

レールに作用する衝撃荷重の影響について

正員 最上 幸夫*

ON THE EFFECT OF THE IMPULSE LOAD ACTING ON THE RAIL

(Trans. of JSCE 1952)

Sachio Mogami, C.E. Member.

Synopsis In this paper the writer studied the case where the traveling load suddenly acted on the rail, which is so called "the temporary phenomena" and explained an approximate solution of the dynamic stress in rail and tie given by such impulse loads.

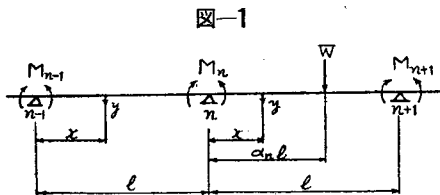
要旨 本文は走行荷重が突然レールに作用して衝撃効果を与えるような場合、いわゆる過渡現象について考察し、このような衝撃荷重によつてレール及び枕木に生ずる動的応力の近似的計算法について述べたものである。

1. 緒言

レールの応力計算については既に多数の研究が発表されており、動的荷重によるレールの撓み振動についても相当詳しく論ぜられているが¹⁾、著者は走行荷重がレールに衝撃的に作用する場合の応力計算法について研究して一近似的解法を導き、静的計算による応力値と比較し、衝撃効果について検討を行った。しかし誘導式はそのままでは解けないため、簡単な仮定を設けて近似的な取り扱いをしたので、この場合近似的に性質を調べるに過ぎない点は予めお断りしておく。なお計算の基礎としては、レールを等間隔の枕木で支持された無限連続梁と仮定している。衝撃荷重の取り扱いは実際問題として、走行車輛がレール接目や分岐を通過する場合とか、車輪もしくはレールの一部に特殊な不整が認められるような場合の、理論解の有力な手掛りとなりうるものと考えられる。

2. 算式の誘導

従来行われている動的計算法では、レールを弾性床上の桁として取り扱っているが、ここでは等間隔の枕木支点を有する無限連続梁として取り扱うことにする。いま連続梁の一部をとりだし、これに一走行荷重 W が作用する場合を考えると(図-1参照)、静的荷重の場合と異なつて動的作用のために梁に慣性抵抗を生じ、それだけ余分の外力が作用したことになる。従つて動的の場合は、静的釣合式に慣性力による影響が附加されることになる²⁾。図-1において、一荷重 W が n 支点より $\alpha_n l$ の距離にあるものとし、 n 支点より x の距離にある任意点の静的沈下量 y は次式で与えられる³⁾。



$$y = \frac{M_n}{6EI} \left(2lx - 3x^2 + \frac{x^3}{l} \right) + \frac{M_{n+1}}{6EI} \left(lx - \frac{x^3}{l} \right) + \frac{W}{6EI} \{ \alpha_n l^2 x (1 - \alpha_n) (2 - \alpha_n) + (x - \alpha_n l)^3 - (1 - \alpha_n) x^3 \} + y_{n+1} \frac{x}{l} + y_n \left(1 - \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (1)$$

ここに M_n, M_{n+1} : それぞれ $n, n+1$ 支点の支点モーメント, EI : レールの曲げ剛性, y_n, y_{n+1} : それぞれ $n, n+1$ 支点の沈下量, 上式中 $(x - \alpha_n l)^3$ は $0 \leq x \leq \alpha_n l$ では 0 となる。

慣性力の影響を考慮するに当り、近似的にこの静的沈下量を用いることにすれば、この慣性力によつて n 支点到に生ずる傾きの変化は、梁の微小部分 dx によつては、レール密度を ρ 、レール断面積を A とすれば、 $\frac{\rho A l}{6EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \left(2x - \frac{3x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right)$ となるから、これをスパン全体について積分すればよく、これを $\Delta \theta_n$ で表わせば、

$$\Delta \theta_n = \frac{\rho A l}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l y \left(2x - \frac{3x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) dx$$

* 山口大学講師, 工学部土木教室

この式に式 (1) の y を代入すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_n = & \frac{32}{420} \frac{\rho Al^5}{(6EI)^2} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{31}{420} \frac{\rho Al^5}{(6EI)^2} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} + W \frac{\rho Al^6}{(6EI)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{32}{420} \alpha_n - \frac{2}{15} \alpha_n^3 \right. \\ & \left. + \frac{1}{10} \alpha_n^5 - \frac{1}{20} \alpha_n^6 + \frac{1}{140} \alpha_n^7 \right) + \frac{8}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ただし $(x-\alpha_n l)^3$ の項は積分範囲を $\int_{\alpha_n l}^l$ とする。

次に l_n スパンの沈下量は、このスパン上に荷重はないから、

$$y = \frac{M_{n-1}}{6EI} \left(2lx - 3x^2 + \frac{x^3}{l} \right) + \frac{M_n}{6EI} \left(lx - \frac{x^3}{l} \right) + y_n \frac{x}{l} + y_{n-1} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (3)$$

この y を用い l_n スパンの慣性力が n 支点に及ぼす傾きの変化 $\Delta\theta_n'$ は前同様にして、

$$\begin{aligned} \Delta\theta_n' = & -\frac{\rho Al}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l y \left(x - \frac{x^3}{l} \right) dx \\ = & -\left(\frac{31}{420} \frac{\rho Al^5}{(6EI)^2} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{116}{420} \frac{\rho Al^5}{(6EI)^2} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 y_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{8}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \right) \dots \dots (4) \end{aligned}$$

一方静的釣合の関係では、 l_{n+1}, l_n スパンが n 支点に及ぼす傾きの変化は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{l} + \frac{l}{6EI} \{ 2M_n + M_{n+1} + W\alpha_n l (1 - \alpha_n) (2 - \alpha_n) \} \dots \dots \dots (5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l} - \frac{l}{6EI} (2M_n + M_{n-1}) \dots \dots \dots (6)$$

従つて動的の場合には、式 (5) の右辺に $\Delta\theta_n$ 、式 (6) の右辺に $\Delta\theta_n'$ を加えたものが等しくなる。この関係を整理すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} M_{n-1} + \frac{31}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + 4M_n + \frac{148}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + M_{n+1} + \frac{31}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} \\ = \frac{6EI}{l^2} (2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) - Wl (2\alpha_n - 3\alpha_n^2 + \alpha_n^3) - W \frac{\rho Al^5}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{32}{420} \alpha_n - \frac{2}{15} \alpha_n^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{10} \alpha_n^5 - \frac{1}{20} \alpha_n^6 + \frac{1}{140} \alpha_n^7 \right) - \rho Al^2 \left(\frac{7}{60} \frac{\partial^2 y_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{16}{60} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial t^2} \right) \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

上式は動的の場合支点モーメントと支点沈下の間成立すべき条件式を示す。次に n 支点の反力 R_n は静的釣合の関係では、

$$R_n = R_{n,n} + R_{n,n+1} - \frac{2M_n - M_{n-1} - M_{n+1}}{l} \dots \dots \dots (8)$$

ここに、 $R_{n,n}, R_{n,n+1}$: それぞれ l_n, l_{n+1} スパン上の荷重によつて生ずる n 支点の反力 (いまの場合一荷重のみであるから $R_{n,n} = 0$ である)。これに対し動的には慣性力の影響が附加される。この附加反力は前同様に求められ、 l_{n+1}, l_n スパンの慣性力による n 支点の反力増分 $\Delta R_n, \Delta R_n'$ はそれぞれ次の如くなる。

$$\begin{aligned} \Delta R_n = & \int_0^l \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{8}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} \\ & + W \frac{\rho Al^4}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{15} \alpha_n - \frac{1}{3} \alpha_n^3 + \frac{1}{4} \alpha_n^4 - \frac{1}{20} \alpha_n^5 \right) + \frac{\rho Al}{6} \frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial t^2} + \frac{\rho Al}{3} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta R_n' = & \int_0^l \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{x}{l} dx \\ = & \frac{7}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{8}{60} \frac{\rho Al^3}{6EI} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{\rho Al}{3} \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} + \frac{\rho Al}{6} \frac{\partial^2 y_{n-1}}{\partial t^2} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

従つて動的な場合の支点反力 R_n は次の如くなる。

$$R_n = R_{n,n+1} - \frac{2M_n - M_{n-1} - M_{n+1}}{l} + \Delta R_n + \Delta R_n' \dots \dots \dots (11)$$

いま枕木支点の反力係数を K (近似的に各支点一定値とする) で表わせば、 $R_n = Ky_n, R_{n+1} = Ky_{n+1}, R_{n-1} = Ky_{n-1}, \dots$ とおけるから、

$$y_n = \frac{R_n}{K}, y_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{K}, y_{n-1} = \frac{R_{n-1}}{K} \dots \dots \dots (12)$$

一般に $\Delta R_n, \Delta R_n'$ 等は微小な値で実際計算には無視しうる程度であるから、式 (7), (9), (10) の $\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y_{n-1}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y_{n+1}}{\partial t^2}$ 等に対しては近似的に静的関係式 (8) を用い、式 (11), (12) の関係より式 (7) を整理すれば

結局次式をうる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{6EI}{Kl^3} M_{n-2} + \frac{7}{30} \frac{\rho Al}{K} \frac{\partial^2 M_{n-2}}{\partial t^2} + \left(1 - 4 \frac{6EI}{Kl^3}\right) M_{n-1} + \left(\frac{31}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI} + \frac{1}{15} \frac{\rho Al}{K} - 9 \frac{EI \rho A}{K^2 l^2}\right) \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} \\
 & + \left(4 + 6 \frac{6EI}{Kl^3}\right) M_n + \left(\frac{37}{105} \frac{\rho Al^4}{6EI} - \frac{3}{5} \frac{\rho Al}{K} + 16 \frac{EI \rho A}{K^2 l^2}\right) \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \left(1 - 4 \frac{6EI}{Kl^3}\right) M_{n+1} \\
 & + \left(\frac{31}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI} + \frac{1}{15} \frac{\rho Al}{K} - 9 \frac{EI \rho A}{K^2 l^2}\right) \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} + \frac{6EI}{Kl^3} M_{n+2} + \frac{7}{30} \frac{\rho Al}{K} \frac{\partial^2 M_{n+2}}{\partial t^2} \\
 & = \frac{6EI}{Kl^2} (2R_{n,n+1} - R_{n+1,n+1}) + W \frac{\rho Al^2}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3}{20} \alpha_n - \frac{1}{2} \alpha_n^3 + \frac{1}{2} \alpha_n^4 - \frac{3}{20} \alpha_n^5\right) \\
 & - W \frac{\rho Al^5}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{32}{420} \alpha_n - \frac{2}{15} \alpha_n^3 + \frac{1}{10} \alpha_n^5 - \frac{1}{20} \alpha_n^6 + \frac{1}{140} \alpha_n^7\right) - Wl(2\alpha_n - 3\alpha_n^2 + \alpha_n^3) \dots \dots \dots (13)
 \end{aligned}$$

本式は一動荷重 W が l_{n+1} スパン上にある場合の支点モーメントと荷重の間に成立すべき条件式で、動的5連モーメントの定理と呼ぶべきものである。式(13)は n 支点に関するものであるが、支点 $n+1$ については上と同様に求められ、左辺の係数は全く同様になるから簡単のため左辺を (M_{n+1}) の記号で示すことにすれば、

$$\begin{aligned}
 (M_{n+1}) &= \frac{6EI}{Kl^2} (2R_{n+1,n+1} - R_{n,n+1}) + W \frac{\rho Al^2}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{10} \alpha_n - \frac{1}{4} \alpha_n^4 + \frac{3}{20} \alpha_n^5\right) \\
 &- W \frac{\rho Al^5}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{31}{420} \alpha_n - \frac{4}{15} \alpha_n^3 - \frac{7}{60} \alpha_n^5 + \frac{1}{20} \alpha_n^7 - \frac{1}{140} \alpha_n^7\right) - Wl(\alpha_n - \alpha_n^3) \dots \dots (14)
 \end{aligned}$$

さらに $n-1$, $n+2$ 支点については次の如くなる。

$$(M_{n-1}) = -\frac{6EI}{Kl^2} R_{n,n+1} - W \frac{\rho Al^2}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{15} \alpha_n - \frac{1}{3} \alpha_n^3 + \frac{1}{4} \alpha_n^4 - \frac{1}{20} \alpha_n^5\right) \dots \dots \dots (15)$$

$$(M_{n+2}) = -\frac{6EI}{Kl^2} R_{n+1,n+1} - W \frac{\rho Al^2}{K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{7}{60} \alpha_n - \frac{1}{6} \alpha_n^3 + \frac{1}{20} \alpha_n^5\right) \dots \dots \dots (16)$$

その他の支点の場合は、右辺の項はすべて 0 となる。

また一方各支点の反力は次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 R_n &= R_{n,n+1} - \frac{2M_n - M_{n-1} - M_{n+1}}{l} + \frac{\rho Al^3}{6EI} \left(\frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{16}{60} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2}\right) \\
 &+ \frac{\rho A}{6K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (M_{n-2} + 2M_{n-1} - 6M_n + 2M_{n+1} + M_{n+2}) + W \frac{\rho Al^4}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{15} \alpha_n - \frac{1}{3} \alpha_n^3\right. \\
 &\left. + \frac{1}{4} \alpha_n^4 - \frac{1}{20} \alpha_n^5\right) \dots \dots \dots (17) \\
 R_{n+1} &= R_{n+1,n+1} - \frac{2M_{n+1} - M_n - M_{n+2}}{l} + \frac{\rho Al^3}{6EI} \left(\frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{16}{60} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n+2}}{\partial t^2}\right) \\
 &+ \frac{\rho A}{6K} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (M_{n-1} + 2M_n - 6M_{n+1} + 2M_{n+2} + M_{n+3}) + W \frac{\rho Al^4}{6EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{7}{60} \alpha_n - \frac{1}{6} \alpha_n^3\right. \\
 &\left. + \frac{1}{20} \alpha_n^5\right)
 \end{aligned}$$

その他の支点は上と同様で、ただ W の項がなくなるのみであるから省略する。

式(13)~(16)の5連モーメント式は、原式のままで解けないので、近似的な仮定を設けて解くことにする。また右辺に含まれる α_n は、荷重の衝撃が支点で始まった場合は、車輛の速度を v として、 $\alpha_n l = vt$, $\alpha_n = \frac{v}{l} t$ とおけばよく、衝撃が n 支点より x_0 の距離で始まった場合は、 $\alpha_n = \frac{2x_0 + vt}{l}$ として上式を使えばよい。

3. 誘導式の実用的近似法

既に述べた如く、誘導された動的5連モーメントの式はそのままでは解けないから、少し無理ではあるが、次に示す要領によつて近似解を求める。いま式(13)で、初期条件を $t=0$ で $M_n = M_{n+1} = M_{n-1} = \dots = 0$ とし、この式に Laplace の変換を施し、右辺を簡単のため $F(p)$ で表わせば、次の如くかける。

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{6EI}{Kl^3} + \frac{7}{30} \frac{\rho Al}{K} p^2\right) \bar{M}_{n-2} + \left\{\left(1 - 4 \frac{6EI}{Kl^3}\right) + \left(\frac{31}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI} + \frac{1}{15} \frac{\rho Al}{K} - 9 \frac{EI \rho A}{K^2 l^2}\right) p^2\right\} \bar{M}_{n-1} \\
 & + \left\{\left(4 + 6 \frac{6EI}{Kl^3}\right) + \left(\frac{37}{105} \frac{\rho Al^4}{6EI} - \frac{3}{5} \frac{\rho Al}{K} + 16 \frac{EI \rho A}{K^2 l^2}\right) p^2\right\} \bar{M}_n + \left\{\left(1 - 4 \frac{6EI}{Kl^3}\right) + \left(\frac{31}{420} \frac{\rho Al^4}{6EI}\right.\right.
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{15} \frac{\rho Al}{K} - 9 \frac{EI \rho A}{K^2 l^2} p^2 \} \bar{M}_{n+1} + \left(\frac{6 EI}{K l^3} + \frac{7}{30} \frac{\rho Al}{K} p^2 \right) \bar{M}_{n+2} = F(p) \dots (18)$$

ここに、 $\bar{M}_{n-2}, \bar{M}_{n-1}, \dots$ はそれぞれ M_{n-2}, M_{n-1}, \dots の裏函数を示す。また p は演算子を表わす。

上式を見ると、各モーメントの係数が異なり、このため上式のままではとけないが、この式の構成上中央のモーメントの項が他に比して weight が大きく、その変動状態が最も大きい影響を及ぼすものと仮定すれば、上式は計算に示す如く一般形として、次の如く表わされる。すなわち

$$\bar{M}_{n-2} - R \bar{M}_{n-1} + S \bar{M}_n - R \bar{M}_{n+1} + \bar{M}_{n+2} = \frac{K l^3}{6 EI} \frac{F(p)}{1 + \beta^2 p^2} = f_1(p) \dots (19)$$

ここに、 R, S, β は常数を表わす。従つて上式は差分法によつて解くことができる⁵⁾。他の支点についても同様の式が得られ、簡単のため前同様の記号を使えば、

$$(\bar{M}_{n+1}) = \frac{K l^3}{6 EI} \frac{G(p)}{1 + \beta^2 p^2} = g_1(p) \dots (20)$$

$$(\bar{M}_{n-1}) = \frac{K l^3}{6 EI} \frac{H(p)}{1 + \beta^2 p^2} = f_2(p) \dots (21)$$

$$(\bar{M}_{n+2}) = \frac{K l^3}{6 EI} \frac{I(p)}{1 + \beta^2 p^2} = g_2(p) \dots (22)$$

その他の支点に関するものは、右辺はすべて 0 となる。以上の関係を用いて \bar{M}_n の一般解を求め、無限連続梁の条件として $n = \pm \infty$ で $\bar{M}_n = 0$ を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} n \geq 1, \bar{M}_n &= \rho_1^n (A \cos n\varphi_1 + B \sin n\varphi_1) \\ n \leq 0, \bar{M}_n &= \rho_2^n (C \cos n\varphi_2 + D \sin n\varphi_2) \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

なる解が一般形として得られる。この関係を式 (19)~(22) に代入して A, B, C, D をきめ、これを (23) に入ると \bar{M}_n の値が求められる。結局 \bar{M}_n は f_1, g_1, f_2, g_2 によつて表わされ、一般形として次の形をとる。

$$\bar{M}_n = L \frac{ap^5 + bp^4 + 2cp^3 + 6dp^2 + 24ep + 120h}{p^5(1 + \beta^2 p^2)} \dots (24)$$

ここに、 L, a, b, c, d, e, h : 常数。故に上式を逆変換して表領域に直せば、

$$\begin{aligned} M_n = L \{ & (b - 6\beta^2 d + 120\beta^4 h)t + (c - 12\beta^2 e)t^2 + (d - 20\beta^2 h)t^3 + et^4 + ht^5 \\ & + (a - 2\beta^2 c + 24\beta^4 e) \left(1 - \cos \frac{t}{\beta} \right) + (-\beta b + 6\beta^3 d - 120\beta^5 h) \sin \frac{t}{\beta} \} \dots (25) \end{aligned}$$

の形として支点モーメントが得られる。実際計算には β^2, β^4 を含む項及び t^4, t^5 の項は小さいので無視しうる。支点モーメントは式 (25) の形で求まるから l_{n+1} スパン上任意点 x に生ずる曲げモーメント M_{xt} は図-2 を参照して

$$\left. \begin{aligned} M_{xt} &= M_n + R_n' x & x \leq vt \\ M_{xt} &= M_n + R_n' x - W(x - vt) & x \geq vt \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

近似計算では慣性力による反力増分は微小で無視してさしつかえない程度であるから、

$$R_n' = W \left(1 - \frac{v}{l} t \right) - \frac{M_n - M_{n+1}}{l} \dots (27)$$

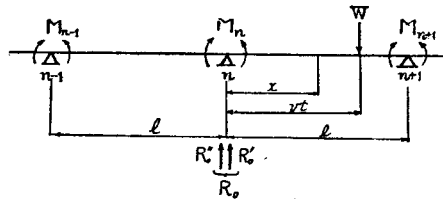
とされ、式 (26), (27) により l_{n+1} スパン上任意時刻における任意点の曲げモーメントが計算される。またこの場合の撓みは上式から、

$$\left. \begin{aligned} y_{xt} &= -\frac{M_n}{2 EI} x^2 - \frac{R_n'}{6 EI} x^3 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_n x + y_n & x \leq vt \\ y_{xt} &= -\frac{M_n}{2 EI} x^2 - \frac{R_n'}{6 EI} x^3 - \frac{W}{6 EI} (x^3 - 3x^2 vt) + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_n x + y_n & x > vt \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_n &= \frac{1}{K l} \left\{ W \left(\frac{2v}{l} t - 1 \right) - \frac{M_{n-1} - 3M_n + 3M_{n+1} - M_{n+2}}{l} \right\} + \frac{l}{6 EI} \left\{ 2M_n + M_{n+1} \right. \\ &+ W \left(2vt - \frac{3v^2}{l} t^2 + \frac{v^3}{l^2} t^3 \right) \left. + \frac{32}{420} \frac{\rho Al^5}{(6 EI)^2} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{31}{420} \frac{\rho Al^5}{6 EI} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} \right. \\ &+ W \left. \frac{\rho Al^5}{(6 EI)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{32}{420} \alpha_n - \frac{2}{15} \alpha_n^3 + \frac{1}{10} \alpha_n^5 - \frac{1}{20} \alpha_n^6 + \frac{1}{140} \alpha_n^7 \right) \right\} \dots (29) \end{aligned}$$

図-2



$$y_n = \frac{1}{K} \left\{ W \left(1 - \frac{v}{l} t \right) - \frac{2 M_n - M_{n-1} - M_{n+1}}{l} + \frac{\rho A l^3}{6 EI} \left(\frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{16}{60} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho A}{6 K} \left(\frac{\partial^2 M_{n-2}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} - 6 \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_{n+2}}{\partial t^2} \right) + W \frac{\rho A l^4}{6 EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{15} \alpha_n - \frac{1}{3} \alpha_n^3 + \frac{1}{4} \alpha_n^4 - \frac{1}{20} \alpha_n^5 \right) \right\} \dots (30)$$

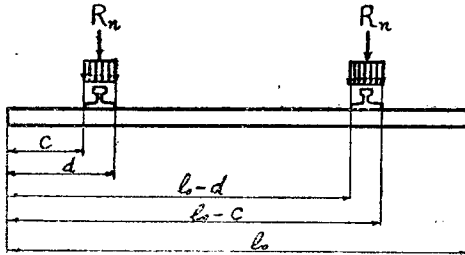
実際計算には (29), (30) では第2項まで取ればよい。

4. 衝撃荷重による枕木の応力

前述の式 (17) によつて n 支点の反力 R_n が求まるから、これが枕木の外力として作用する。これを再記すれば、

$$R_n = W \left(1 - \frac{v}{l} t \right) - \frac{2 M_n - M_{n-1} - M_{n+1}}{l} + \frac{\rho A l^3}{6 EI} \left(\frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + \frac{16}{60} \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{7}{60} \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho A}{6 K} \left(\frac{\partial^2 M_{n-2}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} - 6 \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_{n+2}}{\partial t^2} \right) + W \frac{\rho A l^4}{6 EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{15} \alpha_n - \frac{1}{3} \alpha_n^3 + \frac{1}{4} \alpha_n^4 - \frac{1}{20} \alpha_n^5 \right) = P(t) \dots (31)$$

図-3



いま枕木は弾性基礎上の両端自由桁と考えれば、後藤尚男氏の場合⁶⁾と同様に、枕木の撓み曲線を y_{xt} とすれば、

$$y_{xt} = \sum_{r=1}^{\infty} U_r(x) q_{rt} \dots (32)$$

$$U_r(x) = (\cos m_r x - \cosh m_r x) \left(\cos \frac{m_r x}{l_0} + \cosh \frac{m_r x}{l_0} \right) + (\sin m_r x + \sinh m_r x) \left(\sin \frac{m_r x}{l_0} + \sinh \frac{m_r x}{l_0} \right) \dots (33)$$

運動、位置、抵抗のエネルギーを求め Lagrange の運動方程式を用いると、 q_{rt} の基礎方程式として次式をうる。

$$\ddot{q}_{rt} + 2\varepsilon \dot{q}_{rt} + n_r^2 q_{rt} = \frac{1}{\rho_0 a \alpha_r^2} Q_{rt} \dots (34)$$

$$\text{ここに、} \quad \varepsilon = \frac{1}{2\rho_0 a} (\rho_0 a K + bR), \quad n_r^2 = \frac{1}{\rho_0 a} \left(E_0 I_0 \frac{m_r^4}{l_0^4} + bK \right), \quad \alpha_r^2 = l_0 (\sin m_r \sinh m_r)^2 \dots (35)$$

ρ_0 : 枕木密度, a : 枕木断面積, $E_0 I_0$: 枕木曲げ剛性, b : 枕木巾, l_0 : 枕木長, K : 基礎反力係数, K : 枕木内部摩擦係数, R : 基礎抵抗係数。

いま外力 R_n は枕木とレールの接触面に一様分布されるものと仮定すれば、レールの底巾を B として枕木に作用する分布荷重は、 $\frac{R_n}{B} = \frac{P(t)}{B}$ となり、図-3 の記号を用いて一般力 Q_{rt} を求めると、

$$Q_{rt} = \frac{P(t)}{B} S_r$$

$$S_r = \frac{4 l_0}{m_r} \left[(\cos m_r - \cosh m_r) \left\{ \cos \frac{m_r}{2} \cos \frac{m_r (l_0 - c - d)}{2 l_0} \sin \frac{m_r (d - c)}{2 l_0} + \cosh \frac{m_r}{2} \cosh \frac{m_r (l_0 - c - d)}{2 l_0} \sinh \frac{m_r (d - c)}{2 l_0} \right\} + (\sin m_r - \sinh m_r) \left\{ \sin \frac{m_r}{2} \cos \frac{m_r (l_0 - c - d)}{2 l_0} \sin \frac{m_r (d - c)}{2 l_0} + \sinh \frac{m_r}{2} \cosh \frac{m_r (l_0 - c - d)}{2 l_0} \sinh \frac{m_r (d - c)}{2 l_0} \right\} \right] \dots (36)$$

式 (36) を (34) に代入すれば、 $\ddot{q}_{rt} + 2\varepsilon \dot{q}_{rt} + n_r^2 q_{rt} = U_r P(t)$, $U_r = \frac{S_r}{\rho_0 a \alpha_r^2} \dots (37)$

初期条件を $t=0$, $q_{rt} = \dot{q}_{rt} = 0$ とし、Laplace の変換を施せば、

$$\overline{q_{rt}} = U_r \frac{P(p)}{p^2 + 2\varepsilon p + n_r^2} \dots (38)$$

式 (31) より $P(p)$ は一般形として次式で表わされる。

$$P(p) = \frac{ap^5 + bp^4 + 2cp^3 + 6dp^2 + 24ep + 120f}{p^5} + \frac{g\beta^2 p^2}{1 + \beta^2 p^2} + \frac{h\beta p}{1 + \beta^2 p^2} \dots (39)$$

ただし、 a, b, c, d, e, f, g, h : 常数。(39) を (38) に入れ、逆変換を施し表領域に直せば、多くの項が現われるが、実際計算の立場から微小項を無視すれば、近似式として次式をうる。

$$g_{rt} = U_r \left[\frac{b}{n_r^2} t + \frac{c}{n_r^2} t^2 + \frac{d}{n_r^2} t^3 - \frac{a}{n_r^2} (e^{-\varepsilon t} \cos \sigma_r t - 1) - \frac{(a\varepsilon + b)}{\sigma_r n_r^2} \sin \sigma_r t + g \left\{ A_1 \left(\cos \frac{t}{\beta} - 1 \right) + B_1 \sin \frac{t}{\beta} + C_1 (e^{-\varepsilon t} \cos \sigma_r t - 1) + D_1 e^{-\varepsilon t} \sin \sigma_r t \right\} + h \left\{ A_2 \left(\cos \frac{t}{\beta} - 1 \right) + B_2 \sin \frac{t}{\beta} + C_2 (e^{\varepsilon t} \cos \sigma_r t - 1) + D_2 e^{\varepsilon t} \sin \sigma_r t \right\} \right] \dots (40)$$

ここに、 $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ はそれぞれ $\varepsilon, \beta, n_r, \sigma_r = \sqrt{n_r^2 - \varepsilon^2}$ によつて表わされる項である。式(40)を(32)に代入すれば、撓み曲線が得られ、モーメントは $M_{xt} = -E_0 I_0 \frac{\partial^2 y_{xt}}{\partial x^2}$ として容易に求められる。

5. 数値計算例

次の Data が与えられたものとする。

$W = 7500 \text{ kg}$, $l = 75 \text{ cm}$, $\rho = 8.01 \times 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-4} \text{sec}^2$, レール 50 kg ($I = 1744 \text{ cm}^4$, $A = 64.33 \text{ cm}^2$), $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$, $v = 20 \text{ m/sec}$, $K = 17000 \text{ kg/cm}$ (K は相当広範囲の値をとる)

以上の数値を用い、3. に示した実用的近似法によつて計算を行えば、次の結果をうる (紙数の関係上途中計算過程は省略する)。

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{W}{3069} \left\{ -3107 t + 41187 t^2 - 186674 t^3 + 62.67 \left(1 - \cos \frac{t}{\beta} \right) + 2.765 \sin \frac{t}{\beta} \right\} \\ M_1 &= \frac{W}{3069} \left\{ 781 t + 19480 t^2 + 166550 t^3 - 5.33 \left(1 - \cos \frac{t}{\beta} \right) - 0.695 \sin \frac{t}{\beta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

ここに、 $\beta = 0.890 \times 10^{-3}$ である。

$$\left. \begin{aligned} R_0' &= W \left(1 - \frac{v}{l} t \right) + \frac{M_1 - M_0}{l} \\ M_{xt} &= M_0 + R_0' x t \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

式(41), (42)により車輛が0支点で衝撃を与えてから時間の経過につれて荷重点直下の曲げモーメントを計算し、これを図示すれば、図-5のごとくなる。

6. 結 言

以上述べたところによつて、衝撃荷重が1支点に作用してからの応力変化の傾向が明らかになったのであるが、式からわかるように、基礎反力係数 K 及び列車速度 v により衝撃変化の状況も変化してくる。計算例では0支点で衝撃が加えられてから直後に生ずるモーメントの最大値 $M_{\max} = 301885 \text{ kg-cm}$ となり、これを国鉄の静的計算法によれば、 $W = 7500 \text{ kg}$, $l = 75 \text{ cm}$ $\gamma = 4.0$ ($K = 17000 \text{ kg/cm}$

にほぼ相当する)として、スパン中央の $M_{\max} = 190154 \text{ kg-cm}$ となる。従つて衝撃効果は $\frac{301885}{190154} = 1.588$ ということになる。連行荷重のある場合、境界条件によつて解くことは困難であるから、近似的に重合の理を用いればよい。実際問題では複雑な諸因子のため衝撃の程度も千差万別であるから、実験的に求める外はないと思われるが、このような場合の理論的解法の一方法を示したものである。しかし著者の算法には近似的取り扱いをせざるを得ない点に難点があり、これらについて今後更に研究が推進されねばならないと思う。

参考文献その他

- 1) 渋谷巖, 穂坂衛, 後藤尙男, 高橋憲雄, 小野一良等諸氏の研究がある。
- 2) このような取扱い例は, 岡本舜三: 4連モーメント定理による架橋の振動問題の解法について, 土木学会誌第25巻第12号, 昭.14. 渋谷巖, 弾性力学における過渡的諸問題, 機械学会論文集第13巻45号 pp. 19~20
- 3) 4) 小野諒兄: 鉄道線路の構造及び強度, pp. 177~178 より容易に導かれる。
- 5) 福田武雄: 差分法, 河出書房 pp. 71~76
- 6) 後藤尙男: 弾性基礎にある梁の撓み振動の基礎的研究, 土木学会論文集第6号 pp. 125~127

図-4

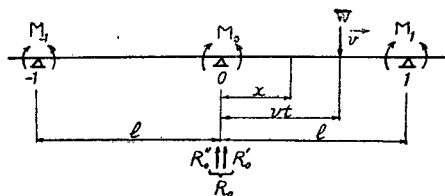


図-5 移動荷重直下のモーメント変化

