として式(3)の h_3' の微小変化量をとることにする。 $h_1 = \bar{h}_1, h_2 = \bar{h}_2, h_3 = \bar{h}_3, q_1 = \bar{q}_1, q_2 = \bar{q}_2$ の状態とゲートが z だけ変化した状態 $h_1 = \bar{h}_1 + z, h_2 = \bar{h}_2 - z, h_3 = \bar{h}_3, h_3' = \bar{h}_3' + \Delta h_3', q_1 = \bar{q}_1 + \Delta q_1, q_2 = \bar{q}_2 + \Delta q_2$ との状態の差を式(3)によって求めると、

$$2 \bar{h}_3 \Delta h_3' = \frac{2\beta}{B^2 g} \left[\frac{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \Delta q_1 + \Delta q_2)^2 - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2}{\bar{h}_3} - \frac{(\bar{q}_2 + \Delta q_2)^2}{\bar{h}_2 - z} + \frac{\bar{q}_2^2}{\bar{h}_2} \right] \dots (5)$$

ただし、2次以上の高次項は無視する。さらに流量に

関する式

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_1 &= c_1' B \bar{h}_1^{3/2}, \bar{q}_1 + \Delta q_1 = c_1' B (\bar{h}_1 + z)^{3/2} \\ \bar{q}_2 &= c_3' B \sqrt{H} \bar{h}_2, \bar{q}_2 + \Delta q_2 = c_3' B \sqrt{H} (\bar{h}_2 - z) \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

を使用して式(5)を書きなおすと、

$$\Delta h_3' = \frac{\beta z}{g \bar{h}_3' \bar{h}_3} [3 c_1'^2 \bar{h}_1^2 + 3 c_1' c_3' \sqrt{H} \bar{h}_2 \bar{h}_1^{1/2} - 2 c_3'^2 \bar{h}_1^{3/2} - 2 c_3'^2 H \bar{h}_2 + c_3'^2 H \bar{h}_3] = M_0 z \dots (7)$$

ただし、 M_0 は、

$$M_0 = \frac{\beta}{g} \left(\frac{H}{\bar{h}_3'} \right) \left(\frac{H}{\bar{h}_3} \right) \left[3 c_1'^2 \left(\frac{\bar{h}_1}{H} \right)^2 - 2 c_1' c_3' \left(\frac{\bar{h}_1}{H} \right)^{3/2} + 3 c_1' c_3' \left(\frac{\bar{h}_2}{H} \right) \left(\frac{\bar{h}_1}{H} \right)^{1/2} - 2 c_3'^2 \left(\frac{\bar{h}_2}{H} \right) + c_3'^2 \left(\frac{\bar{h}_3}{H} \right) \right] \dots (8)$$

したがって式(4)は $\Delta h_2 = -z$ なる事実を考慮して書くと次式となる。

$$P_L = W B d_0 (M_0 + 1) z \dots (9)$$

つぎに P_L がどのような値をとるか実験値および $c_1' = \sqrt{2g} c_1, c_3' = \sqrt{2g} c_3, c_1 = 0.54, c_3 = 0.8$ を使って h_1/H と $W B d_0 (M_0 + 1)$ との関係を探ったところ、 $H_0 = 14.0\text{ cm}, H_0 = 12.0\text{ cm}$ の各場合について h_1/H が 0.25 付近を境として $W B d_0 (M_0 + 1)$ の値は (-) より (+) に変化することがわかった。すなわち $h_1/H < 0.25$ では $z > 0$ のとき $P_L < 0$ となりゲートに下向きに力が働き、 $h_1/H > 0.25$ では $z > 0$ のときに $P_L > 0$ となり上向きの力が働くことを示している。これをもっと要約すれば越流水の少ない時にはゲートに下向きの力、越流水が多い時には上向きの力が働くことを意味する。

(2) 振動外力に対する推論

振動外力としてはしばしば書いてきたように、ゲート上、下面の受ける圧力変動が主要因であると考えられ、ゲートの迎角等の影響は小さいものであると考える。そしてその圧力変動は、ゲートの動きにもなって生ずるものが大きく、流れ内部の乱流等によるものはそれに比して小さいと考える。

このような立場に立てば振動外力はゲートの動きにもなる圧力の変動部分であると考えられる。したがってゲート上下面に働く圧力をそれぞれ P_u, P_L とすれば振動外力として次式を得る。

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{dP_u}{dh_1} \Delta h_1 B d_0 = \frac{dP_u}{dh_1} B d_0 z \\ P_L &= -\frac{dP_L}{dh_1} \Delta h_1 B d_0 = -\frac{dP_L}{dh_1} B d_0 z \dots (10) \end{aligned}$$

P_L については前記(1)のような考え方をすれば式(9)となる。さらにゲート下面に働く力はゲートの動きによる変動の影響が越流水脈の変動となって落下したあとに圧力波となって伝わると考えると P_u, P_L では作用時間にずれがでてくる。その時間のずれは越流水の落下時間と圧力波の伝達時間の和に相当する。落下時間に

ついで自由落下時間に近似できると考えると、

$$t_0' = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{Kh_1 + l + c_c h_2} \dots\dots\dots(11)$$

$Kh_1 + l + c_c h_2$ は落下距離であり、 K 、 c_c はそれぞれ係数である。圧力波の伝達時間を t_1 とすれば、作用時間の遅れ（むだ時間） t_0 は、

$$t_0 = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{Kh_1 + l + c_c h_2} + t_1 \dots\dots\dots(12)$$

となる。したがって式 (10) はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} P_u &= \frac{dP_u}{dh_1} B d_0 z(t) \\ P_L &= \frac{dP_L}{dh_1} B d_0 z(t-t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

(3) 振動方程式

振動は一質点系の振動でクーロン ダンピングが無視できる場合と考えられるので、ゲート質量および付加質量を M 、 M' とし、板バネ定数 k 、粘性減衰係数 R とすれば次式のような振動方程式となる。

$$(M+M') \frac{d^2 z}{dt^2} + R \frac{dz}{dt} + kz = p'(z, t) \dots\dots(14)$$

座標系については 図-3 によっている。振動外力 $p'(z, t)$ については (2) での結果式(13) を使って式 (14) を書きなおすと次式となる。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2r \frac{dz}{dt} + n^2 z - n_1^2 z + \lambda z(t-t_0) = 0 \dots\dots(15)$$

ただし、

$$2r = \frac{R}{M+M'}, \quad n^2 = \frac{k}{M+M'}$$

$$n_1^2 = \left(\frac{dP_u}{dh_1} B d_0 \right) / (M+M'), \quad \lambda = \frac{B d_0}{M+M'} \left(\frac{dP_L}{dh_1} \right)$$

z は $z(t)$ を意味している。

さらに $\omega_n^2 = n^2 - n_1^2$ とおけば最終の振動方程式はむだ時間項を含む振動方程式 (16) となる⁹⁾。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2r \frac{dz}{dt} + \omega_n^2 z + \lambda z(t-t_0) = 0 \dots\dots(16)$$

(4) 振動方程式の解析

現象は振動方程式 (16) によって表わされることがわかったので、この方程式について、その特性を調べてみる。最初に特性方程式について検討し、さらに位相面- δ 法によってトラジエクトリを求めてみた。両方法による結果は全く一致している。

a) 振動の特性方程式 式 (16) で初期条件 $t=0$ 、 $z=\dot{z}(0)$ としてラプラス変換⁷⁾をとれば

$$z(s)[s^2 + 2rs + \omega_n^2 + \lambda e^{-t_0 s}] = \dot{z}(0) \dots\dots(17)$$

となる。

ただし、 s はラプラス変換のパラメーターである。したがって特性方程式は式 (18) で与えられる。

$$s^2 + 2rs + \omega_n^2 + \lambda e^{-t_0 s} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

この式の特性根を求めれば式 (16) は解けるわけであるが、式 (18) は無理方程式ゆえそれは困難である。そ

こで特性根として⁸⁾

$$s = \alpha + i\omega \dots\dots\dots(19)$$

を考え $\alpha > 0$ 、 $\alpha < 0$ となる場合の r 、 ω_n 、 t_0 、 λ 相互間の関係を求めてみる。 $\alpha > 0$ 、 $\alpha < 0$ の境界は $\alpha = 0$ によって決定されるので、 $s = i\omega$ を式 (18) に代入し、実部および虚部を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \omega_n^2 - \omega^2 + \lambda \cos \omega t_0 &= 0 \\ 2r\omega - \lambda \sin \omega t_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 λ 、 t_0 座標に ω をパラメーターとして曲線を描くと、その曲線が安定および不安定領域の境界になっているはずである。式 (20) を若干書きかえて各値を無次元化しておく。 $\omega = n \omega_n$ 、 $\omega_n t_0 = T_0$ 、 $A = \frac{\lambda}{2r\omega_n}$ 、 $\theta = nT_0$ として書きなおすと式 (21) となる。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\theta}{T_0} \right)^2 &= 1 + \frac{2r}{\omega_n} \cot \theta \\ A &= \frac{\theta}{T_0} \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

ここで、 $2r/\omega_n$ は振動系に固有のものである。 θ をパラメーターとして $\omega_n 2r = 13.0$ の場合について (T_0 、 A) 座標に曲線を求めると 図-15 のごとくなる。 $A > 0$ のときには $T_0 = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ で極小値 $A=1$ をとり、 $A < 0$ では $T_0 = -\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ で極大値 $A=-1$ をとっている。この曲線によって安定、不安定領域（特性根で $\alpha > 0$ 、 $\alpha < 0$ ）が決まり、図中黒塗りの部分が不安定領域である⁹⁾。なお $T_0 > 0$ の部分はむだ時間項を含む振動を表わすことになる。さて、われわれが現在対称としている現象は $A > 0$ 、 $T_0 > 0$ であるので 図-15 の第1象限に相当する。この領域で A が小さい値の部分で不安定となる条件は、

$$T_0 = \omega_n t_0 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

図-15

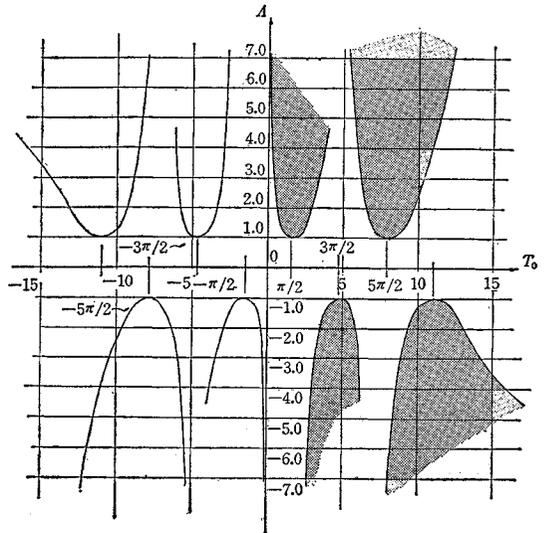
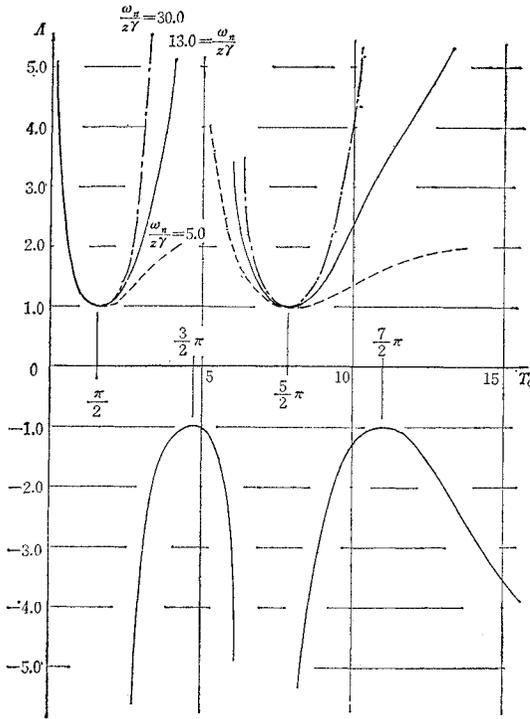


図-16



$$A \geq 1, \frac{\lambda}{2r\omega_n} \geq 1 \dots\dots\dots(22)$$

となる。

つぎに振動系の特性 $\omega_n/2r$ の値によってどのような特性があるかについて調べるために $\omega_n/2r=30.0, 13.0, 5.0$ の各場合を図に表わす 図-16 のようになる。この結果つぎのようなことが判明する。 $0 < T_0 < \pi/2$ までは $\omega_n/2r$ の値によって曲線はほとんど変化しないが、 $\pi/2 < T_0 < 3\pi/2$ では $\omega_n/2r$ の値が小さいほど不安定になりやすい。このことは ω_n の小さいほど（バネ定数が小さいほど）広い範囲で不安定になりやすく、また r の値が小さいほど不安定になりやすいことに一致する（このことは 図-16 中の縦軸 $A=\lambda/2r\omega_n$ に r の値が含まれている点に注意しなければならない）。

b) 位相面- δ 法¹⁰⁾による検討 振動方程式(16)に対するもう一つの検討方法として位相面- δ 法によってみた。この方法は図解法であるが相当複雑な振動系であっても、その操作がめんどうになるだけで解くことは可能である。トラジェクトリを書くとともに振動の収れん、発散の条件についても検討した。

式(16)において

$$v = \frac{1}{\omega_n} \frac{dz}{dt}, \quad \frac{dz^2}{dt^2} = \omega_n \frac{dv}{dt} = \omega_n^2 v \frac{dv}{dz}$$

の置換を行ない、さらに

$$\delta = \frac{1}{\omega_n^2} [2r\omega_n v + \lambda z(t-t_0)] \dots\dots\dots(23)$$

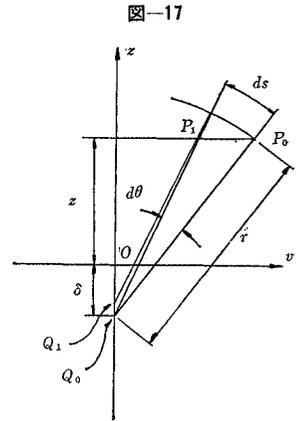
とおくことによって先の振動方程式(16)は次式となる。

$$v \frac{dv}{dz} + (z+\delta) = 0 \dots\dots\dots(24)$$

積分して

$$v^2 + (z+\delta)^2 = r^2 \dots\dots\dots(25)$$

という円の方程式になるが、この積分区間の間だけは、 δ としてはその直前の (v, z) の値によって式(23)より得られる値によって近似することにする。したがって 図-17 のように初期値 $P_0(v_0, z_0)$ より始まる現象を考えると、 P_0 の座標値 (z_0, v_0) を式(23)に代入して求まる δ を



z 軸上に (-) の向きに原点よりとり Q_0 点を決定し $\overline{Q_0 P_0} = r$ とする円を描き $d\theta$ の1ステップを求め P_1 点を決定する。つぎに P_1 の座標値を使って同じ手順をふめばつぎのステップが求まる。なお $d\theta$ と dt の関係は次式によって決定される。

$$dt = \frac{d\theta}{\omega_n} \dots\dots\dots(26)$$

δ を求める手順を図上で行なうためには 図-18 のように δ_z, δ_v の2つの直線を描いておくことによって容易になる。つぎにトラジェクトリの発散、収れん性を考えると 図-19 をみればわかるごとく、一つのステップで円の外側に向かう場合は発散性であり、内側に向かう場合は収れん性である。したがって

- $v > 0 \quad \delta > 0$ 収れん性, $\delta < 0$ 発散性
- $v < 0 \quad \delta > 0$ 発散性, $\delta < 0$ 収れん性

図-18

$$\delta = \frac{2r}{\omega_n} v + \frac{\lambda}{\omega_n^2} z(t+t_0) = \delta_v + \delta_z$$

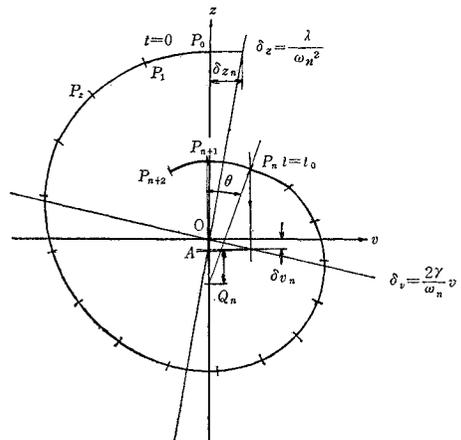
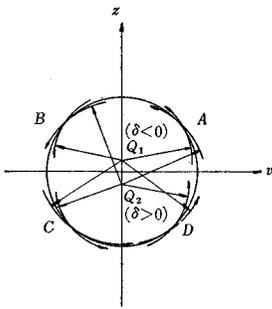


図-19



の関係があることがわかる。すなわちトラジェクトリが発散性であるためには少なくとも v と δ が常に異符号であることが必要である。ここでトラジェクトリ全体について検討することは、振動方程式自体を解くことに一致し、それは(1)のべたごとく非常にめんどうである。

そこで始めの状態でのトラジェクトリについて上記条件を検討する。まず $t=0$ で $z=z_0$ に保持されたものが放たれたと考えると $t < t_0$ までは振動方程式においてむだ時間の項は入ってこないはずである。したがってその解は、

$$z = z_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2} t)$$

$$v = \frac{\dot{z}}{\omega_n} = -z_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2} t - \varphi) \dots \dots (27)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_n)^2}}{\gamma/\omega_n}$$

さらに $t > t_0$ でのむだ時間項に相当する z, v は

$$z = z_0 e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} \cos[\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2}(t - t_0)]$$

$$v = -z_0 e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} \cos[\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2}(t - t_0) - \varphi] \dots (28)$$

となる。したがって $t > t_0$ の1周期での δ の値はつぎのごとくなる。

$$\delta = \frac{\lambda}{\omega_n^2} z(t - t_0) + \frac{2r}{\omega_n} v_t$$

$$= \frac{\lambda}{\omega_n^2} z_0 e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} \cos \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2}(t - t_0)$$

$$- \frac{2r}{\omega_n} z_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2} t - \varphi) \dots \dots (29)$$

さて振動が発散性となるためには先の条件を式(27),(29)に適用して、

$$-z_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2} t - \varphi) \geq 0$$

$$\frac{\lambda}{\omega_n^2} z_0 e^{\gamma t_0} e^{-\gamma t} \cos \sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2}(t - t_0)$$

$$- \frac{2r}{\omega_n} z_0 e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - \gamma^2} t - \varphi) \geq 0 \dots (30)$$

ここで $r \ll \omega_n$ とすれば $\varphi = \pi/2$ となり $z_0 e^{-\gamma t} > 0$ であることに注目すれば上式は式(31)となる。ただし、符号同順。

$$-\sin \omega_n t \geq 0$$

$$\frac{\lambda}{\omega_n^2} \frac{\omega_n}{2r} e^{\gamma t_0} \cos(\omega_n t - \omega_n t_0) - \sin \omega_n t \geq 0 \dots (31)$$

この条件は $\omega_n t_0$ の値によって異なってくるが、 $\omega_n t_0 = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ の場合には、

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_n^2}\right) e^{\gamma t_0} > \frac{2r}{\omega_n} \dots \dots (32)$$

ただし、 $\lambda > 0$

$\omega_n t_0 = -\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ のときには

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_n^2}\right) e^{\gamma t_0} < -\frac{2r}{\omega_n} \dots \dots (33)$$

ただし、 $\lambda < 0$

$\omega_n t_0$ がこの間の値をとる他の場合には一部発散性となる。ここで特に $e^{\gamma t_0} = 1.0$ と考えられる場合には先の特性方程式のところで求めた条件式(22)に全く一致していることがわかる。

では実際にトラジェクトリを書いてみよう。まずむだ時間項のない場合のトラジェクトリは振動方程式(16)よりわかるごとく減衰振動である(図-20)。

この減衰振動にむだ時間項が入った場合には $\frac{\lambda}{\omega_n^2} = \frac{2r}{\omega_n}$ で $\omega_n t_0 = \frac{5}{2}\pi$ の時は図-21, $\omega_n t_0 = 2\pi$ のときに

図-20

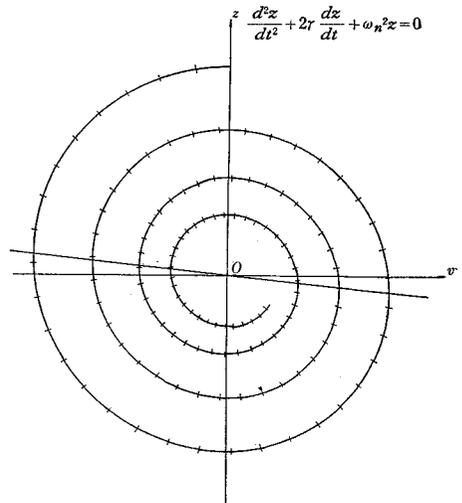
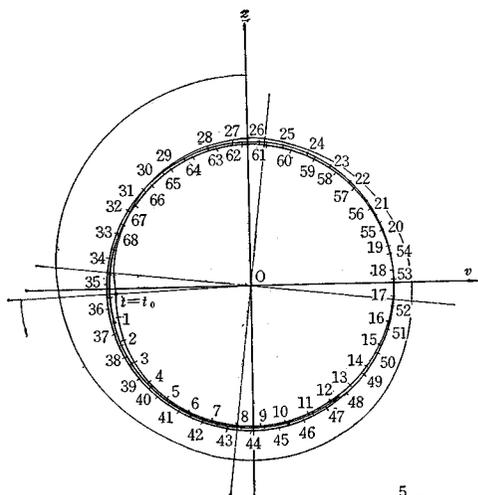


図-21



$$\omega_n t_0 = \frac{5}{2}\pi$$

$$\frac{\lambda}{\omega_n^2} = \frac{2r}{\omega_n}$$

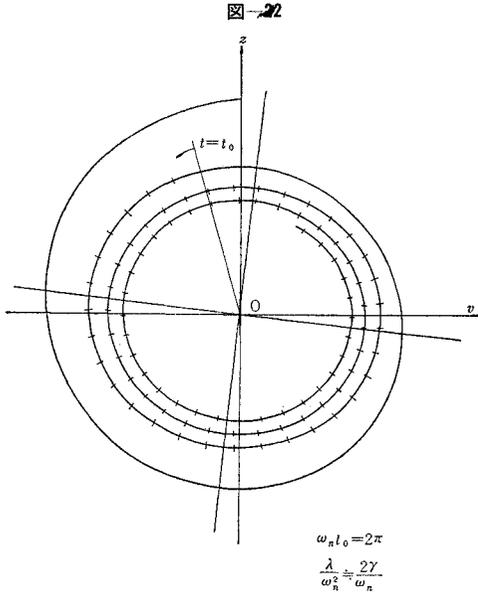


図-22

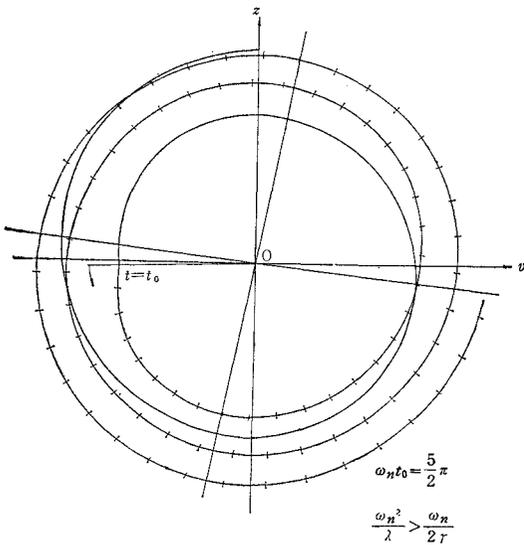


図-23

は 図-22 のごとくなる。これからわかるごとく、図-21 は定常振動、図-22 は収れん振動となっている。先の条件 (22) および 図-15 の結果と合わせて考えれば特性がよく一致しているのがわかる。また $\omega_n t_0 = \frac{5}{2}\pi$ で $\frac{\lambda}{\omega_n^2} > \frac{2r}{\omega_n}$ の時は 図-23 のごとくなり、これは発散性の振動であることがわかる。

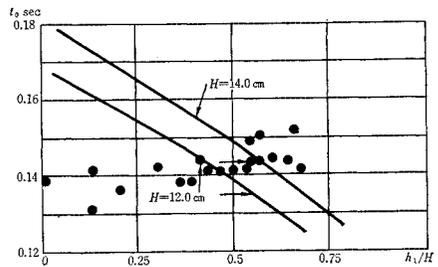
以上3つの図を比較すれば振動方程式 (16) の特性が 図-22 の特性図によって証明されることがよくわかる。

(5) 振動理論と実験との関係

前記のように振動方程式 (16) の特性がわかったので、実験結果との関連について検討してみよう。まずむだ時間 t_0 の条件 $\omega_n t_0 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ について調べてみる。水

の流れより決まるむだ時間は式 (11), (12) によって与えられる。ここで圧力波の伝達時間は越流水の落下時間に比して無視できるものとして式 (11) によって t_0 も決定する。なお式中の K および c_c の値は、 K については堰上で限界水深になっていると考え、さらに流れの主流は中央にあると考えれば $K = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ とすればよいことがわかる。また c_c については越流水の影響が水路床まで達する場合の振動を考えているので $c_c = 1.0$ とすればよい。このようにして $H_0 = 14.0$ cm, $H_0 = 12.0$ cm の場合の $t_0 \sim h_1/H$ 曲線を求めると 図-24 のごと

図-24



く表わされる。つぎに振動系の不安定条件より決まる条件式 (22) より求まる t_0 は $n=2$ の場合が最もこの場合に接近している。そこで系の固有周波数 f より固有角周波数 ω_n を $\omega_n = 2\pi f$ によって求めて式 (22) より t_0 を求めると $H_0 = 14.0$ cm については $t_0 = 0.143$ sec, $H_0 = 12.0$ cm については $t_0 = 0.135$ sec となる。これを 図中に矢印として表わしてある。しかし固有角周波数も流れの状況によって付加質量等が若干異なってくるので先の実験結果の 図-8 (plate 1) の卓越周波数が固有周波数に相当するとして式 (22) より t_0 を求めて 図-24 中に黒点としてプロットしてみた。先の理論解析によれば両方の t_0 が一致したときに振動が不安定になるはずである。図-24 の場合それが $h_1/H = 0.6 \sim 0.63$ 付近である。この場合に相当する振幅特性は 図-8 に示されているが、振幅は h_1/H がちょうど上記の値をとる付近で大きくなっていることがわかる。このようにして式 (22) の条件のうち t_0 については良い結果であるが振動外力 λ についての条件は求めにくい状況にある。 λ の値自身が一応 $\lambda = \frac{Bd_0}{M+M'} \left(\frac{dFL}{dh_1} \right)$ (式 (15)) または $\lambda = \frac{WBd_0}{M+M'} \cdot (M_0 + 1)$ (式 (9)) のような形で与えられているが $\frac{dPL}{dh_1}$ とか M_0 の値が解明しにくい状態である。そこでここでは t_0 の条件が満たされているところで 図-8 のごとく急に振動が大きくなっている点に注目して、式 (22) の条件より逆に λ の値を求めてみる。 r の値は静水中のもので $r = 2.72$ 1/sec (表-1) $\omega_n = 58.6$ 1/sec (表-1) むだ時間は $t_0 = 0.143$ sec (図-24) を使用すれば式 (22) の条件より

$$\lambda \geq 2r\omega_n = 2 \times 2.72 \times 58.6 \text{ 1/sec}^2 = 268.8 \text{ 1/sec}^2$$

したがって

$$Bd_0 \left(\frac{dP_L}{dh_1} \right) \geq \lambda(M+M') = 274 \text{ g重/cm}$$

となり、ゲート下面にはゲート変位 1 cm 当りに 274 g 重程度の力の変化が生じていると考えられる。

このように振動外力 λ により現象をとらえることはむだ時間 t_0 よりとらえることより不明確な要素が入りやすいのでその判定に困難なところがある。

5. 結 論

1. より 4. までにわたって越流をともなう場合のゲートに発生する振動現象について実験の結果およびそれに対する解析をのべてきた。ここで一応それらの結果をまとめておく。

(1) 越流をともなうスルースゲートにおいてはその周囲を流れる水の状況によって、さまざまな振動現象が発生してくることがわかり、本論文ではそれらのうち、特に自励的に大きくなる振動についての解析を行なった。

(2) その自励的な振動現象は当然のこととして振動系の性質にも左右され、むだ時間項のある振動の安定問題として説明できることがわかった。

(3) 本論文で扱ったのは長方形リップのものである

が、リップ形状が異なると、越流水の落下距離も異なりとともにゲートが圧力変動を受ける受圧面に相違が生ずるので現象が異なってくるのが考えられる。これらについては現在研究中である。

最後にこの論文のために終始こんせつしていねいな指導をして下さいました埼玉大学 嶋 祐之 教授に謝意を表したいと思います。

参 考 文 献

- 1) Eduard Naudasher: "Vibration of gates during Overflow and Underflow", Proc. A.S.C.E. (HY. 5), September 1961
- 2) 中山 稔他:「瀬田川洗ゼキについて(主としてゲート振動防止対策と管理機構)」, 土木学会誌, 47 卷 4 号, 昭和 37 年 4 月
- 3) Frank B. Campbell: "Vibration Problems in Hydraulic Structures", Proc. A.S.C.E. (HY. 2) 1961
- 4) William P. Simons: "Experiences with Flow induced Vibrations", Proc. A.S.C.E. (HY. 4) July 1965
- 5) チェモンエンコ: "工業振動", 産業図書
- 6) 高橋利衛: "振動工学演習" II, オーム社, p. 165, むだ時間
- 7) 近藤次郎: "演算子法", 培風館
- 8) 高橋利衛: "振動工学演習" II, オーム社, p. 127, 第 12 章, 安定問題
高橋利衛: "自動制御の数学", オーム社, p. 271, 第 6 章, 安定性および安定度
- 9) 証明は筆者の東京大学学位論文 p. 166 参照
- 10) 後藤尚男他訳: "機械と構造物のための振動工学", (Jacobsen (丸善) p. 239, 第 6 章 (1966.8.6・受付)