

圧密沈下に関する一解法

正員 工学博士 村山 朔 郎*
 准員 山内 利 彦**

A SOLUTION ON THE CONSOLIDATION SETTLEMENT

(Trans. of JSCE Sept. 1952)

Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member, Toshihiko Yamanouchi, C.E. Assoc. Member.

Synopsis In this paper, we solve the equation of clay consolidation considering the secondary time effect by LAPLACE TRANSFORMS, and investigate its process numerically.

要旨 本文は、2次圧密を考慮した粘土層の圧密理論式をラプラス変換を用いて解き、その圧密過程の数値的検討を行つたものである。

1. 緒言

Terzaghi の提唱した“粘土層の圧密変形速度は層中の間隙水の脱水速度に等しい”という主旨をもとにし、更に圧密変形は、弾性変形と W. Merchant の“永久変形は次いで起るべき永久変形量に比例する速度で生ずる”と仮定したクリープ的変形とからなると仮定して石井氏は新たな圧密理論式¹⁾を求められた。

筆者はラプラス変換を用いて同式を解き、従来とやや異なつた解を得た。筆者の得た同式の解においては、クリープ的変形を支配する η, γ を 0 とおけば全く Terzaghi の式と一致し、この点からも解の吟味の一つを満足している。

2. ラプラス変換による解法

石井氏の求められた2次圧密を考慮に入れた基礎式は、

$$v \cdot \frac{\partial p(y,t)}{\partial t} + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{1 - e^{-\eta(t-\tau)}\} p(y,\tau) d\tau - k \frac{\partial^2 p(y,t)}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに v : 間隙水減少率 } 但し v/k は一定とする。
 k : 透水係数 }

γ : 永久変形率 (常数), η : クリープ係数 (常数), p : 土粒子の弾性反力, t : 時間, y : 鉛直軸
 式 (1) の第 2 項を変形すると、

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \{1 - e^{-\eta(t-\tau)}\} p(y,\tau) d\tau &= \gamma \eta \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} p(y,\tau) d\tau \\ &= \gamma \eta \frac{\partial}{\partial t} \{e^{-\eta t} * p(y,t)\} = \gamma \eta \frac{\partial}{\partial t} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\eta} \bar{p}(y,s) \right\} \end{aligned}$$

ここに* は合成函数, $\bar{p}(y,s) = \int_0^\infty e^{-st} p(y,t) dt$

したがつて式 (1) は

$$v \frac{\partial p(y,t)}{\partial t} + \gamma \eta \frac{\partial}{\partial t} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\eta} \bar{p}(y,s) \right\} - k \frac{\partial^2 p(y,t)}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

式 (2) を t についてラプラス変換をすると、

$$v [s\bar{p}(y,s) - p(y,0)] + \gamma \eta \left[s \frac{1}{s+\eta} \bar{p}(y,s) - L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\eta} \bar{p}(y,s) \right\} \right]_{t=0} - k \frac{d^2 \bar{p}(y,s)}{dy^2} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

圧密試験における条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{初期条件;} & p(y,0) = 0 \\ \text{境界条件;} & p(0,t) = P, \quad p(2h,t) = P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

但し $2h$: 粘土層の厚さ, P : 載荷荷重強度

式 (4) の初期条件を式 (3) に代入し整頓すれば、

* 京都大学教授, 工学部土木工学教室

** 京都大学大学院特別研究生, 土木工学教室

$$\frac{d^2\bar{p}(y,s)}{dy^2} - \frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right) \bar{p}(y,s) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

次に式 (5) を y についてラプラス変換を行えば²⁾,

$$\theta^2 \bar{p}(\theta, s) - \theta \bar{p}(0, s) - \bar{p}_y(0, s) - \frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right) \bar{p}(\theta, s) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに $\bar{p}(\theta, s) = \int_0^\infty e^{-\theta y} \bar{p}(y, s) dy, \quad \bar{p}_y(0, s) = \frac{\partial}{\partial y} \{ \bar{p}(0, s) \}$

式 (4) で表わされる境界条件はラプラス変換により,

$$\bar{p}(0, s) = P/s, \quad \bar{p}(2h, s) = P/s$$

となるので第1の境界条件を式 (6) に代入すれば,

$$\bar{p}(\theta, s) = \left\{ \frac{P}{s} \theta + \bar{p}_y(0, s) \right\} \left\{ \theta^2 - \frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right) \right\} \dots\dots\dots (7)$$

したがって $\bar{p}(y, s)$ はただちに逆変換により,

$$\bar{p}(y, s) = \frac{P}{s} \cosh \left\{ \sqrt{\frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right)} y \right\} + \frac{\bar{p}_y(0, s)}{\sqrt{\frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right)}} \sinh \left\{ \sqrt{\frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right)} y \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) において $y=2h$ とおき第2の境界条件を代入して $\bar{p}_y(0, s)$ を求め、式 (8) をかきなおすと

$$\bar{p}(y, s) = \frac{P}{s} \frac{1}{\sinh(a2h)} [\sinh\{a(2h-y)\} + \sinh(ay)] \dots\dots\dots (9)$$

ここに $a = \sqrt{\frac{s}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{s+\eta} \right)}$

したがって z を複素数とすれば,

$$p(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \bar{p}(y, z) dz \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \frac{P}{z} \frac{1}{\sinh(a2h)} [\sinh\{a(2h-y)\} + \sinh(ay)] dz \dots\dots\dots (10)$$

$e^t \bar{p}(y, z)$ の特異点は $z=0$ と $\sinh(a2h)=0$ ならしめる z である。後者の関係から,

$$\sqrt{\frac{z}{k} \left(v + \frac{\gamma\eta}{z+\eta} \right)} 2h = in\pi$$

したがって,

$$z = \frac{1}{2v} \left[-(v+\gamma)\eta - \frac{kn^2\pi^2}{4h^2} \pm \sqrt{\left\{ (v+\gamma)\eta + \frac{kn^2\pi^2}{4h^2} \right\}^2 - 4v\eta \frac{kn^2\pi^2}{4h^2}} \right] \equiv \lambda_1, \lambda_2 \dots\dots\dots (11)$$

しかるに
$$\frac{\sinh\{a(2h-y)\} + \sinh(ay)}{\sinh(a2h)} = \frac{1 + \frac{1}{3!} a^2 \frac{1}{2h} \{(2h-y)^3 + y^3\} + \dots}{1 + \frac{1}{3!} a^2 (2h)^2 + \dots}$$

であるから $z=0$ における留数は,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z e^{zt} \bar{p}(y, z) = P \dots\dots\dots (12)$$

$z=\lambda_1$ における留数は,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \lambda_1} (z-\lambda_1) e^{zt} \bar{p}(y, z) &= \lim_{z \rightarrow \lambda_1} e^{zt} \frac{P}{z} \frac{\sinh\{a(2h-y)\} + \sinh(ay)}{(\sinh a2h)'} \\ &= P \frac{n\pi k}{h^2} \frac{(\lambda_1+\eta)^2}{\lambda_1\{v(\lambda_1+\eta)^2 + \eta^2\gamma\}} e^{\lambda_1 t} \sin \frac{n\pi y}{2h} \dots\dots n : \text{奇数の場合} \\ &= 0 \dots\dots\dots n : \text{偶数の場合} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに $(\sinh a2h)'$ は $\sinh a2h$ の導関数である。

同様に $z=\lambda_2$ における留数は,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \lambda_2} (z-\lambda_2) e^{zt} \bar{p}(y, z) &= P \frac{n\pi k}{h^2} \frac{(\lambda_2+\eta)^2}{\lambda_2\{v(\lambda_2+\eta)^2 + \eta^2\gamma\}} e^{\lambda_2 t} \sin \frac{n\pi y}{2h} \dots\dots n : \text{奇数の場合} \\ &= 0 \dots\dots\dots n : \text{偶数の場合} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

故に $p(y, t)$ は式 (12), (13), (14) より,

$$p(y, t) = P - \frac{4P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}) \sin \frac{n\pi y}{2h} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{ここに } A = -k \left(\frac{n^2 \pi^2}{4h^2} \right) \frac{(\lambda_1 + \eta)^2}{\lambda_1 \{v(\lambda_1 + \eta)^2 + \eta^2 \gamma\}}, \quad B = -k \left(\frac{n^2 \pi^2}{4h^2} \right) \frac{(\lambda_2 + \eta)^2}{\lambda_2 \{v(\lambda_2 + \eta)^2 + \eta^2 \gamma\}} \quad \dots\dots\dots$$

過剰水圧 $w(y, t)$ は $w = P - p$ であるから、

$$w(y, t) = \frac{4P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}) \sin \frac{n\pi y}{2h} \quad \dots\dots\dots (16)$$

故に圧密量の圧密可能全量に対する比を μ とすれば、

$$\mu = \frac{1}{2Ph(v+\gamma)} \left[2Ph(v+\gamma) - \int_0^{2h} \{vw(y, t) + \gamma \eta \int_0^t w(y, \tau) e^{-\eta(\ell-\tau)} d\tau\} dy \right]$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{v}{v+\gamma} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}) - \frac{8}{\pi^2} \frac{\gamma}{v+\gamma} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\eta A}{\lambda_1 + \eta} e^{\lambda_1 t} + \frac{\eta B}{\lambda_2 + \eta} e^{\lambda_2 t} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

3. 新方程式による $p-t$ 曲線, $\mu-t$ 曲線の吟味

本節においては, 2. で求めた $p-t$ 曲線, $\mu-t$ 曲線について吟味を行うこととする。

石井氏の用いられた如く $\left(\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} \right) / \eta = x$ とおき, また $\gamma/v = c$ とおいて λ をもとめれば、

$$\lambda = \frac{1}{2} \eta \left[-(1+c+x) \pm \left\{ (1+c+x) - \frac{2x}{1+c+x} - \frac{2x^2}{(1+c+x)^3} - \dots\dots \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

故に $\lambda_1 = -\eta \left\{ (1+c+x) - \frac{x}{1+c+x} - \frac{x^2}{(1+c+x)^2} - \dots\dots \right\}, \quad \lambda_2 = -\eta \left\{ \frac{x}{1+c+x} + \frac{x^2}{(1+c+x)^2} + \dots\dots \right\} \quad \dots\dots (19)$

(i) $x \ll 1$

この場合には $\lambda_1 \doteq -\eta(1+c), \quad \lambda_2 \doteq -\frac{1}{1+c} \frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2}$

となるので $A \doteq 0, \quad B \doteq 1; \quad \frac{\eta A}{\lambda_1 + \eta} \doteq 0, \quad \frac{\eta B}{\lambda_2 + \eta} \doteq 1$

したがって

$$p \doteq P - \frac{4P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} t} \sin \frac{n\pi y}{2h}$$

$$\mu \doteq 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} t} \quad \dots\dots\dots (20)$$

(ii) $x \gg 1$

この場合には $\lambda_1 \doteq -\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2}, \quad \lambda_2 \doteq -\eta \frac{x}{1+c+x} \doteq -\eta$

となるので $A \doteq 1, \quad B \doteq 0; \quad \frac{\eta A}{\lambda_1 + \eta} \doteq 0, \quad \frac{\eta B}{\lambda_2 + \eta} \doteq 1$

したがって

$$p \doteq P - \frac{4P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} t} \sin \frac{n\pi y}{2h}$$

$$\mu \doteq 1 - \frac{8}{\pi^2} \frac{v}{v+\gamma} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} t} - \frac{8}{\pi^2} \frac{\gamma}{v+\gamma} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\eta t} \quad \dots\dots\dots (21)$$

また式 (17) において $\eta=0, \gamma=0$ を代入すれば、

$$\lambda_1 = -\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad A = 1, \quad B = 0$$

なる関係があるから

$$p \doteq P - \frac{4P}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} t} \sin \frac{n\pi y}{2h}$$

$$\mu \doteq 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{k}{v} \frac{n^2 \pi^2}{4h^2} t} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式 (22) は Terzaghi の求めたものと同じである。

4. 数値計算

次に x, c に種々の値を代入して圧密度時間曲線を求めてみる。まづ x は 1, 2, 4, 8 の 4 種, c は 2, 0.5, 0.1 の 3 種, 計 12 種について計算すれば表-1~4 の如くなる。

表-1

$x=1.0$

η/c	2.0	0.5	0.1
0.001	0.07	0.07	0.07
0.002	0.07	0.07	0.07
0.005	0.07	0.07	0.08
0.01	0.07	0.08	0.09
0.02	0.08	0.10	0.11
0.05	0.10	0.13	0.15
0.1	0.12	0.17	0.21
0.2	0.16	0.24	0.30
0.5	0.24	0.37	0.47
1	0.35	0.53	0.66
2	0.52	0.73	0.85
5	0.79	0.94	0.98
10	0.94	0.99	0.99

表-2

$x=2.0$

η/c	2.0	0.5	0.1
0.001	0.07	0.07	0.07
0.002	0.07	0.07	0.08
0.005	0.07	0.08	0.09
0.01	0.08	0.10	0.11
0.02	0.09	0.12	0.14
0.05	0.12	0.17	0.21
0.1	0.15	0.24	0.30
0.2	0.21	0.33	0.42
0.5	0.32	0.52	0.65
1	0.47	0.69	0.84
2	0.67	0.86	0.95
5	0.91	0.98	0.99
10	0.99	0.99	0.99

表-3

$x=4.0$

η/c	2.0	0.5	0.1
0.001	0.07	0.07	0.08
0.002	0.07	0.08	0.08
0.005	0.08	0.10	0.11
0.01	0.09	0.12	0.13
0.02	0.11	0.16	0.19
0.05	0.15	0.24	0.30
0.1	0.19	0.33	0.42
0.2	0.27	0.46	0.59
0.5	0.42	0.66	0.83
1	0.59	0.80	0.94
2	0.78	0.92	0.98
5	0.97	0.99	0.99
10	0.99	0.99	0.99

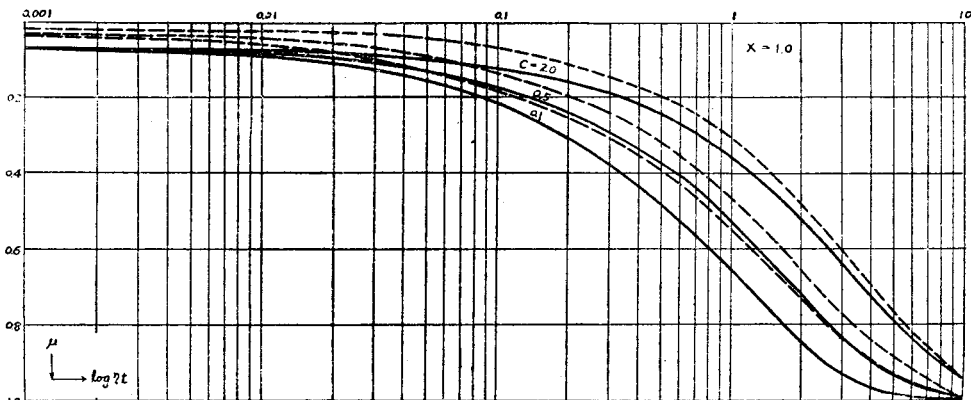
表-4

$x=8.0$

η/c	2.0	0.5	0.1
0.001	0.07	0.08	0.08
0.002	0.08	0.09	0.10
0.005	0.09	0.12	0.14
0.01	0.11	0.16	0.19
0.02	0.14	0.21	0.27
0.05	0.20	0.33	0.42
0.1	0.27	0.45	0.59
0.2	0.36	0.60	0.77
0.5	0.51	0.75	0.92
1	0.67	0.85	0.96
2	0.85	0.94	0.99
5	0.99	0.99	0.99
10	0.99	0.99	0.99

これらはいずれも n を 1, 3, 5 の 3 項迄計算したものである。グラフに書けば図-1~4 のごとくなる。図中点線は石井氏の求められたものであるが、比較のために書入れてみた。

図-1



ラス変換によつてもとめたものであるが、図-1~4の如く少々異つた結果が得られた。これは従来の誘導計算に少々疑義があるために生じたものであるが、結果からは従来の計算でも大局的には不都合はないようである。なお計算については学生稲垣一成君の労にまつところ多く、また本研究に文部省科学研究費の補助をうけた。共に深く感謝の意を表す。

図-2

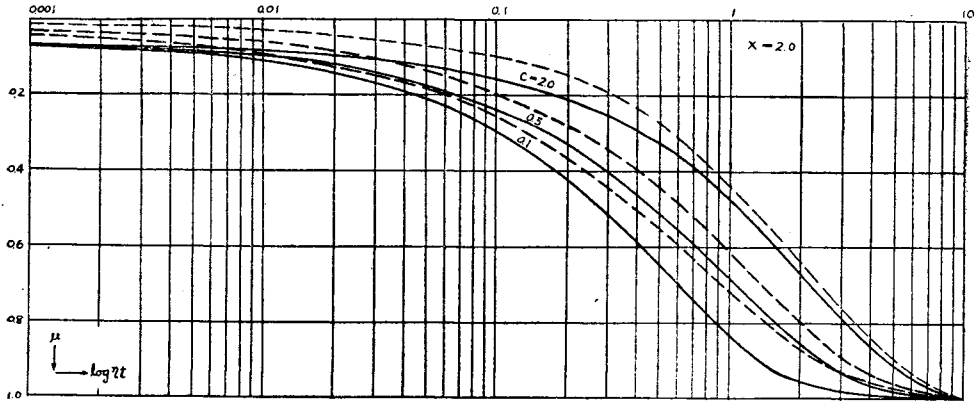


図-3

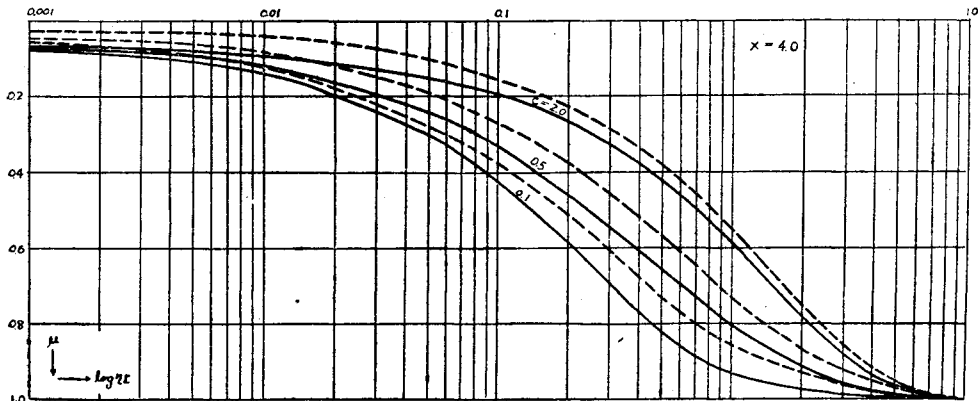
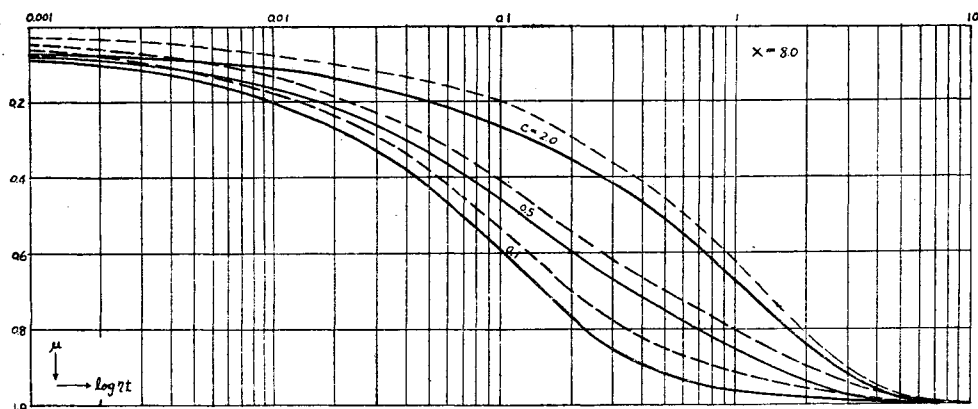


図-4



参考文献

- (1) 石井靖九著“大阪の地盤沈下に関する研究”大阪港湾技術調査会報告 昭 24.7. p.107.
- (2) 例えば Ruel V. Churchill “Modern Operational Mathematics in Engineering”

(昭.27.4.15)