

変形法と Reduction 法との相互関係について

RELATIONS BETWEEN DEFORMATION METHOD AND REDUCTION METHOD IN THE STRUCTURAL ANALYSIS

中川 建治・成岡 昌夫**

By Kenji Nakagawa and Masao Naruoka

要　旨 連続ばかりの解析において非常にすぐれている Reduction 法と、一般的な構造物の解析において電子計算機のプログラミングの立場からすぐれていることが認識されている変形法との関係を明らかにした。両者の長所・短所を検討し、Reduction 法に類似した新しい解析法を考案した。計算例によってたわみ理論による解析法にも適用されることを示した。

1. まえがき

本文において変形法と称する解析法は、狭義の変形法とする。すなわち、Stiffness Matrix を作成し、逆行列の演算によって Flexibility Matrix を求めて、部材応力、および、変形量を計算する方法であり、文献 1) に述べられている解法とする。

電子計算機の普及によって、変形法が構造解析の立場からすぐれていることが認識されていることは、ここ改めて述べるまでもない。とくに、部材が複雑に組み合わせられている構造物の解析にも適した“一般性のあるプログラム”を作成するには、変形法によらざるを得ないといつても過言ではない。

しかし、このように有効な変形法の最大の欠点は、格点が多くなるにしたがって未知数が増加して、高次行列の演算を必要とすることである。大型電子計算機の出現によって、高次行列の演算を遂行することは可能になった。なお、外部記憶装置さえ備えているならば、中型、あるいは、小型電子計算機によっても、要求に応じた高次行列の演算も実行し得よう。複雑な部材構成の構造解析においては、Stiffness Matrix が大きくなることはやむを得ないが、橋桁構造のように比較的単純な構造様式をもつ構造物においても、このように高次行列を解くことが必要不可欠なことであろうか。

数学的には、 n 次行列の逆行列の演算では、 n^3 に比例した演算回数を必要とする。小型電子計算機で外部記憶装置を用いて遂行するには、分割法によらなければならぬので、さらに分割法によるデーター転送のステップが増加する。

さて、変形法による構造物解析において現われる Stiffness Matrix は、0 要素の非常に多い行列である。かつ、未知数が多くなるにしたがって 0 要素の Stiffness

Matrix の全要素中に占める割合は大きくなる。この点に着目すれば、0 要素を集団的に省略して記憶装置を有效地に使用し、かつ、演算時間を軽減することが考えられる。高速大容量の電子計算機によってのみ可能な計算を、外部記憶装置のない中型機によっても実行し得るように工夫することが切望されよう。

この要求を満たすもの一つが、Reduction 法であろう。Reduction 法は、本来は連続ばかり形式の構造物に対して考案された解法であるが、格子桁、および、トラスの解析にも適用されることとは、著者の一人が文献 3), 4) 5) に紹介した。この方法は、変形と応力を未知数として Stiffness Matrix のような高次行列を作成せずに、低次行列のくり返し演算によって解く方法である。Feld Matrix と Punkt Matrix とを交互に乘ずる各段階において現われる未知数が常に一定個数であることも、変形法の場合とくらべて大きな相違点であろう。Reduction 法は、たわみに関する 4 階の微分方程式の解をもとにし、各格点の境界条件の連続性によって、逐次、境界点を通過しつつ各パネルの変位量や部材力を消去していく方法である。これは、変形法による場合、Stiffness Matrix を解く観点、すなわち、逆行列を求めるという数学的観点から見るならば、連立方程式を解く場合の逐次代入法にほかならない。0 要素の多い行列の演算で、non-zero 要素を対角線近傍へ集積させて、0 要素を集団的に省略するために小行列による逐次代入法によって解くという方法の一つが、Reduction 法であるといえよう。

Reduction 法は、ラーメン、さらに進んで、ランガーハルツ、ローゼ桁の解析にも適用されよう。しかし、これらのことについてはのちの機会にゆずり、ここでは、変形法と Reduction 法の共通点、および、相違点を解明し、相互関係を示す。さらに、これらの考察の結果より、新しい解析法といえるものではなく、在來の変形法の Stiffness Matrix を Reduction 法の手法によって解く方法ではあるが、電子計算機を使用する立場から、一つの解析法を考案した。

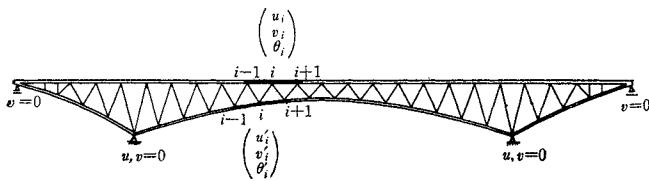
2. 変形法について

変形法の特徴については、ここで列挙するまでもない。Reduction 法と対比させる場合に必要となることについてのみ略記する。くわしくは、他の文献、たとえば、文献 1) を参照されたい。

* 正会員 工修 山口大学助教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学教室

図-1



対象とする構造物は、図-1に示すような平面剛滑節構造物で、橋桁のように一方向に連続しているものとする。トラス、あるいは、ローゼ桁という具体的な形式は問わない。

さて、このような場合における変形法による解析法の特徴を、つぎに列挙する。

1) 設定された格点で、隣接する格点にはさまれた部分は直線で、かつ、等断面であるとみなす。したがって、部材断面、形状などは、すべて格点においてのみ変化する。

2) 構造形状、あるいは、変位、部材力を表わすための座標系 (x_0, y_0) は、空間に固定した方向を保つ。原点の平行移動は任意とする。

3) 未知数は各格点の変位 u, v, θ である。部材力、あるいは、支点反力は未知数でない。

4) 方程式とは、各格点の変位によって生ずる部材力のその点における水平 (x_0) 方向、垂直 (y_0) 方向、および、回転 (θ) 方向のつりあい方程式群であって、これが Stiffness Matrix を構成する。

5) 境界条件式は、たとえば、支点変位が 0 であるとか、ピン結合であるとかであるから、曲げモーメントが 0 であるという条件式は現われない。

6) 当然満足されなければならないこれらの境界条件は、すでに、力のつりあい条件式を導く段階において満足させてある。したがって、境界条件、あるいは、拘束条件を導くべき格点では、それに対応した未知数を初めから設定しない。

7) このようにして導いた Stiffness Matrix は、0 要素の非常に多い行列となる。行列の次数、すなわち、未知数が多くなるにしたがってこの傾向が増大する。

8) しかし、一般に、Stiffness Matrix 中の 0 要素は、一定の法則にしたがっているとしても分散している。

9) 0 要素の多くなる理由は、格点における力のつりあい式の性質にもとづいている。任意のある格点における力のつりあい式では、その格点に部材によって隣接している格点の変位と、その格点の変位のみしか現われない。

10) 最後に、Stiffness Matrix に対して逆行列の演算を行なって、すべての未知数を同時に求める。部材力は、未知数(変位量)が求められてから、これらの 2 次

的なものとして計算される。

さて、Stiffness Matrix を、Reduction 法の小行列 (Feld Matrix あるいは Punkt Matrix) と対比させるについて、もっとも支障となるのは、8) である。Stiffness Matrix の non-zero 要素を分散させずに対角線近傍へ集積させるには、つぎのようすればよ

い。まず、格点番号を、図-1に示すように、上弦材格点については、左から右へ向かってつける。下弦材格点については同じようにするが、同一番号が一本の腹材で連結されているようとする。未知数となる格点変位については、上弦材格点では、水平、垂直、回転方向を、 u_i, v_i, θ_i とし、下弦材格点では、 u'_i, v'_i, θ'_i とする。Stiffness Matrix を構成する各格点における力のつりあい式は、任意の格点番号に対して上弦材格点の水平方向、垂直方向、回転方向、および、下弦材格点の水平方向、垂直方向、回転方向の 6 つのつりあい式を 1 組として格点番号順に配列する。各式における未知数の配列順序は、つりあい式と同様に、格点 i に対して、 $u_i, v_i, \theta_i, u'_i, v'_i, \theta'_i$ を 1 組として格点番号順に配列する。このようにして Stiffness Matrix を作成すれば、9) に列挙した理由より、行列要素の non-zero 要素が対角線近傍へ集積する。

Stiffness Matrix を小行列によって表示するために、未知数(変位)を要素とする 6 次の未知ベクトルを定義する。

$$X_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \end{bmatrix} \quad \dots \quad (1)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H'_i \\ V'_i \\ M'_i \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2)$$

すなわち、 X_i とは、格点 i における未知数である。式 (2) に定義した P_i を格点に作用する外力と定義すれば、格点 i における力のつりあい方程式は 6 次正方形 A_{ij} によって、

$$A_{i,i-1}X_{i-1} + A_{i,i}X_i + A_{i,i+1}X_{i+1} = P_i \quad \dots \quad (3)$$

として表わされる。 $i=1, 2, \dots, n$ とすれば、全格点のつりあい方程式が得られる。したがって、 $A_{i,j}$ とは、Stiffness Matrix を 6 次正方形である小行列に分割したときのそれぞれの要素にほかならない。式 (3) は、

$$\left. \begin{aligned} A_{i,1} = A_{i,2} = \dots = A_{i,i-2} = 0 \\ A_{i,i+2} = \dots = A_{i,n} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (4)$$

ということを含んでいるものであり、 Stiffness Matrix の 0 要素を集団的に除外することを意味している。non-zero 要素は、すべて、 $A_{i,i-1}, A_{i,i}, A_{i,i+1}$ の中に含まれている。

支点、あるいは、ピン結合があつたりする場合は、一種の拘束とみなし、対応した条件式を、拘束条件式、あるいは、境界条件式と表現する。変形法においては、5), 6) に例挙したように、条件式も力のつりあい式も現われないかわりに、対応した未知数も除外される。ゆえに、

11) 格点 i において r 個の拘束があるならば、それに対応した r 個の未知数が、式(1), 式(2)におけるベクトル X_i, P_i から除外されて、それぞれ、 $6-r$ 個の要素よりなるベクトルとなる。したがって、式(3)における $A_{i,j}$ の要素も減少して、 $A_{i,i-1}, A_{i,i+1}$ は、 $(6-r, 6)$ 次長方形行列となる。 $A_{i,j}$ は、 $6-r$ 次の正方行列となる。さらに、拘束でなく、上弦と下弦が一致した場合、たとえば、支点部分、あるいは充腹桁部分では、未知数も、つりあい方程式も減少して、同様な変化が現われる。Stiffness Matrix から $A_{i,j}$ を作る場合、このようなことを考慮して小行列に分割するのである。

12) 最初(左端)と最終(右端)の格点では、式(3)は、それぞれ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{1,1}X_1 + A_{1,2}X_2 = P_1 \\ A_{n,n-1}X_{n-1} + A_{n,n}X_n = P_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (5)$$

3. Reduction 法について

本節では、論ずる対象を連続桁として、Reduction 法が最初に適用された構造物とする(文献 2)参照)。変形法と比較する場合、それぞれの対象とする構造物が異なっていることになるが、基本的な考え方を比較する場合にはなんら支障をきたさない。Reduction 法の概念を平面剛滑筋構造物の解析に適用する方法について論ずるには、このような観点から出発することが理論的に有効である。

変形法について例挙した特徴について、Reduction 法の立場にもとづく場合の相違点を、順を追って例挙する。くわしくは文献 2)を参照されたい。

格点番号は上弦と下弦の区別がないので、左端から右端へ向かってつける。

- 1) 部材の形状についての仮定は、変形法と全く等しい。
- 2) 部材の変位と断面力を表わす座標系は、各パネルごとに異なる。それぞれのパネルで、 x 座標は部材軸と一致し、原点はその部材の左端に定める。
- 3) 未知数は各格点の左、および、右側近傍における

材軸方向変位 u 、材軸直角方向変位 v 、回転変位 θ 、および曲げモーメント M 、せん断力 Q 、軸方向力 N である。したがって、解析の途中で部材力 M, N, Q は、変位 u, v, θ と一緒に計算される。この点が変形法との相違点の一つである。

4) 方程式の一部分を構成する Feld Matrix は、たわみに関する 4 階の微分方程式の解より導かれたものである。部材の伸縮に関する微分方程式の解も加えられて、合計 6 個の積分定数を含む方程式となるので、部材の左端の変位と断面力を境界条件として与えて、部材の右端における変位と断面力を与えるのが、Feld Matrix である。したがって、Stiffness Matrix はそれぞれの格点における力のつりあい方程式であるが、Feld Matrix は隣接格点にはさまれた部材の変形に関する方程式であり、両者は全く別種のものである。Reduction 法において格点における力のつりあいを表わすのは、Punkt Matrix である。外力、および支点の拘束力を導入して、格点を越えて隣接パネルへ変位と断面力を移転させる機能は、Punkt Matrix の機能である。他方、2) に示した座標系の方向変化は、変形法では現れない。変位と断面力を隣接パネルへ移転させるについて、座標系を一致させるための座標変換が必要である。この座標変換機能は、Punkt Matrix の機能によるものである。Punkt Matrix は、格点における力のつりあいと座標変換を同時に満足させるものである。

変形法において Feld Matrix に相当したものは、存在するであろうか。格間に荷重が存在しない場合は、部材のたわみと断面力は、部材両端の変位量 u, v, θ が与えられるならば決定する。変形法では、両端の変位量を、 u, v, θ と仮定する。しかるのちに、力のつりあいを考えて Stiffness Matrix を作成するので、Stiffness Matrix の各要素の中に、自動的に、Feld Matrix の表現する変形の関係が導入されている。Reduction 法では、部材の右端の変位量 u, v, θ を仮定するかわりに、左端の断面力 M, N, Q を仮定するので、右端の変位と断面力を表わすには Feld Matrix を使用しなければならない。

5) 境界点(拘束点)では、Punkt Matrix の中において拘束方向の力のつりあいを考える。したがって、拘束を表現する方程式は力のつりあい方程式とは別に導かれて、満足されなければならない。この相違点の重要さを後述する。このようなことから、

- 6) 拘束点において、拘束力も一つの未知数となる。
- 7) Reduction 法では、注目するパネルと格点以外の他の部分には関係なく Feld Matrix と Punkt Matrix を作成し得るので、Stiffness Matrix の 0 要素小行列のようなものは現れない。

部材 $(i-1)-i$ の Feld Matrix を F_i 、格点 i にお

得る。

$$\begin{aligned} & A_{2,1}X_1 - A_{2,2}A_{1,2}^{-1}A_{1,1}X_1 \\ & + A_{2,2}A_{1,2}^{-1}P_1 + A_{2,3}X_3 = P_2 \\ \therefore & X_3 = B_3X_1 + C_3 \\ & B_3 = -A_{2,3}^{-1}(A_{2,1} - A_{2,2}A_{1,2}^{-1}A_{1,1}) \\ & C_3 = -A_{2,3}^{-1}(A_{2,2}A_{1,2}^{-1}P_1 - P_2) \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots(11)$$

同様にして、

$$\begin{aligned} & X_{i+1} = B_{i+1}X_1 + C_{i+1} \\ & B_{i+1} = -A_{i,i+1}^{-1}(A_{i,i-1}B_{i-1} + A_{i,i}B_i) \\ & C_{i+1} = -A_{i,i+1}^{-1}(A_{i,i-1}C_{i-1} + A_{i,i}C_i - P_i) \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots(12)$$

を得る。最後に、式(5)の第2式とともに、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} & X_n = B_nX_1 + C_n \\ & A_{n,n-1}X_{n-1} + A_{n,n}X_n = P_n \\ & (A_{n,n-1}B_{n-1} + A_{n,n}B_n)X_1 = -C_n + P_n \\ & D_nX_1 = -C_n + P_n \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots(13)$$

このようにして、Reduction 法の概念を踏襲するならば、式(13)によってベクトル X_1 を求めることになり、逐次代入法が形式的には成立することになる。

さらに、ベクトル X_i の要素に外力項を導入するための定数項(定数1)を付加するならば、式(12)における第1式の外力項 C_{i+1} が行列の中へくり込まれて、

$$X'_{i+1} = B'_{i+1}X'_1 \quad \dots(14)$$

となり、式(7)と同様な形式を得る。

ただし、これらは形式的なものにすぎないことに注意しなければならない。第1の理由は、式(10)～(13)の中に現われる逆行列の演算が必ずしも逐行し得るとはいえないことである。拘束条件については前節5)において述べたが、変形法では拘束方向の変位を設定しないかわりに、拘束方向のつりあい方程式も除外する。したがって、もし、格点 i に一つの拘束が存在するならば、式(3)において方程式が一つ減少し、 $A_{i,i-1}$ と $A_{i,i+1}$ は長方形行列になる。 $A_{i,i}$ は X_i の要素が拘束によって減少するので、相変わらず正方行列である。ゆえに、 $A_{i,i-1}$ 、あるいは、 $A_{i,i+1}$ の逆行列は演算不能になる場合のあることがわかる。では、なぜ、Reduction 法ではこの障害をまぬがれたのであろうか。前述したように、Reduction 法では、拘束が存在してもつりあい方程式を導いて、 $A_{i,i+1}$ に相当する行列が長方形行列にならないようにしている。拘束条件は、この方程式とは別に導いて満足させているのである。

さらに、もう一つの理由は、 $A_{i,i-1}$ と $A_{i,i+1}$ とは非常に0要素の多い不安定な行列であることである。逆行列を掃き出し法によって求める場合に、演算の途中で対角要素が0になると、そのままでは演算不能となる。この観点から、 $A_{i,i-1}$ と $A_{i,i+1}$ とは不安定であるというこ

とは、変形法の Stiffness Matrix の作成方法に立ち帰って検討すれば明白である。たとえば、部材 $i, i+1$ が両端滑節構成で部材軸が座標軸方向に平行しているならば、 $A_{i,i+1}$ の対角要素に0要素が現われることがわかる。この点に関しては、Reduction 法を平行弦トラスの解法に適用した文献5)を参照されたい。この難点をまぬがれるような改良を施している。このような難点を含んだ解法そのままを、一般構造物の解法として電子計算機に対するプログラムを作成することは、非常に繁雑な手段を必要とする。

最後に、ここに示した解法(すなわち、変形法の逐次代入法)では、1パネルごとに小行列の逆行列の演算を必要としているにもかかわらず、Reduction 法では最後に1回の逆行列の演算しか必要としない点について考えよう。両者における未知数の内容的な相違については、すでに述べたが、さらに、Feld Matrix にもとづいているものであることに注意されたい。未知数の内容にもとづいて、Feld Matrix は三角形行列である。加うるに、Feld Matrix は微分方程式の解であって、境界条件を格点 i で導入しても、格点 $i+1$ において導入しても、さほどの相違がない。

$$\begin{aligned} & Y_i = G_iY_{i+1} \\ & Y_{i+1} = H_{i+1}Y_i \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots(15)$$

式(15)の相互変換は、 H_{i+1}^{-1} の計算を行なうかわりに、部材 $i, i+1$ の微分方程式の境界条件を格点 $i+1$ において導入してもよい。内容的には三角形行列の逆行列であるから、逆行列の演算を行なっていると意識しながら、逆行列の演算を行なっているのである。この場合、Punkt Matrix の転移方向が反対になるが、導く段階においてはなんら基本的な相違点は存在しない。式(15)の G_i も H_{i+1} も、Feld Matrix と Punkt Matrix の積であることには相違ない。

変形法の対象を連續ばかり形式のものにするならば、Reduction 法に比較して、未知数が半減していると述べた。最初に仮定したように、対象を図-1に示すような構造物にすれば、 X_i の要素は6個となる。これは Reduction 法の未知数と等しいが、Reduction 法をこのような構造物にそのまま適用するならば、さらに、Reduction 法の未知数が2倍になる。このことについては、のちの機会にゆずることにする。

以上のようにして、いろいろな立場から Reduction 法と変形法とを検討して、Stiffness Matrix を解くについて、Reduction 法の手段をそのまま踏襲することは非常に危険であることを知った。小行列 $A_{i,i-1}$ と $A_{i,i+1}$ の逆行列演算を行なうかわりに、ほかの解法を導くことは、上記の解法を否定することとは別に、意義のあることではなかろうか。

5. 逐次代入法の改良

ここに述べる解法は、決して新しい解法とは考えない。数学的には、逐次代入法の一方法にすぎない。変形法と Reduction 法とを比較する過程において必然的に現われた逐次代入法を、そのまま、Stiffness Matrix の解法に適用することは、式(3)における $A_{i,i-1}$ と $A_{i,i+1}$ の逆行列の計算が困難になる場合があることから、すぐれた解法とは断定しにくい。しかし、 $A_{i,i}$ が常に正方行列であることに着目して、多少の改良を加える。

$A_{i,i}$ は拘束によって方程式が減少しても、未知数が減少するという事実から、つねに正方行列になることはすでに述べた。加えて、Stiffness Matrix の性質上、対角要素となる小行列 $A_{i,i}$ は、他の小行列に比較して絶対最大要素を含んだ行列となる。したがって、逆行列を求める立場からは、0要素を多分に含んだ他の小行列に比較して、最も安定した行列であるといえよう。

ここに、改良を加えるということは、逐次代入法をつぎのような方法で行なうことと定義する。

式(5)において、両辺に左から $A_{1,1}^{-1}$ を乗ずる。

$$X_1 + A_{1,1}^{-1} A_{1,2} X_2 = A_{1,1}^{-1} P_1 \quad \dots \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \therefore X_1 &= S_1 X_2 + T_1 \\ S_1 &= -A_{1,1}^{-1} A_{1,2} \\ T_1 &= A_{1,1}^{-1} P_1 \end{aligned} \quad \dots \quad (17)$$

式(3)において、 $i=2$ として式(17)を代入すれば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} A_{2,1}(S_1 X_2 + T_1) + A_{2,2} X_2 + A_{2,3} X_3 &= P_2 \\ (A_{2,1} S_1 + A_{2,2}) X_2 + A_{2,3} X_3 &= P_2 - A_{2,1} T_1 \end{aligned} \quad \dots \quad (18)$$

式(18)の両辺に $(A_{2,1} S_1 + A_{2,2})^{-1}$ を左より乗じて移項すれば、

$$\begin{aligned} X_2 &= S_2 X_3 + T_2 \\ S_2 &= -(A_{2,1} S_1 + A_{2,2})^{-1} A_{2,3} \\ T_2 &= (A_{2,1} S_1 + A_{2,2})^{-1} (P_2 - A_{2,1} T_1) \end{aligned} \quad \dots \quad (19)$$

を得る。したがって、一般式は、

$$\begin{aligned} X_1 &= S_i X_{i+1} + T_i \\ S_i &= -(A_{i,i-1} S_{i-1} + A_{i,i})^{-1} A_{i,i+1} \\ T_i &= (A_{i,i-1} S_{i-1} + A_{i,i})^{-1} (P_i - A_{i,i-1} T_{i-1}) \end{aligned} \quad \dots \quad (20)$$

となり、式(5)の第2式によってつぎのようになる。

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= S_{n-1} X_n + T_n \\ A_{n,n-1} X_{n-1} + A_{n,n} X_n &= P_n \\ \therefore (A_{n,n-1} S_{n-1} + A_{n,n}) X_n &= P_n - A_{n,n-1} T_n \\ X_n &= (A_{n,n-1} S_{n-1} + A_{n,n})^{-1} (P_n - A_{n,n-1} T_n) \end{aligned} \quad \dots \quad (21)$$

このようにして式(16)～(21)の演算方法は、逐次代入法ではあるが、代入して消去される未知ベクトルに相

違がある。Reduction 法では、逐次現われる未知数ベクトル X_i を消去して、 X_1 を残す。最後に X_1 に関する方程式を解いて X_2, X_3, \dots, X_n を逐次求める方法である。ここに示した改良型では、逐次、前回に現われたベクトルを消去して X_i と X_{i+1} との関係式とする。最後は、式(21)にみられるように、 X_n の方程式を解いて、 $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1$ の順序で解く。いわば、代入方向が反対になった点が相違点である。

はたして、この解法は演算可能であろうか。格点 i に拘束があると仮定すると、 $A_{i,i-1}, A_{i,i+1}$ は長方形行列となり、今まで言及しなかったが、 $A_{i-1,i}$ と $A_{i+1,i}$ も同様に長方形行列となる。なぜならば、未知ベクトル X_i は、拘束に対応する要素が減少しているからである。式(20)において、 i のかわりに $i-1$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} X_i &= S_{i-1} X_i + T_{i-1} \\ S_{i-1} &= -(A_{i-1,i-2} S_{i-2} + A_{i-1,i-1})^{-1} A_{i-1,i} \\ T_{i-1} &= (A_{i-1,i-2} S_{i-2} + A_{i-1,i-1})^{-1} \\ &\quad \times (P_{i-1} - A_{i-1,i-2} T_{i-2}) \end{aligned} \right\} \dots \quad (22)$$

式(22)における $(A_{i-1,i-2} S_{i-2} + A_{i-1,i-1})^{-1}$ を構成する小行列は、すべて正方行列であって演算可能である。 $A_{i-1,i}$ は列の少ない長方形行列であるから、 S_{i-1} 列の少ない行列となる。式(22)の第3式右辺第1項は、外力項として1列行列であるから、第1式は X_i の要素が減少しているにもかかわらず成立し、演算可能である。

つぎに、式(20)に注目すれば、 $A_{i,i-1}$ は行の少ない行列で S_{i-1} は列の少ない行列であるから、 $A_{i,i-1}, S_{i-1}$ と $A_{i,i}$ とは、列、行ともに少ない正方行列として次数が一致する。ゆえに、 $(A_{i,i-1} S_{i-1} + A_{i,i})^{-1}$ は演算可能である。 $A_{i,i+1}$ は行が少ない行列であるから、 S_i は行の少ない行列である。 $(P_i - A_{i,i-1} T_{i-1})$ は、すべて、行が少ない1列行列となるので、式(20)における第1式は演算可能であることがわかる。 $i+1$ とすれば、 $A_{i+1,i}$ が列の少ない行列であるが、これは、 $i-1$ におけると同様に、演算可能であることが容易に理解し得よう。

今まで、外力項 P_i については、ベクトル(1列行列として、外力の載荷方法を一例)としてきた。しかし、 P_i は行列であっても、式(16)～(21)の演算においてはなんら変わらない。Reduction 法では、定数項として Feld Matrix と Punkt Matrix へくり込んでしまうので、外力をベクトルとしなければならなかった。ここに述べた解法によれば、電子計算機によって解析する場合、記憶容量の許すかぎり外力項 P_i の列数を増加させていろいろな載荷時における解析を同時に計算し得る。 P_i の列数を方程式の未知数の個数と等しくすれば、結果は Stiffness Matrix の逆行列、すなわち、Flexibility Matrix として得られる。

6. 電子計算機による解析

前節において述べた改良型逐次代入法が、電子計算機の使用においてどのような利点をもつかについて述べる。Stiffness Matrix の逆行列による方法と比較するために、解析の対象を 図-1 に示すような $n+1$ パネルの剛滑節構造物とする。このような構造物に対して変形法を適用すれば、約 $6n$ 個の未知数が現われる。未知数の個数と演算ステップ数について概算を行なって、両者の比較をする。おもな点としてつぎのような点があげられよう。

1) 改良法によれば、必要な記憶容量が著しく減少する。外力の項を除外して考えるなら、演算中に記憶しておく必要のあるのは、式(3)における $A_{i,i-1}, A_{i,i}, A_{i,i+1}$, ($i=1, 2, \dots, n$) であって、それぞれが 6 次正方行列であるとしても、 $3 \times 36n = 108n$ 個の容量しか必要としない。さらに工夫するならば、式(20)の第1式における S_i ($i=1, 2, \dots, n$) のみとなるので、 $36n$ 個に減少する。ゆえに、記憶容量の他の部分は、式(3)における外力項 P_i 、あるいは、式(20)における T_i のために有効に使用し得る。

2) 0要素に対するむだ計算がなくなつて、演算時間が非常に短縮する。逆行列と行列の積の演算は、行列の次数の3乗に比例する演算回数を必要とする。比例定数を両者ともに α と仮定すれば、Stiffness Matrix の逆行列は、 $\alpha(6n)^3$ のステップを必要とする。他方、式(20)によれば、外力項をベクトルとしたとき、 X_i を求めるためには、小行列の積2回、逆行列1回、および、ベクトルと行列の積3回行なうことになる。ゆえに、 $6^3\alpha \times 3 + 6^2\alpha \times 3 = 756\alpha$ のステップとなる。 $i=1, 2, \dots, n$ とするので、 $756\alpha n$ となる。さらに、外力項 P_i をベクトルでなしに、逆行列を求めるために $(6 \times 6n)$ の長方形行列とすれば、総ステップ数は、

$$t_1 = n(6^3\alpha \times 3 + 6^2\alpha \times 2 \times 6^2\alpha \times 6n) = 2 \times 6^3\alpha n^2 + 684\alpha n$$

となる。逆行列をそのまま求めようとするならば、 $t_2 = 6^3\alpha n^3$ となるから、両者の比率をとれば、ほぼ、つぎのようになる。

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{n} + \frac{19}{6n^2} \quad \dots \dots \dots (23)$$

以上の結果から、格点が多くなるにしたがって改良型逐次代入法の有利なことが推察されよう。

7. 計 算 例

ここに導いた改良型逐次代入法

が、構造物解析に応用し得るということと、電子計算機によって逐行するについて演算時間がどの程度に軽減されるかということについて、実際にプログラムを作成して、計算例によって検討した。計算例の対象にしたものはごく簡単な斜吊材吊橋であるが、変形法といえども演算時間がきわめて短縮されるという利点を有効に活用して、線型計算のくり返しによってたわみ理論による解析を行なうようなプログラムを作成した。

すなわち、第1回の演算によって線型理論の解析を行なつて、それぞれの各点の変位と部材力を求める。この変位と部材力を初期変位、および、プレストレスとみなして、この状態で外力を受けて生ずる変位と部材力を第2回目の線型計算によって求める。このようにして、前回までに求められた変位と部材力を代数和を初期変位とプレストレスであるとみなして、線型のつりあい方程式を解く作業をくり返し、たわみ理論による解に収れんさせることを考える。適当な収れん誤差を与えて計算を開始するならば、所要の精度で結果が得られよう。

プログラムは、変形法の Stiffness Matrix を直接作成して逆行列演算を行なうものに比較すれば、多少繁雑になることはやむを得ない。しかし、線型計算のくり返しによる解析を目的としたプログラムへの変換は、ほとんど労力を要するものではない。

ここに示す計算例を解析したプログラムは、全国共同利用の東京大学大型電子計算機 HITAC-5020 に対して作成したものである。コンパイル時間は約 50 秒である。

それぞれの構造物の解析に必要とする使用時間は、カ

図-2 計算例 1

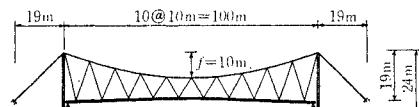
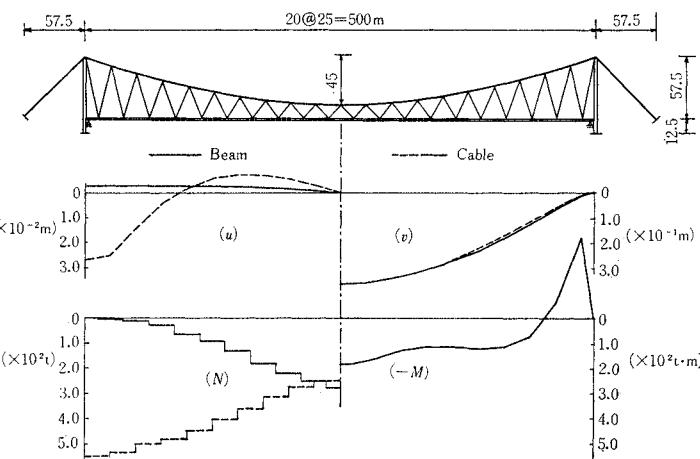


図-3 計算例 2



ードの読み込み時間、演算時間、および印刷時間である。およそ、つぎのような結果を得た。

図-2 に計算例1の概略を示す。ケーブルを10 パネルに分割しているので、未知数は52個であるから、52元連立方程式である。結果については省略するが、線型計算の1サイクルが、読み込みと印刷の時間も含めて約5秒である。

図-3 に計算例2を示す。未知数は102個であって、102元のStiffness Matrix の演算に相当するが、線型計算を5回くり返して全体の所要時間が約30秒であるから、線型計算1サイクル当り6秒となっている。52元、あるいは、102元の逆行列の演算を直接行なっていないので比較は困難であるが、著者の経験では、100元のStiffness Matrix による解析に7分以上費している。このようにして、影響線を求める場合でなく、たわみ理論による解析を目的とする場合には、きわめて有利な計算法であることを知った。これは、式(23)の所要時間の

略算式によっても理解し得ることであろう。

図-3の結果は、1格点当り $P=22.5\text{t}$ という集中荷重を満載した場合のものである。断面寸法については、表-1に示す。

8. む　す　び

それぞれ別な観点から導びかれたと思われる変形法と Reduction 法との相互関係を検討するという立場から、これらの方法をいろいろな角度から眺めた。あるいは、特異な解釈や独断をもって論じて、それぞれの創始者に對して失礼な断定を下したように思われるかもわからない。著者らは、決して、両方の解法を否定しようとしたものではない。両者の関係を検討し、さらに深く理解し得たつもりである。両解法にもとづいた「逐次代入法の改良型」を工夫したが、構造物の解析において役立ち得たならば幸いである。

参考文献

- 1) 児嶋・成岡: Nielsen System 橋, 土木学会誌, 49.4 (39.4), pp. 7~12.
- 2) Kersten, R.: Reduktionsverfahren der Baustatik-Verfahren der Übertragungsmatrizen, 1962, Springer, Berlin.
- 3) 熊野・成岡: Reduction 法とそれによる振り剛性のない格子桁の解法, 土木学会誌, 50.7 (40.7), pp. 93~99.
- 4) 児嶋・成岡: 平面トラスの変位の逐次計算法, 土木学会誌, 51. 2 (41.2), pp. 46~51.
- 5) 熊野・成岡: 平行弦連続ワレントラスの一解法, 土木学会論文集, 132号 (41.8), pp. 27~33.

(1966.8.2・受付)

表-1 計算例2の断面諸量

ケーブル断面積 (m ²)	0.1100
E_c (t/m ²)	1.9×10^7
吊材断面積 (m ²)	0.000392
E_h (t/m ²)	1.4×10^7
補剛桁断面積 (m ²)	0.5488
I (m ⁴)	0.5030
E (t/m ²)	2.1×10^7
タワー断面積 (m ²)	15.0000
I_t (m ⁴)	20.000
E_t (t/m ²)	2.1×10^7