

# 接触圧による地盤内弾性応力

## STRESSES IN ELASTIC FOUNDATION DUE TO CONTACT PRESSURE

長谷川 高士\*

By Takashi Hasegawa

### 1. ま え が き

地盤に密接して建造される土木構造物や、基礎地盤内の応力解析は相互の影響を考慮して接触問題として取り扱かわねばならない。

このような接触問題一般の研究は古くから数多く行なわれており<sup>1)~8)</sup>、それらの手法を利用して各種の土木構造物の応力解析が行なわれてきた<sup>9)</sup>。しかし、これらはいずれもきわめて複雑な演算手法を必要とし、実用的に一般性のある結果はいまだえられていない。

また、最近における地盤内の応力や変形の研究では、実際の基礎地盤に認められる物理的特性が応力分布や変形特性におよぼす影響を明らかにすることに主眼がおかれ、接触圧を基本的な荷重分布でおきかえて解析する方法を用いられることが多い<sup>10)~13)</sup>。

そこで、ここでは地盤内応力に注目し、接触問題として取り扱かう一つの方法を示した。

問題の取り扱いには複素応力関数論を用いて2次元弾性接触の理論を展開するが、ここでは等方均質な弾性体のみを対象としている。

まず最初は、基本的な弾性接触による半無限弾性体内の応力の様相を明らかにするため、2つの半平面が有限区間で接触している場合の解を求めた。これは構造物~地盤系を極端に理想化した場合と考えられるが、これによって接触圧による応力にかんする基礎的な知識を求め、実用設計上必要な2, 3の点を示した<sup>14)</sup>。

この種の問題のうち境界の全区間で接触が行なわれる場合の応力解析は、L. Rongved<sup>15)</sup>、J.T. Frasier<sup>16)</sup>、K.T. Sundara Raja Iyenger<sup>17)</sup>らによって取り扱かわれている。また、部分的接触による応力解析は、J. Dunders<sup>18)</sup>、E. Szelagowski<sup>19)</sup>、F. Erdogan<sup>20)</sup>らによっていずれも複素応力関数論を用いて取り扱かわれている。ここではErdoganの解法を参考にして解を求めた。

つぎに一般的な接触を考えると、接触面においては構造物と基礎地盤の弾性的性質および载荷の影響によって、ある変形がおこり安定が保たれるわけで、接触という条件は外力としてだけでなく、変形を考慮して表わされるものである。そこで、接触を一般的に取り扱かうため、まず接触境界における応力と変形の関係式を求め

た。この関係は、構造物の応力解析において、地盤との接触面における境界条件を与えるものであり、その結果から地盤内応力が求められる。

ここでは実際の問題に有効な地盤内応力の近似解を求めるため、外力の  $x, y$  成分やモーメントと接触面の変形の間に成立すべき条件式を示した。また、これらの結果を用いて地盤内応力や接触応力の1, 2の特性について理論的に考察した<sup>21)</sup>。

### 2. 解法の基礎となる関係<sup>22)~25)</sup>

#### (1) 複素応力関数による応力、変位の関係

複素応力関数論によれば、任意の弾性体における応力の直角座標成分  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  および変位の直角座標成分  $u, v$  は複素応力関数  $\phi(z), \psi(z)$  を用いてつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}\phi'(z) + \psi(z)] \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ただし、  $\phi(z) = \int \phi(z) dz + \text{const.}$

$\psi(z) = \int \psi(z) dz + \text{const.}$

であり、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $\nu$  はポアソン比、 $\kappa = 3 - 4\nu$  (平面ひずみ)、 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  (一般化平面応力)である。いま、実軸を境界とする上半平面  $S^+$  (または下半平面  $S^-$ ) を考えるものとするれば、 $S^+$  または  $S^-$  の一方の領域で定義された解析関数  $\phi(z), \psi(z)$  の定義領域を次式の関係で他領域に拡張する<sup>26)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= -\overline{\phi(z)} - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \\ z \in S^- \text{ (または } S^+) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

これから、 $S^+$  (または  $S^-$ ) における  $\psi(z)$  はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \psi(z) &= -\phi(z) - \overline{\phi(z)} - z\overline{\phi'(z)} \\ z \in S^+ \text{ (または } S^-) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

この関係を用いれば、上半平面 (または下半平面) で定義された  $\phi(z)$  のみによって、応力および変位成分をつぎのように表わすこともできる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[(\bar{z} - z)\phi'(z) - \phi(z) - \overline{\phi(z)}] \\ 2\mu(u' + iv') &= \kappa\phi(z) + \phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\phi'(\bar{z})} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

\* 正会員 農修 京都大学農学部助手

(2) 非同次 Hilbert 問題とその解

一般に端点が  $a_k, b_k$  である  $n$  個の弧  $L_k$  からなる境界  $L$  上で、部分的正則関数  $F(z)$  の境界値につきの関係が成立するとき、

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t) \dots\dots\dots (5)$$

$F(z)$  を求める非同次 Hilbert 問題の解は、 $X(z)$  を式 (5) の同次式の特解とすれば

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-z)} + P_n(z) \cdot X(z) \quad (6)$$

として与えられることが知られている<sup>2)</sup>。

ただし、 $t$  は境界上の座標を表わし、 $F^+(t), F^-(t)$  は境界の左右から点  $t$  に近づいた時の  $F(z)$  の境界値を表わす。また、

$$\left. \begin{aligned} X(z) &= \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{-r} (z-b_k)^{r-1} \\ r &= \frac{1}{2\pi i} \log(g) \\ g &: \text{複素定数で } g \neq 1 \text{ とする。} \\ P_n(z) &= C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

である。

ここで  $X(z)$  は  $a_k, b_k$  に分岐点をもつ多価関数であるが、各  $L_1, L_2, \dots, L_n$  に沿って切断を入れた  $z$  面で  $\lim_{z \rightarrow \infty} \{z^n X(z)\} = 1 \dots\dots\dots (8)$

なる分岐をとるものとする。また、無限遠において関数  $F(z)$  が  $F(\infty) = 0$  であることが必要な場合には上で定めた  $X(z)$  の無限における性質から、 $P(z)$  は  $n-1$  次以下であることが必要である。

3. 接触面における境界条件

境界上の応力および変位の成分の間につき示す2種の条件が成立する場合を考えるものとし、それぞれ境界条件 (A), (B) として取り扱おう。

[境界条件 (A)]

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 \\ \tau_1 &= \tau_2 \\ u_1 &= u_2 \\ v_1 &= v_2 \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (9)$$

[境界条件 (B)]

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 \\ \tau &= -k\sigma \\ v_1 &= v_2 \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (10)$$

上の関係においてサフィックス 1, 2 は接触する物体に属するものであることを示し、 $\sigma$  は接触面に垂直な応力成分、 $\tau$  は接触面の接線方向応力成分を表わす。 $u, v$  は接触面における接線及び法線方向の変位成分を表わす。

境界条件 (A) は面に存在する応力および変位の各成分の連続性を表わしており、これは密着された状態を表わす条件である。

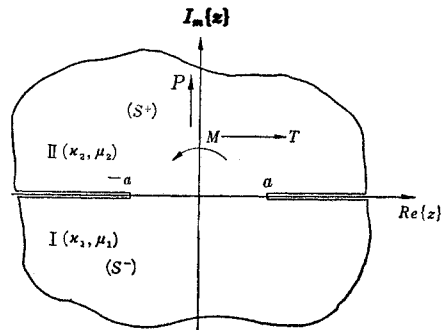
境界条件 (B) は接触している両物体が滑動をおこす

瞬前か、あるいは非常におそい速度で滑動している状態に対する条件である。この特別の場合として  $k=0$  の状態が考えられ、これは滑らかな面をもつ物体の接触条件である。

4. 2つの半平面接触の基礎式とその解

実軸を境界とし、 $I_m(z) < 0$  を占める弾性定数  $\kappa_1, \mu_1$  の弾性体  $S^-$  と  $I_m(z) > 0$  を占める弾性定数  $\kappa_2, \mu_2$  の弾性体  $S^+$  を考え、これが境界上の有限区間  $L(a \leq t \leq b)$  において接触しているものとする。境界上の他の区間  $L'$  では荷重はないものとする。

図-1



弾性体には無限遠において、 $x, y$  方向成分がそれぞれ  $T, P$  の力と、原点にかんして  $M$  なる大きさをもつモーメントが作用しているものとする。

まず、境界条件 (A) の場合を考えれば、この関係は応力および変位の複素結合をとってつぎのように表わされる。

$L$  上で

$$\left. \begin{aligned} u_1^-(t) + i v_1^-(t) &= u_2^+(t) + i v_2^+(t) + f(t) + i \varepsilon t \\ \sigma_{1y}^-(t) - i \tau_{1xy}^-(t) &= \sigma_{2y}^+(t) - i \tau_{2xy}^+(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$L'$  上では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1y}^-(t) - i \tau_{1xy}^-(t) &= 0 \\ \sigma_{2y}^+(t) - i \tau_{2xy}^+(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

である。

ただし、 $f(t)$  は境界の初期形状に関する複素関数で、 $\varepsilon$  は無限における剛体的回転を表わす定数である。応力、変位記号に付した (1), (2) の記号はそれらがそれぞれ  $S^-$  および  $S^+$  に属するものであることを表わす。また、 $t$  は実軸上の座標で、(+), (-) は  $I_m(z) > 0, I_m(z) < 0$  からそれぞれ実軸に近づく極限值を表わしている。

外力と境界上の応力成分との間にはつぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \int_L (\sigma_{1y}^-(t) - i \tau_{1xy}^-(t)) dt &= \int_L (\sigma_{2y}^+(t) - \tau_{2xy}^+(t)) dt = P - iT \\ R_e \left\{ \int_L (\sigma_{1y}^-(t) - i \tau_{1xy}^-(t)) t dt \right\} &= M \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(ここおよび以下においては反時計方向のモーメントを

正とする)

応力にかんする全境界上の条件を考えれば、

$$\phi_1^+(t) + \phi_2^+(t) = \phi_1^-(t) + \phi_2^-(t) \dots\dots\dots(14)$$

となり、 $\phi_1(z)\phi_2(z)$  が境界を含めた全領域において正則であることがわかる。

一方、 $\phi(z)$  が  $|z|$  の十分大きな領域において

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z) &= -\frac{T+iP}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \\ \phi_2(z) &= \frac{T+iP}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

なる関係をもつものとする。

ただし、 $\left| o\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq C\left(\frac{1}{z}\right)$

で  $C$  は正で  $|z|$  のみに依存し、 $z \rightarrow \infty$  で 0 になる。

式 (14), (15) から

$$\phi_1(z) + \phi_2(z) = 0 \dots\dots\dots(16)$$

なる関係が求まる。

さらに、 $L$  上における応力の条件からつぎの関係が求まる。

$$\bar{\phi}_1(z) = -\phi_1(z), \quad \bar{\phi}_2(z) = -\phi_2(z) \dots\dots\dots(17)$$

式 (16), (17) を変位の条件、(11) の第 1 式に代入すれば  $L$  上におけるつぎの関係が求まる ( $'$  は  $t$  にかんする微分の回数を示す)。

$$\phi_1^+(t) + \alpha \phi_1^-(t) = \frac{f'(t) + i\varepsilon}{K} \dots\dots\dots(18)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2} \right) / \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1} \right) \\ K &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

である。

$L'$  上では式 (12) から

$$\phi_1^+(t) - \phi_1^-(t) = 0 \dots\dots\dots(20)$$

である。

つぎに境界条件 (B) では、接触面上において

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy}(t) &= -k\sigma_y(t) \\ v_1^-(t) &= v_1^+(t) + f'(t) + iet \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

なる関係が成立する。

この場合も  $L'$  上では式 (12) が成立するから全境界上の応力の関係から  $\phi_1(z) + \phi_2(z)$  が境界を含めた全領域で正則であることがわかり、式 (15) で定めた  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  の性質を考えれば、

$$\phi_1(z) + \phi_2(z) = 0$$

が求まる。

さらに境界における応力の関係から

$$\left. \begin{aligned} (1+ik)\sigma_y &= \phi^-(t) - \phi^+(t) \\ (1-ik)\sigma_y &= \bar{\phi}^+(t) - \bar{\phi}^-(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

であるから、

$$\bar{\phi}_1(z) = -\frac{1-ik}{1+ik}\phi_1(z), \quad \bar{\phi}_2(z) = -\frac{1-ik}{1+ik}\phi_2(z) \quad (23)$$

が求まる。

式 (16), (22) を、(11) の第 1 式に代入すると、

$L$  上で

$$\phi_1^+(t) + \alpha \phi_1^-(t) = \frac{f'(t) + i\varepsilon}{K} \dots\dots\dots(24)$$

が求まる ( $'$  は  $t$  にかんする微分回数を示す)。

ただし、この場合は

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{\mu_2(\kappa_1+1+ik(\kappa_1-1)) + \mu_1(\kappa_2+1-ik(\kappa_2-1))}{\mu_2(\kappa_1+1-ik(\kappa_1-1)) + \mu_1(\kappa_2+1+ik(\kappa_2-1))} \\ K &= \frac{\mu_2(\kappa_1+1-ik(\kappa_1-1)) + \mu_1(\kappa_2+1+ik(\kappa_2-1))}{4i(1+ik)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

である。

$L'$  上では式 (20) がこの場合も成立する。

したがって、いずれの場合も非同次 Hilbert 問題の解を求めることに帰する。

接触が単一の区間 ( $a \leq t \leq b$ ) でおこるものとして式 (6) を書き直せば、式 (18), (24) の解は

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi iK} \int_L \frac{f'(t) + i\varepsilon}{X(t)^+(t-z)} dt + C_0 X(z) \dots\dots(26)$$

で与えられる。

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X(z) &= (z-a)^{-r}(z-b)^{r-1} \\ r &= \frac{1}{2} - i \frac{\log|\alpha|}{2\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

である。

係数  $C_0$  は式 (8), (15), (26) から決定され

$$C_0 = -\frac{T+iP}{2\pi} \dots\dots\dots(28)$$

である。

いま、接触面が実軸に一致した直線で  $f'(t) = 0$  の場合を考えれば式 (26) の第 1 項の積分を行なって、 $\phi(z)$  をつぎのように求めることができる。

$$\phi(z) = \frac{i\varepsilon}{(1+\alpha)K} [1 - (z+(r-1)b-ra)X(z)] + C_0 X(z) \dots\dots\dots(29)$$

上式を式 (4) に代入すれば  $S^+$  または  $S^-$  の応力を求めることができる。

### 5. 弾性体 $S^-$ に生じる応力

式 (29) によって複素応力関数  $\phi_1(z)$  を求めて、応力の各成分を求めた。

なお、ここでは便宜上 a)  $P, T$  のみが作用する場合、b)  $M$  のみが作用する場合、とに分けて示した。

#### (1) $P, T$ のみが作用する場合

[境界条件 (A)]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ T\left(\zeta_1 - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\zeta_5\right) - P\left(\zeta_2 + \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\zeta_6\right) \right] \\ \sigma_y &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ T\left(\zeta_3 + \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\zeta_5\right) - P\left(\zeta_4 - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\zeta_6\right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ T\left(\zeta_4 + \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\zeta_6\right) - P\left(\zeta_3 - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2}\zeta_5\right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned}
 \tan \theta &= \frac{y}{x} \\
 \tan \theta_1 &= \frac{y}{x-a} \\
 \tan \theta_2 &= \frac{y}{x+a} \\
 \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\
 \rho_1 &= \sqrt{(x-a)^2+y^2} \\
 \rho_2 &= \sqrt{(x+a)^2+y^2} \\
 \theta_0 &= \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2) \\
 \beta &= \frac{1}{2\pi} \log \left[ \left( \frac{\kappa_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) / \left( \frac{\kappa_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right] \\
 \zeta_1 &= 3 e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \cos \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 &\quad + e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)} \cos \left( \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 \zeta_2 &= 3 e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \sin \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 &\quad - e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)} \sin \left( \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 \zeta_3 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \cos \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 &\quad - e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)} \cos \left( \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 \zeta_4 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \sin \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 &\quad + e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)} \sin \left( \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\
 \zeta_5 &= 2 e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho \sin \left( 3 \theta_0 - \theta + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 a \beta \cos \left( 3 \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \sin \theta \\
 \zeta_6 &= 2 e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho \cos \left( 3 \theta_0 - \theta + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 a \beta \sin \left( 3 \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \sin \theta
 \end{aligned} \right\} (31)$$

である。

また, 接触面上の応力はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y &= \frac{(\alpha+1)e^{\pi\beta}}{2\pi\alpha\sqrt{a^2-t^2}} \left[ T \sin \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right. \\
 &\quad \left. + P \cos \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \nearrow$$

ただし,  $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_0, \rho, \rho_1, \rho_2$  などは式 (31) に示したものであり,

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_1 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho \sin \left( \theta_0 - \theta + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - 2 a \beta \cos \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \\
 \omega_2 &= e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho \sin \left( \theta_0 - \theta - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 2 a \beta \cos \left( \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \\
 \omega_3 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \cos \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin \theta \\
 \omega_4 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho^2 \cos \left( 3 \theta_0 - 2 \theta - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 2 a^2 \beta^2 \cos \left( 3 \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \sin \theta \\
 \omega_5 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho \cos \left( \theta_0 - \theta + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 2 a \beta \sin \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{xy} &= \frac{(\alpha+1)e^{\pi\beta}}{2\pi\alpha\sqrt{a^2-t^2}} \left[ T \cos \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right. \\
 &\quad \left. - P \sin \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right] \\
 &\quad (-a \leq t \leq a)
 \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

[境界条件 (B)]

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\beta \left[ T \left( 2 \xi_1 - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} \xi_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. - P \left( \xi_2 + \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} \xi_4 \right) \right] \\
 \sigma_y &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\beta \left[ T \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} \xi_3 - P \left( \xi_2 - \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} \xi_4 \right) \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\beta \left[ T \left( \xi_2 + \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} \xi_4 \right) - P \frac{\rho}{\rho_1\rho_2} \xi_3 \right] \\
 &\quad \dots\dots\dots (33)
 \end{aligned} \right\}$$

ただし,  $\theta, \theta_1, \theta_2, \rho, \rho_1, \rho_2, \theta_0$  などは式 (31) に示したものであって,

$$\left. \begin{aligned}
 \beta &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} k \frac{\mu_2(\kappa_1-1) - \mu_1(\kappa_2-1)}{\mu_2(\kappa_1+1) + \mu_1(\kappa_2+1)} \\
 &\quad (0 \leq \beta \leq 1/2) \\
 \xi_1 &= 2 \cos(\theta_0 + \beta(\theta_2 - \theta_1)) \\
 \xi_2 &= 2 \sin(\theta_0 + \beta(\theta_2 - \theta_1)) \\
 \xi_3 &= 2[\rho \sin(3\theta_0 + \beta(\theta_2 - \theta_1) - \theta) \\
 &\quad - 2 a \beta \sin(3\theta_0 + \beta(\theta_2 - \theta_1))] \sin \theta \\
 \xi_4 &= 2[\rho \cos(3\theta_0 + \beta(\theta_2 - \theta_1) - \theta) \\
 &\quad - 2 a \beta \cos(3\theta_0 + \beta(\theta_2 - \theta_1))] \sin \theta
 \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

である。

接触面上の応力はつぎのようになる。

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi} \frac{\cos \pi \beta}{\sqrt{a^2-t^2}} \left( \frac{a-t}{a+t} \right)^\beta \quad (-a \leq t \leq a) \dots (35)$$

面が滑らかであれば  $k=0$ , すなわち  $\beta=0$  となり

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi} (a^2-t^2)^{-1/2}$$

なる周知の関係を得る。

(2) M の作用する場合

境界条件 (A), (B) のいずれの場合とも容易に求まるが, ここでは境界条件 (A) の場合を記すにとどめる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\varepsilon}{K(1+\alpha)\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ 3 \omega_1 - \omega_2 - 2 \rho \left( \omega_3 - \frac{\omega_4}{\rho_1\rho_2} \right) \right] \\
 \sigma_y &= \frac{\varepsilon}{K(1+\alpha)\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ \omega_1 + \omega_2 + 2 \rho \left( \omega_3 - \frac{\omega_4}{\rho_1\rho_2} \right) \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{\varepsilon}{K(1+\alpha)\sqrt{\rho_1\rho_2}} \left[ \omega_5 - 2 \rho \left( \omega_6 - \frac{\omega_7}{\rho_1\rho_2} \right) \right] \\
 &\quad \dots\dots\dots (36)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -e^{-\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho \cos \left( \theta_0 - \theta - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - 2\alpha\beta \sin \left( \theta_0 - \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \\ \omega_0 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \sin \left( \theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin \theta \\ \omega_7 &= e^{\beta(\theta_2-\theta_1)} \left[ \rho^2 \sin \left( 3\theta_0 - 2\theta + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 2\alpha^2 \beta^2 \sin \left( 3\theta_0 + \beta \log \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

である。

接触面上の応力はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\varepsilon e^{\pi\beta}}{\alpha K \sqrt{a^2-t^2}} \left[ t \cos \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2\alpha\beta \sin \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{\varepsilon e^{\pi\beta}}{\alpha K \sqrt{a^2-t^2}} \left[ t \sin \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\alpha\beta \cos \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

( $-a \leq t \leq a$ )

$\varepsilon$  と  $M$  との関係は接触面上におけるつぎの関係

$$M = R_e \left[ \int_L (\sigma(t) - i\tau(t)) t dt \right]$$

から求まり、

$$\varepsilon = \frac{K(\alpha+1)}{\pi a^2(1+4\beta^2)} M \dots\dots\dots (39)$$

となる。

6. 解についての考察

前節で求めた結果についてその特性をまとめると以下のようである。

(1)  $\kappa_1 = \kappa_2$  として弾性的性質の相違によって生じる変化を  $\alpha, \beta$  の値につき示せば表-1 のようである。

表-1

$E_2/E_1$	境界条件 A		境界条件 B	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
1	1	0	1	0
$\infty$	$\kappa_1$	$\frac{1}{2\pi} \log \kappa_1$	$e^{2i \tan^{-1} k(\kappa_1-1)}$	$(-)\frac{1}{\pi} \tan^{-1} k(\kappa_1-1)$

これからわかるように、上下の弾性体が同質の場合の解は接触面の状態に関係なく一致する。これは系の対称性を考えれば理解される。

(2) 境界条件 (A) では上でのべたように  $E_2/E_1 = 1$  の場合に境界条件 (B) の解と一致し、これは滑らかな接触の場合の剛体圧による解である。 $E_2/E_1 = \infty$  では密着された剛体圧による解である。

(3) 境界条件 (B) では接触面が滑らかであれば ( $k=0$ )、2つの弾性体の弾性的性質の相違に関係せず剛体圧による解となっている。

(4) 弾性的性質の相違による応力値の変化は係数  $\beta$  を変化させることによって求まる。

(5) 外力はその合力の  $x, y$  成分および合力による原点にかんするモーメントとしてのみ考慮されている。

また、上で求めた解を接触圧による地盤内応力解に利用し、その性質にかんして実用設計上必要な 2~3 の点につき考察すれば以下のようである。

(1) 境界条件 (B) は条件として特殊なものである

表-2 係数 J 表 (正符号:引張,  $x/a=0$  で 0 となる J 値は  $x < 0$  で下の値の逆符号をとる)

$x/a$	$y/a$	$\beta$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$	$J_7$	$J_8$	$J_9$
0.25	0	0	0	0.612	0	0.653	0.581	0	0	0	-0.145
		0.016	0	0.537	0	0.647	0.586	0	0	0	-0.125
		0.033	0	0.494	0	0.642	0.592	0	0	0	-0.108
0.5	0	0	0	0.453	0	0.679	0.453	0	0	0	-0.226
		0.016	0	0.419	0	0.668	0.464	0	0	0	-0.210
		0.033	0	0.394	0	0.656	0.476	0	0	0	-0.194
1	0	0	0	0.360	0	0.645	0.487	0	0	0	-0.175
		0.016	0	0.226	0	0.677	0.226	0	0	0	-0.226
		0.033	0	0.217	0	0.666	0.239	0	0	0	-0.218
2	0	0	0	0.211	0	0.652	0.251	0	0	0	-0.208
		0.016	0	0.193	0	0.638	0.265	0	0	0	-0.197
		0.033	0	0.057	0	0.515	0.057	0	0	0	-0.114
3	0	0	0	0.055	0	0.509	0.063	0	0	0	-0.110
		0.016	0	0.052	0	0.501	0.072	0	0	0	-0.109
		0.033	0	0.051	0	0.493	0.077	0	0	0	-0.108
0.25	0.25	0	0	0.020	0	0.387	0.020	0	0	0	-0.061
		0.016	0	0.020	0	0.383	0.024	0	0	0	-0.061
		0.033	0	0.020	0	0.379	0.028	0	0	0	-0.059
0.5	0.25	0	0	0.019	0	0.376	0.031	0	0	0	-0.056
		0	0.265	0.561	-0.072	0.771	0.596	0.072	0.231	0.362	-0.182
		0.016	0.257	0.552	-0.080	0.761	0.605	0.063	0.209	0.360	-0.164
1	0.25	0.033	0.247	0.509	-0.088	0.751	0.616	0.056	0.183	0.356	-0.146
		0.051	0.242	0.458	-0.099	0.748	0.631	0.045	0.156	0.357	-0.126
		0	0.292	0.394	-0.017	0.776	0.394	0.017	0.050	0.309	-0.207
2	0.25	0.016	0.291	0.374	-0.030	0.776	0.406	0.016	0.040	0.305	-0.192
		0.033	0.287	0.341	-0.045	0.749	0.420	0.012	0.026	0.302	-0.183
		0.051	0.286	0.318	-0.060	0.740	0.436	0.008	0.016	0.298	-0.170
3	0.25	0	0.152	0.196	0.079	0.669	0.196	-0.079	-0.055	0.177	-0.158
		0.016	0.153	0.185	0.068	0.666	0.211	-0.076	-0.059	0.175	-0.160
		0.033	0.157	0.176	0.054	0.648	0.218	-0.073	-0.060	0.170	-0.170
0.5	0.25	0.051	0.163	0.169	0.044	0.638	0.226	-0.073	-0.065	0.168	-0.169
		0	0.033	0.063	0.073	0.488	0.063	-0.073	-0.035	0.061	-0.091
		0.016	0.035	0.063	0.070	0.483	0.068	-0.071	-0.039	0.061	-0.093
1	0.25	0.033	0.036	0.059	0.064	0.472	0.075	-0.063	-0.040	0.060	-0.104
		0.051	0.039	0.056	0.059	0.465	0.082	-0.065	-0.042	0.059	-0.114
		0	0.010	0.025	0.046	0.370	0.025	-0.046	-0.024	0.027	-0.053
2	0.25	0.016	0.011	0.024	0.044	0.366	0.029	-0.045	-0.024	0.026	-0.052
		0.033	0.012	0.024	0.042	0.363	0.032	-0.044	-0.024	0.026	-0.052
		0.051	0.012	0.024	0.041	0.359	0.035	-0.043	-0.025	0.025	-0.050
3	0.25	0	0.845	0.367	0.338	0.980	0.367	-0.338	0.252	0.698	0.244
		0.016	0.844	0.363	0.290	0.970	0.376	-0.339	0.183	0.687	0.244
		0.033	0.846	0.361	0.240	0.957	0.388	-0.340	0.149	0.681	0.210
0.5	0.25	0.051	0.846	0.358	0.191	0.947	0.393	-0.341	0.110	0.678	0.198
		0	0.509	0.279	0.262	0.716	0.279	-0.262	0.024	0.448	0.123
		0.016	0.515	0.272	0.232	0.710	0.284	-0.258	0.011	0.443	0.117
1	0.25	0.033	0.520	0.265	0.204	0.705	0.289	-0.254	-0.020	0.438	0.111
		0.051	0.523	0.249	0.168	0.697	0.296	-0.251	-0.020	0.433	0.102
		0	0.237	0.188	0.209	0.539	0.188	-0.209	-0.034	0.233	0.020
2	0.25	0.016	0.241	0.180	0.130	0.405	0.190	-0.135	-0.019	0.083	-0.033
		0.033	0.247	0.168	0.174	0.533	0.193	-0.199	-0.043	0.226	0.016
		0.051	0.252	0.161	0.154	0.537	0.195	-0.195	-0.046	0.220	0.014
3	0.25	0	0.065	0.087	0.138	0.407	0.087	-0.138	-0.018	0.085	-0.034
		0.016	0.069	0.084	0.123	0.405	0.089	-0.135	-0.019	0.083	-0.033
		0.033	0.071	0.080	0.134	0.401	0.093	-0.132	-0.020	0.081	-0.032
0.5	0.25	0.051	0.074	0.078	0.116	0.398	0.096	-0.129	-0.021	0.080	-0.032
		0	0.023	0.042	0.087	0.324	0.042	-0.087	-0.008	0.040	-0.026
		0.016	0.024	0.041	0.084	0.321	0.044	-0.085	-0.009	0.041	-0.025
1	0.25	0.033	0.026	0.039	0.081	0.319	0.046	-0.083	-0.010	0.041	-0.025
		0.051	0.028	0.038	0.078	0.316	0.049	-0.081	-0.011	0.042	-0.024

から  $k=0$  の場合のみ考えるものとして、式 (30), (36) を用いて応力をつぎのように表わす。

$$\left. \begin{aligned} 2a\sigma_x &= -J_1 \cdot T + J_2 \cdot P \\ 2a\sigma_y &= -J_3 \cdot T + J_4 \cdot P \\ 2a\tau_{xy} &= J_5 \cdot T - J_6 \cdot P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

および

$$\left. \begin{aligned} a^2\sigma_x &= J_7 \cdot M \\ a^2\sigma_y &= J_8 \cdot M \\ a^2\tau_{xy} &= J_9 \cdot M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

上式中の係数  $J_1 \sim J_9$  はその一部を表-2 に示した。

(2) 図-3~6 には地盤内応力分布を例示した。图中、実線は  $\beta=0$  の場合で代表した接触圧による応力分布で、点線は従来用いられている等分布、または等変分布荷重による応力分布である。 $\beta$  の各値にたいする地盤内

応力は表-2 を用いて求めることができる。これらの応力分布はいずれも  $d < 0.5 \sim 1$  において相違しているが、 $d > 1 \sim 1.5$  においてはほぼ一致した値となる。 $y$  方向外力による垂直応力分布をみると(図-3 参照)、接触圧による応力が全般的に均等な分布をしており、中央値と比較すれば、 $d \leq 1$  において接触圧による応力が等分布荷重によるものの 75% 程度の値であって、 $d \geq 2$  では応力値に差がないことがわかる。

(3) 偏心荷重による接触面の引張応力の発生を検討する。式 (32), (38) を用い  $M=m \cdot P$  とおけば、接触面における垂直応力は次式で与えられる。

$$\sigma_y(t) = \frac{(1+\alpha)e^{\pi\beta P}}{\pi\alpha\sqrt{a^2-t^2}} \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\beta \log \frac{a+t}{a-t}\right) \right]$$

図-4 地盤内垂直応力 ( $P=T=0, \beta=0$ )

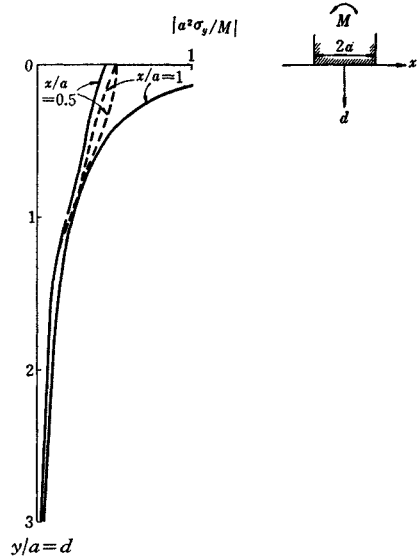


図-5 地盤内水平応力 ( $P=M=0, \beta=0$ )

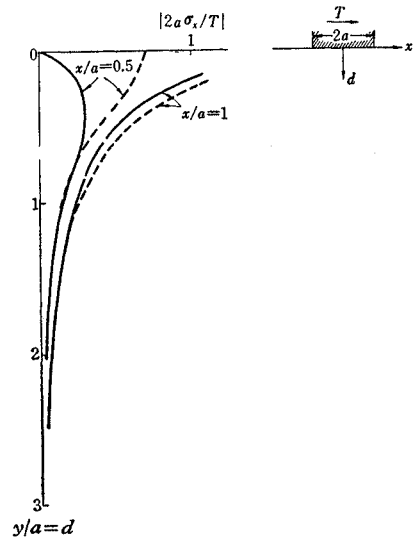


図-2 係数  $\alpha$  ( $\nu=\nu_2$  の場合)

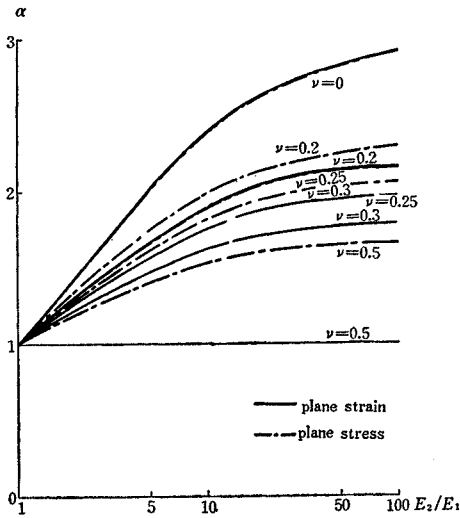


図-3 地盤内垂直応力分布 ( $T=M=0, \beta=0$ )

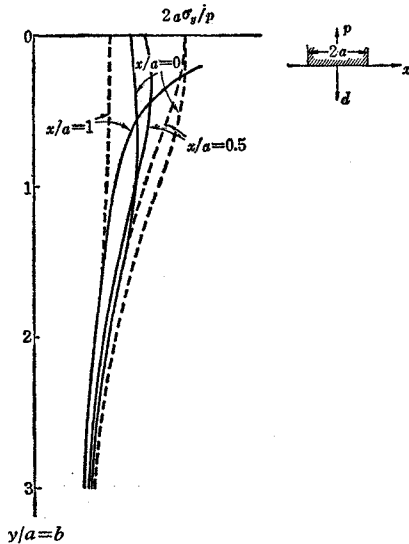


図-6 地盤内せん断応力分布  
( $T=M=0, \beta=0$ )

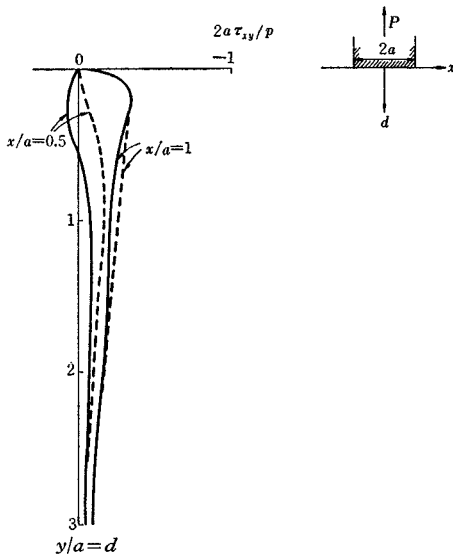
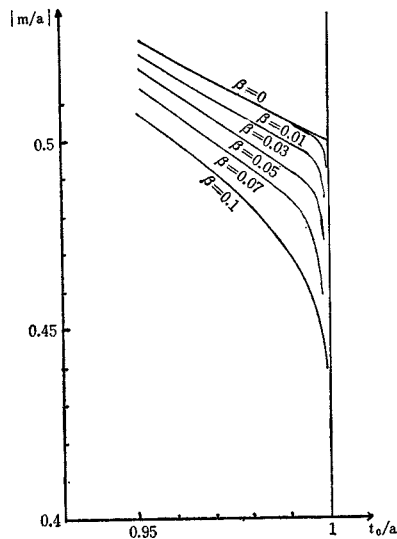


図-7  $\sigma_y=0$  を与える  $t_0$  と  $m$  との関係



$$\begin{aligned}
 & + \frac{m}{a^2(1+4\beta^2)} \left( t \cos \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right. \\
 & \left. + 2\alpha\beta \sin \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right) \right) \dots\dots\dots(42)
 \end{aligned}$$

式(42)から  $\sigma_y=0$  となるためには  $t_0$  と  $m$  の間に

$$m = -\frac{a^2}{2t_0} \frac{1+4\beta^2}{1 + \frac{2\alpha}{t_0} \beta \tan \left( \beta \log \frac{a+t}{a-t} \right)} \dots\dots(43)$$

なる条件が満足されねばならない。

この関係を端部における物理性を考慮して<sup>28)</sup>追跡することによって、 $m$  の変化に対する  $t_0$  の値がえられる。 $\beta=0$  の場合では式(43)は  $t_0=a$  の直線と  $m=0.5a$  から派生する双曲線の一部と与えられる。 $t_0=a$  は接触面の端点であり、したがって  $0 \leq |m| < 0.5a$  では引張域

は発生せず、 $|m|=0.5a$  で発生しはじめる。この点はガーリンが求めた結果<sup>29)</sup>と一致するがガーリンは分離する場合を扱ったのに対し、ここでは分離しない場合の関係が与えられる。

$\beta \neq 0$  では  $\beta=0$  の曲線にきわめて接近した曲線群であって  $0 < |m|$  で徐々に接触面内に引張領域が発達することがわかる。 $\alpha$  のかなり大きい  $\beta=0.1$  についてこれを検討すると  $|m|=0.47a$  で  $t_0=0.99a$ 、 $|m|=0.5a$  では  $t_0=0.96a$  となっている。したがって接触面幅の4~5%程度の引張領域を許すならば  $|m|=0.5a$  となり  $\beta=0$  の場合とかわらない。

### 7. 一般的な接触による地盤内応力

任意の形状で任意の荷重条件をもつ弾性体と半平面を占める弾性体との接触による半平面内応力を求めるには、2弾性体が接触条件を満足してつりあい状態にある場合の接触面における応力と変位とを境界条件として半平面内の応力を求めねばならない。

ここでは、一般的な弾性接触条件を求めるために、下半平面にたいする混合型境界条件をとりて接触面における応力と変位との関係を求める。この関係は地盤内応力および上載の弾性構造物の応力解析を行なう境界条件となるものである。

下半平面  $S^-$  のみを考え、実軸上の境界の区間  $L$  ( $a \leq t \leq b$ ) において任意の変位が与えられており、境界上の他の区間  $L'$  では荷重はないものとする。

下半平面には剛体的回転が生じず、 $|z|$  の大きな領域において  $\phi(z)$  は

$$\phi(z) = -\frac{T+iP}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \dots\dots\dots(44)$$

なる関係をもつものとする。 $T, P$  は4.に示したように無限における外力の  $x, y$  方向成分である。

境界面に存在する応力成分  $\sigma_y, \tau_{xy}$  の複素結合と、変位  $u, v$  の複素結合を示せばつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_y - i\tau_{xy} &= \phi(z) - \phi(\bar{z}) + (z-\bar{z})\bar{\phi}'(\bar{z}) \\
 2\mu(u'+iv') &= \kappa\phi(z) + \phi(\bar{z}) - (z-\bar{z})\bar{\phi}'(\bar{z})
 \end{aligned} \right\} (45)$$

ただし、式(45)が  $\phi(z)$  のみで表わされているのは  $\phi(z)$  と  $\psi(z)$  との間に式(3)の関係が成立するからである。式(45)から接触区間  $L$  においてつぎの条件がえられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi^+(t) - g\phi^-(t) &= g(t) \\
 \phi^+(t) - \phi^-(t) &= p(t)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

ただし、 $g(t) \equiv Df'(t) = D(f_1'(t) + if_2'(t))$

( $'$  は  $t$  にかんする微分回数を示す)

で、 $f_1(t)$  は実軸方向、 $f_2(t)$  は虚軸方向の変位を表わす関数であり、 $p(t)$  は境界上に作用する応力分布を表わす関数である。 $D, g, p(t)$  などは境界条件(A),(B)によって異なる関係を表わすから、これを表-3にまとめて示した。また、ここでは  $-\sigma_y^-(t) = P(t), \tau_{xy}^-(t)$

=T(t) として表わしている

表-3

	境界条件 (A)	境界条件 (B)
$g$	$-\kappa_1$	$-e^{2\pi i \beta} \left( \beta = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} k \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1} \right)$
$r$	$\frac{1}{2} - i \frac{\log \kappa_1}{2\pi}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} k \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 1}$
$g(t)$	$2\mu_1(f_1'(t) + if_2'(t))$	$\frac{4i\mu_1(1+ik)e^{\pi i \beta} \cos \pi \beta}{\kappa_1 + 1} f_2'(t)$
$p(t)$	$P(t) + iT(t)$	$(1+ik)P(t)$
$C_0$	$-\frac{T+iP}{2\pi}$	$\frac{P(1+ik)e^{\pi i \beta}}{2\pi}$

式 (46) の第 1 式を満足する  $\phi(z)$  は式 (29) から求まる。

いま,  $f^i(t)$  が任意の多項式で表わされるものとして

$$f^i(t) = \sum_{k=0}^m A_k t^k \dots\dots\dots(47)$$

と表わす。

ただし,  $A_k$  は一般には複素数とする。

このように表わして式 (46) の第 1 式の積分を行なえば

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{D}{1-g} (f'(z) - X(z)\eta_1(z)) + C_0 X(z) \\ &= X(z) \left( \frac{D}{1-g} \eta_2(z) + C_0 \right) \dots\dots\dots(48) \end{aligned}$$

となる。

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \frac{g(z)}{X(z)} &= \sum_{k=0}^q \alpha_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{-k} z^{-k} \\ &= D(\eta_1(z) + \eta_2(z)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

$$q = m + 1$$

であって

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(z) &= \left. \begin{aligned} &\sum_{j=0}^{m+1} \sum_{n=0}^j \sum_{l=0}^n \frac{\Gamma(r-1)\Gamma(r+n-l-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(r-l+1)} \\ &\cdot (-1)^l \binom{n}{l} a^l b^{n-l} A_{m-j+n} z^{m-j+1} \end{aligned} \right\} \\ \eta_2(z) &= \left. \begin{aligned} &\sum_{j=m+2}^{\infty} \sum_{n=0}^j \sum_{l=0}^n \frac{\Gamma(r-1)\Gamma(r+n-l-1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(r-l+1)} \\ &\cdot (-1)^l \binom{n}{l} a^l b^{n-l} A_{m-j+n} z^{m-j+1} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

である。また,  $\Gamma$  は Gamma 関数である。

一方, 式 (46) から  $\phi^-(t)$  を消去すれば

$$\left( \frac{g-1}{g} \right) \phi^+(t) + \frac{1}{g} g(t) = p(t) \dots\dots\dots(51)$$

である。

式 (48) から

$$\begin{aligned} \phi^+(t) &= \frac{1}{1-g} [Df'(t) - DX(t)\eta_1(t) \\ &\quad + (1-g)C_0 X(t)] \end{aligned}$$

であるから, これを式 (51) に代入すれば

$$p(t) = \frac{X(t)}{g} (D\eta_1(t) + (1-g)C_0) \dots\dots\dots(52)$$

となって, 任意の表面変形によって発生する表面応力が求まる。地盤内応力は表面変形がえられると, 式 (48) および式 (4) から求まる。

### 8. 解の適用と考察

接触条件を満足する変形の関数を決定するには, 基礎地盤上に構築された構造物の応力解析を行なわねばならない。

しかし, 接触応力は外力の各成分とつぎの関係をもたなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \int_L (P(t) + iT(t)) dt &= -(P - iT) \\ R_e \left\{ - \int_L t(P(t) + iT(t)) dt \right\} &= M \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

これを用いて外力の合力と変形の係数間に成立すべき関係を求める。

式 (52) を

$$P(t) + iT(t) = E_0 X(t) \sum_{j=0}^{m+1} N_j t^{m+1-j} \dots\dots\dots(54)$$

と表わす。

ただし

$$\begin{aligned} \eta_1(t) + \frac{1-g}{D} C_0 &= \sum_{j=0}^{m+1} N_j t^{m+1-j} \\ E_0 &= \frac{D}{g} \end{aligned}$$

である。

式 (54) は項別積分可能で

$$\int_L (P(t) + iT(t)) dt = E_0 \sum_{j=0}^{m+1} N_j \int_L X(t) \cdot t^{m+1-j} dt$$

となる。

ここで

$$\int_L X(t) \cdot t^{m+1-j} dt = \int_{-a}^a (t+a)^{-r} (t-a)^{r-1} \cdot t^{m+1-j} dt$$

であって, この積分は適当な演算によって第 1 種 Euler 積分となる。

ゆえに

$$\begin{aligned} P - iT &= (-1)^r E_0 \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{r=0}^{m+1-j} N_j Q_r (2a)^r \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(5-r+1) \cdot \Gamma(r)}{\Gamma(r+1)} \dots\dots\dots(55) \end{aligned}$$

となる。

ただし,

$$(t-a)^{m+1-j} = \sum_{r=0}^{m+1-j} Q_r t^r$$

と表わしている。

式 (53) の第 2 式にたいしても同じような演算を行なうと

$$\begin{aligned} M &= R_e \left\{ (-1)^r E_0 \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{r=0}^{m+2-j} N_j Q_r (2a)^r \right. \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(5-r+1) \cdot \Gamma(r)}{\Gamma(r+1)} \end{aligned} \dots\dots\dots(56)$$

となる。



式 (55), (56) は, 関数  $f(t)$  の係数が外力の成分やモーメントとの間に常に満足すべき関係である。

したがって, 未知数である  $f(t)$  の係数が3個の場合には, 式 (55), (56) からその値を決定することができる。

これを利用して, 関数  $f(t)$  の次数を適当に仮定して外力の合力のみによって  $f(t)$  の係数の値を求め, 接触圧による地盤内応力の近似値を求めることができる。

つぎに, 式 (52) で表わした接触応力をつぎのように書き直す。

境界条件 (A)

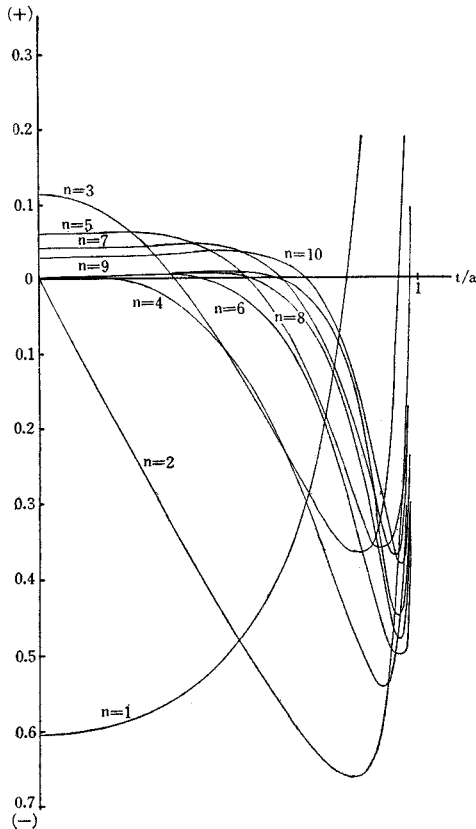
式 (8) から

$$\frac{1}{X(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (B_{2s-1} z^{-(2s-1)} + i B_{2s} z^{-2s})$$

と展開できるから,

$$P(t) + iT(t) = E_0 X(t) \left[ \left\{ - \sum_{j=0}^{k_1} \sum_{s=0}^j B_{2(j-s)} \right. \right. \\ \cdot (A_{m-2s} t + A_{m-2s-1}) t^{m-2j-1} \\ + \sum_{j=0}^{k_2} \sum_{s=0}^j B_{2(j-s)-1} (A_{m-2s}^* t + A_{m-2s-1}^*) t^{m-2j} \left. \right\} \\ + i \left\{ \sum_{j=0}^{k_3} \sum_{s=0}^j B_{2(j-s)-1} (A_{m-2s} t + A_{m-2s-1}) t^{m-2j} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{k_4} \sum_{s=0}^j B_{2(j-s)} (A_{m-2s}^* t + A_{m-2s-1}^*) t^{m-2j-1} \right\} \right]$$

図-8  $R_c\{A_{nj}\} \kappa=3.0$



$$+ \frac{1-g}{D} C_0 \left. \right] \dots \dots \dots (57)$$

である。

ただし,

$$f'(t) = f'_1(t) + i f'_2(t) = \sum_{k=0}^{m^*} A_k^* t^k + i \sum_{k=0}^m A_k t^k$$

で,  $k_1 \sim k_4$  は  $t$  のべきが負にならない最大の整数をとる。

なお, この場合, 実用的な演算で特に端部の状態を問題にせぬかぎり

$$X(t) = \frac{\sqrt{\kappa}}{i \sqrt{a^2 - t^2}} \dots \dots \dots (58)$$

と考えてさしつかえない。

境界条件 (B) ( $k=0$  の場合)

$$\frac{1}{X(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} B_{s-1} z^{1-s}$$

と展開すれば

$$P(t) = E_0 X(t) \left[ \sum_{j=0}^{k_1} \sum_{s=0}^j \{ B_{2(j-s)-1} (A_{m-2s} t \right. \\ + A_{m-2s-1}) t^{m-2j} + B_{2(j-s)} (A_{m-2s} t \\ \left. + A_{m-2s-1}) t^{m-2j-1} \} + \frac{1-g}{D} C_0 \right] \dots \dots (59)$$

である。

ただし,

図-9  $R_c\{A_nj\} \kappa=2.3$

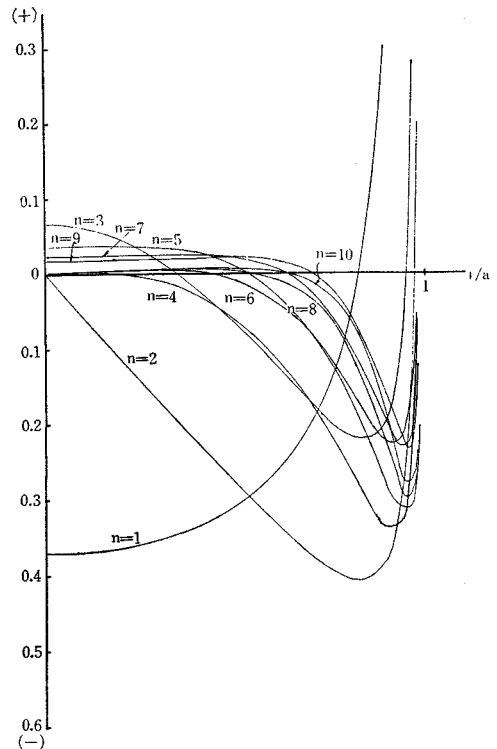


図-10  $R_c\{A_{n,j}\} \kappa=1.4$

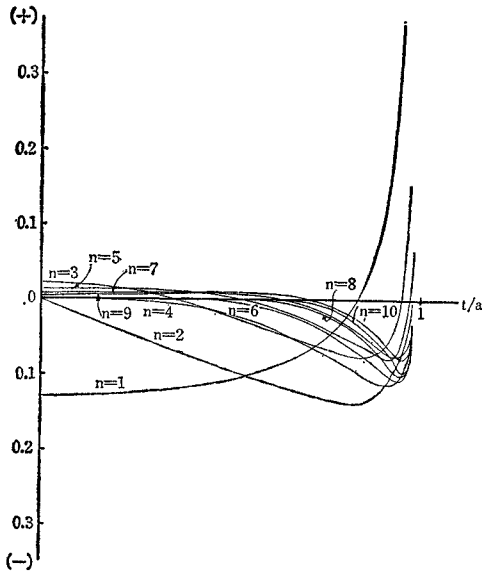


図-12  $I_m\{A_{n,j}\} \kappa=2.2$

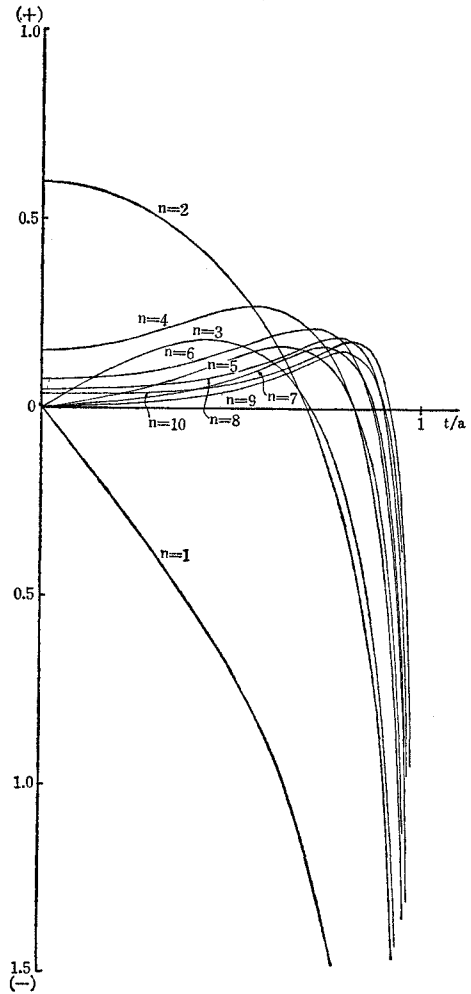
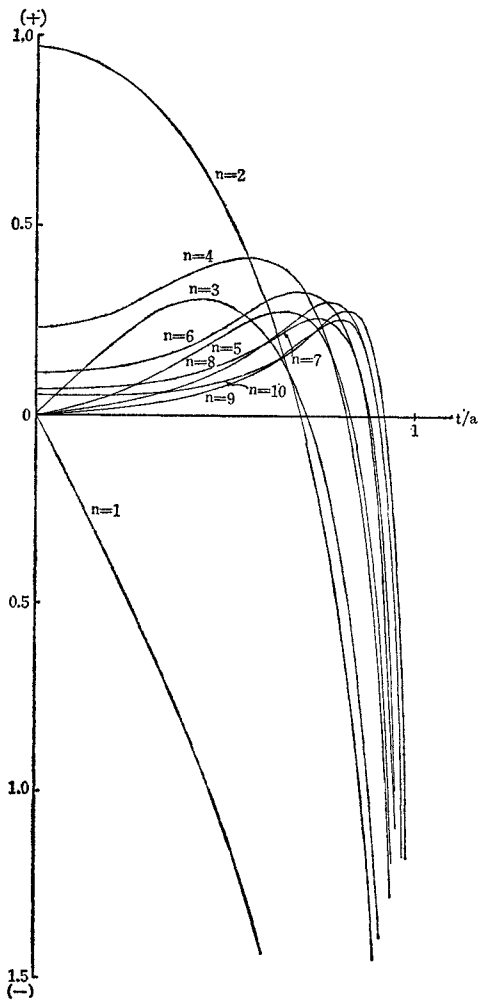


図-11  $I_m\{A_{n,j}\} \kappa=3.0$



$$f'(t) = i f'_2(t) = i \sum_{k=0}^m A_k t^k$$

$$\text{で } X(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

である。

これらのことから、接触応力や地盤内応力にかんして以下のような考察ができる。

(1) 式(58)を認めるものと式(57)をみれば、密着された接触の場合の接触応力では、垂直方向の変形を表わす多項式の次数が  $m$  次であれば垂直応力に寄与する多項式の次数は  $m$  次で、接線応力には  $m-1$  次で寄与する。同じように、接線方向の変形を表わす多項式の次数が  $m^*$  次であれば接線応力に寄与する多項式の次数は  $m^*$  次で、垂直応力には  $m^*-1$  次で寄与する。

(2) 任意表面変形が与えられた場合に表面応力を求めるため、変形が  $f(t) = t^n$  で与えられたものとして応力を求める係数を求めた。この係数は  $A_{n,j}$ 、 $J_j$  であらわされ、式(52)から

$$P_j = \frac{D}{g} a_n A_{n,j} + \frac{1-g}{g} C_0 J_j$$

図-13  $I_m\{A_{nj}\}$   $\kappa=1.4$

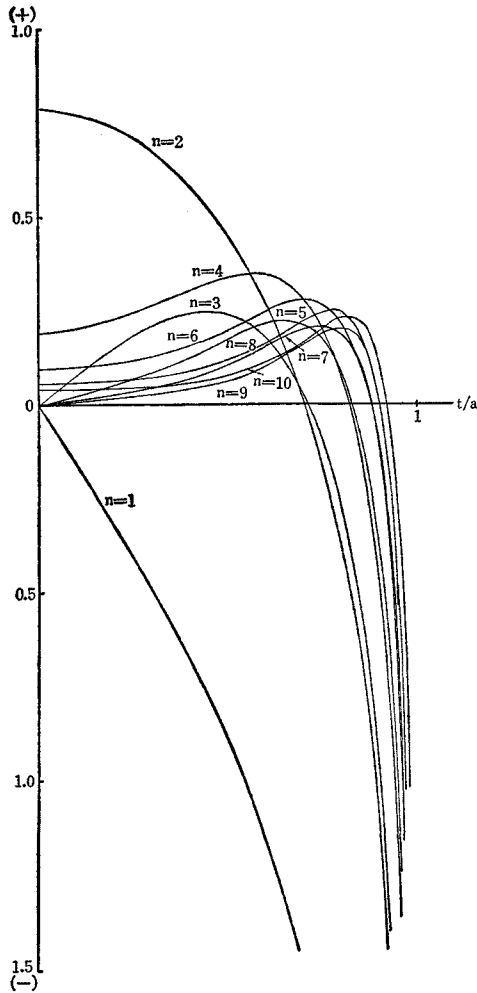
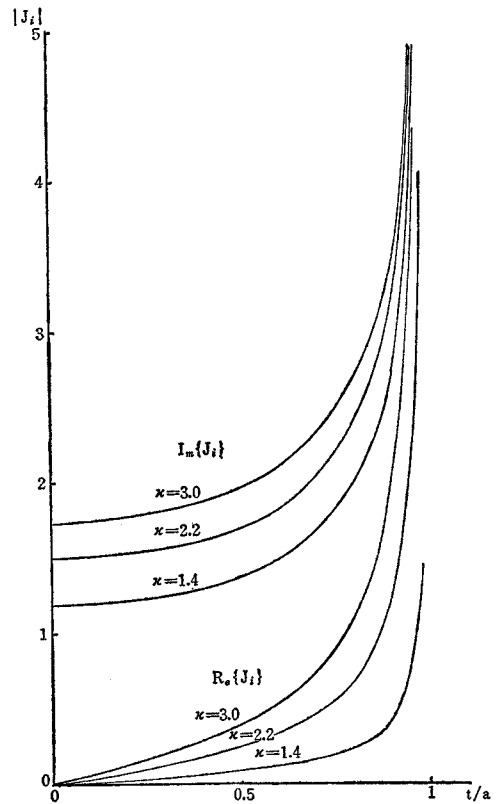


図-14  $J_j$

(ただし、 $J_m\{J\}$  に対しては  $J < 0$  で  $R_e\{J\}$  に対しては  $J > 0$  の値をとる)



によって応力を与える。

ただし、 $a_n$  は  $t^n$  の係数で複素数、 $j = t_j/a$  は  $0 < t/a < 1$  内の点を表わす。したがって任意点の応力は各係数の実部および虚部について演算して求めることができる。なお、 $A_{nj}$ 、 $J_j$  はその一部を 図-8~13 に示した。

(3) 式 (55)、(56) から接触による地盤内応力を近似的に求める際必要となる垂直、接線方向の変形を表わす多項式の次数は、(1)~(2) を考慮して定めればよい。

(4) 式 (48) によれば地盤内応力は表面変形による成分と剛体圧による成分の和として与えられることがわかる。このうち表面変形による成分は  $\eta_2(z)$  の性質によって、剛体圧に比して  $1/z$  倍で減少する。

### 9. あとがき

ここでは、構造物~地盤系の接触問題のうち地盤内応力にのみ注目し、2つの半平面の接触によって生じる弾性半平面内の応力解を求め、ついで任意の接触によって生じる弾性半平面内の応力を考えるにあたり、境界上

の変形と応力との関係をもとめ、それらの結果と式の適用について研究した。

しかし、構造物地盤系の挙動についての接触問題としての研究は、ここで求めた結果を利用して構造物の応力解析法を研究して完了するものであって、このためには式 (52) を有効に利用することを考えている<sup>30)</sup>。

また、ここでは等方均質な弾性体を対象としているが、岩盤や砂、粘土などの実際的な基礎地盤の性質を考慮して解析を行なうよう今後の研究をすすめねばならない。

最後に本研究につきたえずご指導、ご教示をたまわっている本学沢田敏男教授に厚くお礼申し上げます。なお、本研究は昭和 40 年度文部省科学研究費 (第 6 部) の交付をうけて行なわれた研究の一部であって、計算には京都大学計算センター KDC-II を利用したことを付記する。

### 参考文献

- 1) Hertz H.: "Über die Berührung fester elastischer Körper", Jour. für reine und angewandte Mathematik, Vol. 92, 1881.
- 2) Mindlin, R.D.: "Compliance of Elastic Bodies in Contact", Jour. of Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 71, 1949.
- 3) Muskhlishvili, N.I.: Some Basic Problems of the

- Mathematical Theory of Elasticity”, P. Noordhoff. Groningen Holland, 1953.
- 4) ガーリン著・佐藤常三訳：“弾性接触論”，日刊工業新聞社，昭和33年.
  - 5) Savin, G.N.: “Stress Concentration around Holes”, Pergamon Pr., 1961.
  - 6) Popov, G. Ia.: 数多い一連の論文, P.M.M.
  - 7) Aleksandrov, V.M.: 数多い一連の論文, P.M.M.
  - 8) Okubo, H.: “On the Two Dimensional Problem of a Semi-infinite Elastic Body Compressed by an Elastic Plane”, Quart. Jour. of Mech. and Appl. Math., Vol. 4, Pt. 3, 1951.
  - 9) 例えば, Brahtz, J.H.A.: “The Stress Function and Photo-elasticity Applied to Dam”, Trans. ASCE, Sept. 1935.  
Zienkiwicz, O.C.: “Aplicação das técnicas de diferenças finitas ao estudo das barragens edas cascas”, Ministerio das obras Publicas, memoria No. 161, Lisbon, 1961.
  - 10) 石原研而：“二層地盤内の応力伝播に関する一考察”，土木学会論文集第68号，昭和35年.
  - 11) Hruban, K.: “The Basic Problem of a Nonlinear and Nonhomogenous Half Space”, Proc. of the I. U.T.A.M. Symposium, Pergamon Pr., 1958.
  - 12) Barden, L.: “Stresses and Displacements in a Cross-Anisotropic Soil”, Geotechnique, Vol. 13, 1963.
  - 13) 川本眺万：“基礎地盤の変位状態におよぼす地山の異方性の影響について”，土木学会論文集，昭和40年.
  - 14) 沢田敏男・長谷川高士：“接触問題における変位および応力解析”，農業土木学会講演要旨，昭和39年.
  - 15) Rongved, L.: “Forces in the Interior of One of Two Joined Semi-infinite Solids”, Proc. Sec. Mid-west Conf. on Solid Mech., Lafayette, Ind., 1955.
  - 16) Frasier, J.T.: “Force in the Plane of Two Joined Semi-infinite Plate”, Jour. of Appl. Mech., Dec. 1957.
  - 17) Sundara Raja Iyengar, K.T.: “Elastic Stress Analysis of Joined Half-plane”, Jour. of Franklin Institute, Vol. 278, No. 4, Oct. 1964.
  - 18) Dunders, J.: “The Elastic Plane with a Circular Insert, loaded by a Radial Force”, Jour. of Appl. Mech. Vol. 28, Trans. ASME, Vol. 83, Ser. E, 1961.
  - 19) Dunders, J.: “Forces in Smoothly joined Elastic Half-planes”, Jour. of EM Div. of ASCE, Vol. 88, 1962.  
Szelagowski, E.: “Partial Junction between Two Semi-Plane Adjacent Discs”, Bulletin De l’academie Polonaise des Science, Vol. 13, No. 2, 1965.
  - 20) Erdogan, F.: “Stress Distribution in a Nonhomogenous Elastic Plane with Cracks”, Jour. of Appl. Mech. Vol. 30, Trans. ASME, Ser. E, 1963. F. Erdogan: “Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Crack”, Jour. of Appl. Mech. Vol. 32, Trans. ASME, Ser. E, June 1965.
  - 21) 沢田敏男・長谷川高士：“接触圧による地盤内弾性応力について”，農業土木学会講演要旨，昭和41年.
  - 22) Muskhlishvili, N.I.: “Singular Integral Equations”, P. Noordhoff, Groningen Holland, 1953.
  - 23) 3) 参照
  - 24) Sokolnikoff, I.S.: “Mathematical Theory of Elasticity”, Macgraw-hill, 1956.
  - 25) Mikhlin, S.G.: “Integral Equations”, Pergamon Pr., 1957.
  - 26) 22) p. 284, または 3) pp. 452 参照
  - 27) 3) p. 427~450 参照
  - 28) 3) p. 466~367 参照
  - 29) 4) p. 46~53 参照
  - 30) 沢田敏男・長谷川高士：“多角形領域の混合境界値問題”，農業土木学会講演要旨，昭和42年  
(1966. 7.11・受付)