

ランガー橋の振動に関する研究

正員 安部 清孝*

STUDY ON THE VIBRATION OF LANGER'S BRIDGE.

(Trans. of JSCE Sept. 1952)

Kiyotaka Abe, C. E. Member.

Synopsis Originally, Langer's Bridges has been developed for the type of bridge that stiffens the simple beam or simple truss by the arch ribs and hangers, which can bear in axial forces only. But it has been adopted for the independent type of bridge in recent years.

Obviously from the point of historical view, it is said that the bridge of Langer's type is liable to have a large deflection of vibration.

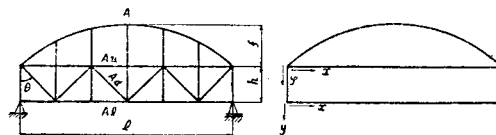
The writer has begun to study the problems of vibration of Langer's Bridges from the necessity of decision of the strength of bridges in actual practice.

In this report, the writer deals with the theoretical problems of vibration of Langer's Bridge in the first place, and with the numerical calculations for the circular frequency of Langer's Bridge in the second place, and with the experimental work of vibration of Langer's Bridge in the last place.

要旨 元来、吊材を用いて軸力のみを受ける拱肋によつて単純橋を吊り、これを補強する目的に使用される型式として発達して来たのがランガー橋であるが、これは近年独立した橋梁型式として採用されるようになってきた。しかし、このランガー橋は発達の歴史から見てもわかるのであるが、一般に振動量が多いといわれている。筆者の知る限り目下のところランガー橋の振動を取扱つた論文が見当たらないので、既設橋梁の強度判定という実際問題の必要に迫られて筆者はこの研究に着手した。

この研究はエネルギーの関係式に立脚点を置いて進められるのであるが¹⁾、ここでは基礎微分方程式に立脚点を置いた研究結果を発表することにした。

図-1



1. 使用記号の一般的説明

x : 単純橋および拱肋の任意点の左支点よりの距離²⁾

l : ランガー橋の径間長 f : 拱肋の拱矢

h : 単純橋の高さ ξ : x の l に対する比, すなわち x/l

y : 単純橋の振動変位

y_m : 単純橋の曲げ変形による振動変位

η_n : 単純橋の第 n 次の正則型振動の正規函数

ds : 拱肋の ds 部分が振動中に变化する長さ

A : 任意点における拱肋の断面積

A_u : 任意点における単純橋の上弦材の断面積

a : 垂直吊材の径間方向の単位長当りの断面積

θ : 単純トラスの斜材の垂直材に対する傾斜角

J : A_u および A_l のそれぞれの重心軸に関する断面2次率の和

p : 任意点における径間方向の単位巾部分の垂直材に作用する張力

ϵ : 垂直吊材の上記部分の p による伸び

H_x : 任意点における拱肋の振動中の軸力の水平分値

P : 任意点における拱肋に作用する軸力

Y : ランガー橋の単位長当りに作用する強制力

E : ランガー橋を構成する材のヤング弾性係数

ν_n : ランガー橋の第 n 次の固有円振動数

単純橋に対しては断面2次率としては次の式によつて表わされるものを採用するものとする。

$$I = \frac{A_u A_l}{A_u + A_l} h^2 + J$$

y_s : 単純トラス橋の腹材変形による振動変位

η : 単純橋の振動の正規函数

ds : 任意点における dx 部分の拱肋の微小弧長

φ : 拱肋の軸曲線を表わす函数

A_l : 任意点における単純橋の下弦材の断面積

A_l : 単純トラスの斜材の平均断面積

F : A_u と A_l との和, すなわち $(A_u + A_l)$

I : 単純橋の断面2次率

H : 拱肋に作用する軸力の水平分値³⁾

H_0 : $x=0$ なる原点における H_x の値

δp : 任意点における拱肋の振動中の軸力の変化量

ρ : ランガー橋の単位長当りの質量

ν_0 : ランガー橋の固有円振動数

ν : ランガー橋に作用する強制力の作用円振動数

*建設省土木研究所

1) 建設省土木研究所報告 83, 84 号。 2) 左支点を原点に取る。

3) 自由振動の場合には自重による軸力の水平分値。

なお η はつぎの式によつて表わされる。

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n \quad (n=1,2,3,\dots, \infty), \quad a_n : \text{任意常数}$$

II 振動の基礎微分方程式の誘導

拱肋の軸線の縦距 φ および単純橋の振動変位 y は共に下向きを正とするように座標を取るものとし、垂直吊材は橋長方向に一様断面をもつように橋の全長に亘り等分布するものと仮定して考察を進めることにする。

振動中の拱肋軸力の変化量 δP と軸長変化量 δds との間および垂直吊材の軸力 p と軸長変化量 ε との間にはそれぞれフックの法則が成立するものとすれば、つぎの関係式がえられる。

$$\delta P = \frac{\delta ds}{ds} AE \dots\dots\dots (1)$$

$$\varepsilon = \frac{pp}{Ea} \dots\dots\dots (2)$$

ここに $ds = \sqrt{dx^2 + d\varphi^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \varphi'^2} dx$ $\dots\dots\dots (3)$

いま φ が振動中に $(\varphi + y + \varepsilon)$ になつた場合に ds が $(ds + \delta ds)$ になるものと仮定して高位の微小量を無視し

て δds を求めると、 $\delta ds = \frac{d\varphi}{ds} (dy + d\varepsilon) \dots\dots\dots (4)$

これより $\delta P = \frac{d\varphi}{ds^2} (dy + d\varepsilon) AE \dots\dots\dots (5)$

δP の水平分値を δH とすると $\delta H = \varphi' \left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon' \right) (1 + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}} AE \dots\dots\dots (6)$

ここに $\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{p\varphi'}{Ea}$, $\varepsilon'' = \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = \frac{p\varphi''}{Ea}$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$, $\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dx^2} \dots\dots\dots (7)$

振動中の軸力の水平分値 H_x は $H_x = H + \varphi' \left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon' \right) (1 + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}} AE \dots\dots\dots (8)$

従つて振動中の軸力の垂直分値を V_x とすると

$$V_x = \left\{ H + \varphi' \left(-\frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon' \right) (1 + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}} AE \right\} \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon' + \varphi' \right) \dots\dots\dots (9)$$

となる。いま $(x+dx)$ 点における拱肋の軸力の垂直分値を V_{x+dx} とすると、これは近似的につぎのごとく与えられる。

$$V_{x+dx} = V_x + \left\{ H \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon'' + \varphi'' \right) + \psi AE \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon'' \right) + \phi AE \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon' \right) \right\} dx \dots\dots\dots (10)$$

ここに $\psi = \varphi'^2 (1 + \varphi'^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\phi = \frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{A} \frac{dA}{dx} = \psi' + \frac{\psi}{A} \frac{dA}{dx}$ $\dots\dots\dots (11)$

従つて x 点の垂直吊材の単位巾に作用する軸力 p はつぎのごとく与えられる。

$$p = -H \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon'' + \varphi'' \right) - \psi AE \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon'' \right) - \phi AE \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \varepsilon' \right) \dots\dots\dots (12)$$

これに (7) 式の関係を代入して p を求めると、 $p = -u \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - v \frac{\partial y}{\partial x} - wH \dots\dots\dots (13)$

ここに
$$\left. \begin{aligned} u &= (AE\psi + H) \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H)\varphi'' + \frac{A}{a} \phi\varphi' \right\}^{-1} \\ v &= AE\phi \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H)\varphi'' + \frac{A}{a} \phi\varphi' \right\}^{-1} \\ w &= \varphi'' \left\{ 1 + \frac{1}{Ea} (EA\psi + H)\varphi'' + \frac{A}{a} \phi\varphi' \right\}^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

4) $\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}$

5) A が一定の場合には $\phi = \frac{d\psi}{dx} = \psi'$ となる。

(13) 式の wH の項はランガー橋の静的影響を表わす項であつて、振動を取扱う上には何等影響をおよぼさないものでこれを無視すると (13) 式はつぎのごとく書ける。

$$p = -u \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - v \frac{\partial y}{\partial x} \dots\dots\dots (13)$$

つぎに $x=0$ なる原点における H_x の値を H_0 とすると⁶⁾

$$H_0 = \left[H + AE \frac{\psi}{\varphi'} \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0} \doteq H + \frac{AE}{l} \left(-\frac{\psi}{\varphi'} \right) \dots\dots\dots (15)$$

この H_0 による単純橋の x 点における軸力の垂直分値は

$$v_x = H_0 \frac{\partial y}{\partial x} \dots\dots\dots (16)$$

によつて与えられるから、 $(x+dx)$ 点における軸力の垂直分値は

$$v_{x+dx} = v_x + H_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \dots\dots\dots (17)$$

によつて与えられる。従つて H_0 による垂直方向の dx 区間の単位長当りの分布力は

$$p_0 = H_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (18)$$

によつて与えられる。

いま x 点における断面の剪断力および曲げモーメントをそれぞれ Q および M とする。

一方トラスにおいて剪断力 Q と腹材変形 y_s との間にはつぎの関係が存在することが明らかにされている⁷⁾。

$$Q = EA_a \sin \theta \frac{\partial y_s}{\partial x} \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{従つて} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = EA_a \sin \theta \frac{\partial^2 y_s}{\partial x^2} \dots\dots\dots (20)$$

他方曲げモーメント M と曲げ変形 y_m との間にはつぎの関係が存在することは衆知のところである。

$$M = -EI \frac{\partial^2 y_m}{\partial x^2} \dots\dots\dots (21)$$

つぎにダランベルの原理による慣性力を求めよう。

並進慣性力は上向きに単位長当りに作用し、

$$f_t = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots\dots\dots (22)$$

廻転慣性力は左向きに単位長当りに作用し、

$$f_m = \frac{\rho I}{I'} \frac{\partial^2 y_m}{\partial x \partial t^2} \dots\dots\dots (23)$$

つぎに減衰力が作用する場合の上記の各種の力を求めてみよう。

いま振動中の外部減衰力は変位速度に比例し、内部減衰力は歪速度に比例すると云う仮定(普通よく用いられている)を採用すれば、外部並びに内部減衰係数はつぎのごとく定義される。

$$\left. \begin{aligned} \text{外部減衰係数 } \zeta_0 &= (\text{粘性抵抗}) / (\text{変位速度}) \times (\text{質量}) \\ \text{内部減衰係数 } \zeta_i &= (\text{粘性応力}) / (\text{歪速度}) \times (\text{弾性率}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

これらの減衰係数を使用すれば上記の各種の力はつぎのごとく表現される。

$$p = -u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_i \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial t} \right) y - v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial x \partial t} \right) y \dots\dots\dots (25)$$

$$p_0 = H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_i \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial t} \right) y \dots\dots\dots (26)$$

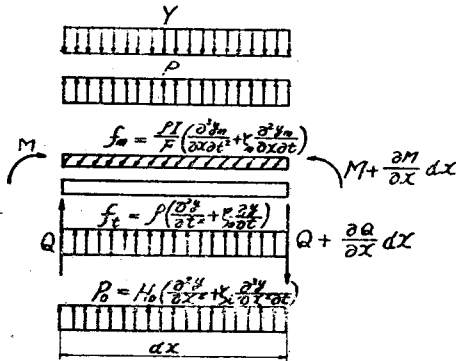
$$Q = EA_a \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial x \partial t} \right) y_s \dots\dots\dots (27)$$

(6) $y = \eta_m \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi}{T} t$ と仮定し、 η_m (ランガー橋の中点における振動変位の時間的的最大値) = 0.5 cm と仮

定し、 $\frac{\partial y}{\partial x}$ の半周期における時間的の平均値を考えれば、 $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} \doteq \frac{\pi \eta_m}{l} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2\eta_m}{l} = \frac{1}{l}$ となる。この $\eta_m = 0.5$ cm は相当安全側の仮定である。

(7) 土木学会誌 36-9. p. 7.

図-2



$$M = -EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y_m \dots\dots\dots (28)$$

$$f_t = \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y \dots\dots\dots (29)$$

$$f_m = \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y_m \dots\dots\dots (30)$$

なお \$y\$ は振動中の全変位であつて、\$y_m\$ と \$y_s\$ の和で表わされると想定すると、

$$y = y_m + y_s \dots\dots\dots (31)$$

と表わされる。

橋の単位長当りに作用する任意強制力を \$Y\$ とし、単純橋の任意点 \$x\$ における微小要素 \$dx\$ 部分に作用する力および曲げモーメントを表わした図-2を参照すれば、鉛直

方向の力の均合式およびモーメントの均合式はそれぞれつぎのごとく表わされる。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + Y - f_t - p - p_0 = 0 \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q + f_m = 0 \dots\dots\dots (33)$$

この両式中の \$p, p_0, f_t, f_m, Q, M\$ に前出の式の値を代入し、(31) 式の関係を使用すれば、減衰項を含むランガー橋の強制振動の基礎微分方程式はつぎの連立微分方程式によつて与えられる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= EA \sin \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y_s + u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y \\ &+ v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + Y \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) (y - y_s) &= EA \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y_s \\ &+ E \frac{\partial}{\partial x} \left\{ I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) (y - y_s) \right\} \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

この両式から \$y_s\$ を消去すれば強制振動の普通の意味での基礎微分方程式がえられるのであるが、これは一般には消去困難である。

いま腹材変形の影響を無視すれば、ランガー橋の減衰強制振動の基礎微分方程式はつぎのごとく求められる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y \right\} - E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y \right\} \\ &+ u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + Y \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

なお \$I\$ が一定値であるかまたは振動学的に等値な等断面換算断面2次率を用いることにし、\$\rho\$ および \$F\$ の変化の影響は小さいからこれを一定値であるとする(36)式はつぎのごとく表わされる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y - EI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \zeta_1 \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} \right) y \\ &+ u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + Y \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

つぎに断面2次率の変化が迴転慣性の項におよぼす影響は微小であるから、この影響を無視すれば、ランガー橋の非減衰強制振動の基礎微分方程式は

$$\begin{aligned} \left\{ EI + \frac{I}{A_e \sin \theta} (u - H_0) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &+ \left[2E \frac{dI}{dx} + \frac{1}{A_e \sin \theta} \left\{ I \left(v + 2 \frac{du}{dx} \right) + 2 \frac{dI}{dx} (u - H_0) \right\} \right] \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \\ &- \left[u - H_0 - E \frac{d^2 I}{dx^2} - \frac{1}{A_e \sin \theta} \left\{ I \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \right) + 2 \frac{dI}{dx} \left(\frac{du}{dx} + v \right) \right\} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &- \left\{ v - \frac{1}{A_e \sin \theta} \left(I \frac{d^2 v}{dx^2} + 2 \frac{dI}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 I}{dx^2} v \right) \right\} \frac{\partial y}{\partial x} + \rho \left(1 - \frac{1}{A_e \sin \theta} \frac{d^2 I}{dx^2} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ &- \frac{\rho}{A_e \sin \theta} \left(\frac{I}{EF} v + 2 \frac{dI}{dx} \right) \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} - \rho I \left\{ \frac{1}{F} + \frac{1}{A_e \sin \theta} \left(1 + \frac{u - H_0}{EF} \right) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{EF A_e \sin \theta} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{A_a \sin \theta} \frac{d^2 I}{dx^2}\right) Y - \frac{2}{A_a \sin \theta} \frac{dI}{dx} \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{I}{A_a \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{EFA_a \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \dots (38)$$

によつて与えられる。

なお I, F, A, A_a, a, ρ がすべて一定と考えられる場合は、(38) 式はつぎのごとくに表現される。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{u-H_0}{EA_a \sin \theta}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{EA_a \sin \theta} \left(2 \frac{du}{dx} + v\right) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \left\{\frac{u-H_0}{EI} - \frac{1}{EA_a \sin \theta} \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right.\right. \\ & \left.\left.+ 2 \frac{dv}{dx}\right)\right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left\{\frac{v}{EI} - \frac{1}{EA_a \sin \theta} \frac{d^2 v}{dx^2}\right\} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\rho v}{E^2 F A_a \sin \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2} \\ & - \frac{\rho}{E} \left\{\frac{1}{F} + \frac{1}{A_a \sin \theta} \left(1 + \frac{u-H_0}{EF}\right)\right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2}{E^2 F A_a \sin \theta} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} \\ & = \frac{Y}{EI} - \frac{1}{EA_a \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\rho}{E^2 F A_a \sin \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \dots (39) \end{aligned}$$

さらに単純橋が I 一定なる単純桁橋よりなるランガー桁橋の場合には、桁の廻転慣性および剪断剛性に基因する項の影響を無視すると、(39) 式はつぎのごとくに簡単に表わされる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{u-H_0}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{v}{EI} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Y}{EI} \dots (40)$$

拱助断面が一定の場合にはつぎの関係がある。

$$\phi = \frac{d\psi}{dx} = \psi' \dots (41)$$

この場合には前出の $u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^2 v}{dx^2}$ はつぎのごとく表わされる。

$$\begin{aligned} u &= EA(\psi + \lambda) N^{-1} & v &= EA\psi' N^{-1} \\ \frac{du}{dx} &= EA\{\psi' N - (\psi + \lambda) N'\} N^{-2} & \frac{dv}{dx} &= EA(\psi'' N - \psi' N') N^{-2} \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= EA\{\psi'' N^2 - 2\psi' N N' - (\psi + \lambda)(N N'' - 2 N'^2)\} N^{-3}, \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= EA\{\psi''' N^2 - 2\psi'' N N' - \psi'(N N'' - 2 N'^2)\} N^{-3} \\ N &= 1 + \mu(\psi' \varphi' + \psi \varphi'' + \lambda \varphi''') & N' &= \mu(\psi'' \varphi' + 2\psi' \varphi'' + \psi \varphi''') + \lambda \varphi'''' \\ N'' &= \mu(\psi''' \varphi' + 3\psi'' \varphi'' + 3\psi' \varphi''' + \psi \varphi'''' + \lambda \varphi''''') & \lambda &= \frac{H}{EA}, \mu = \frac{A}{a}, \psi' = \frac{d\psi}{dx}, \psi'' = \frac{d^2 \psi}{dx^2}, \\ \psi''' &= \frac{d^3 \psi}{dx^3}, \varphi' = \frac{d\varphi}{dx}, \varphi'' = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}, \varphi''' = \frac{d^3 \varphi}{dx^3}, \varphi'''' = \frac{d^4 \varphi}{dx^4} \end{aligned} \dots (42)$$

つぎに拱軸曲線に由来する各種の函数式を示すことにする。

(i) 軸曲線が抛物曲線の場合 軸曲線の座標軸を図-1 に示すごとく取るものとし、

$$k = \frac{4f}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (l: \text{径間長}) \dots (43)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \varphi &= -kl\xi(1-\xi), \quad \varphi' = -k(1-2\xi), \quad \varphi'' = \frac{2k}{l}, \quad \varphi''' = \varphi'''' = 0, \quad \psi' = k^2(1-2\xi)^2\{k^2(1-2\xi)^2 + 1\}^{-3/2} \\ \psi'' &= \varphi' \varphi'' (2 - \varphi'^2) (1 + \varphi'^2)^{-5/2}, \quad \psi''' = \varphi'' (2 - 11\varphi'^2 + 2\varphi'^4) (1 + \varphi'^2)^{-7/2}, \\ \psi'''' &= -3\varphi'' \varphi' (12 - 21\varphi'^2 + 2\varphi'^4) (1 + \varphi'^2)^{-9/2} \end{aligned} \dots (44)$$

(ii) 軸曲線が円弧曲線の場合 軸曲線の座標軸を図-1 に示すごとく取るものとし、円弧曲線の曲率半径を R とし、

$$k = \frac{2R}{l} = \frac{1}{4} \left(\frac{4f}{l} + \frac{l}{f}\right), \quad \xi = \frac{x}{l} \dots (45)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{l}{2} \{ \sqrt{k^2 - 1} - \sqrt{k^2 - (2\xi - 1)^2} \}, \quad \varphi' = (2\xi - 1) \{ k^2 - (2\xi - 1)^2 \}^{-1/2} \\ \varphi'' &= \frac{2k^2}{l} \{ k^2 - (2\xi - 1)^2 \}^{-3/2}, \quad \varphi''' = \frac{12k^2}{l^2} (2\xi - 1) \{ k^2 - (2\xi - 1)^2 \}^{-5/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'''' &= \frac{24k^2}{l^3} \{k^2 + 4(2\xi - 1)^2\} \{k^2 - (2\xi - 1)^2\}^{-7/2}, \quad \psi = \frac{1}{k^3} (2\xi - 1)^2 \{k^2 - (2\xi - 1)^2\}^{-1/2}, \\
 \psi' &= \frac{2}{k^3 l^2} (2\xi - 1) \{2k^2 - 3(2\xi - 1)^2\} \{k^2 - (2\xi - 1)^2\}^{-1/2}, \\
 \psi'' &= \frac{4}{k^3 l^2} \{2k^4 - 9k^2(2\xi - 1)^2 + 6(2\xi - 1)^4\} \{k^2 - (2\xi - 1)^2\}^{-3/2}, \\
 \psi''' &= -\frac{24}{k^3 l^3} (2\xi - 1) \{4k^4 - 5k^2(2\xi - 1)^2 + 2(2\xi - 1)^4\} \{k^2 - (2\xi - 1)^2\}^{-5/2}
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

III. 固有振動の解

一般構造物と同じくランガー橋も何等かの原因で振動を始めてから後、その起振原因が取除かれた場合に、自然状態で振動を続けるのであるが、ここではこの自然状態での振動すなわち自由振動もしくは固有振動につき解析を進めることにする。実際にはこの固有振動は起つてから時間と共に振巾を減少して減衰して行き、やがて振巾が零になつて止つてしまうのであるが、減衰が起らず永遠に振動を続けると云う仮定の下に考察される固有振動が非減衰固有振動である。固有振動周期を求めたり、また強制周期が固有振動周期に一致して共振現象を起すかどうかといった問題を取扱うには、非減衰固有振動を考えても実在の橋梁においては大過を起さないものである。

従つて非減衰固有振動の一般の場合を取扱い、つぎに腹材変形の影響を無視した場合の減衰固有振動を取扱うことにする。

(1) 非減衰固有振動の解 ここでは簡単のため l, F, A, A_d, a, ρ がすべて近似的に一定値と考えられる場合⁸⁾を取扱うことにすると、固有振動の基礎微分方程式はつぎのごとく表わされる。

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{u - H_0}{EA_d \sin \theta}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{EA_d \sin \theta} \left(2 \frac{du}{dx} + v\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left\{ \frac{u - H_0}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \right) \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
 &- \left(\frac{v}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\rho v}{E^2 F A_d \sin \theta} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2} \\
 &- \frac{\rho}{E} \left\{ \frac{1}{F} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(1 + \frac{u - H_0}{EF}\right) \right\} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2}{E^2 F A_d \sin \theta} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \dots \dots \dots (47)
 \end{aligned}$$

いま変数を $\xi = \frac{x}{l}$ に変換して振動変位を

$$y = \eta(\xi) \sin(\nu_0 t + \delta_0) \dots \dots \dots (48)$$

として (47) 式に代入し、時間函数を分離すると、 η に関するつぎの形の式がえられる。

$$\alpha_1 \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} + \alpha_2 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \alpha_3 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \alpha_4 \frac{d\eta}{d\xi} - \left(\alpha_5 \eta - \alpha_6 \frac{d\eta}{d\xi} - \alpha_7 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) \nu_0^2 + \alpha_8 \eta \nu_0^4 = 0 \dots \dots \dots (49)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに } \alpha_1 &= 1 + \frac{u - H_0}{EA_d \sin \theta}, \quad \alpha_2 = \frac{l}{EA_d \sin \theta} \left(2 \frac{du}{dx} + v\right), \quad \alpha_3 = l^2 \left\{ \frac{u - H_0}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{dv}{dx} \right) \right\}, \\
 \alpha_4 &= l^3 \left(\frac{v}{EI} - \frac{1}{EA_d \sin \theta} \frac{d^2 v}{dx^2} \right), \quad \alpha_5 = \frac{\rho l^4}{EI}, \quad \alpha_6 = \frac{\rho l^3 v}{E^2 F A_d \sin \theta}, \\
 \alpha_7 &= \frac{\rho l^2}{E} \left\{ \frac{1}{F} + \frac{1}{A_d \sin \theta} \left(1 + \frac{u - H_0}{EF}\right) \right\}, \quad \alpha_8 = \frac{\rho^2 l^4}{E^2 F A_d \sin \theta}
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

ランガー橋の支承条件を満足する函数系は

$$\eta_n = \sin \gamma_n \xi, \quad \gamma_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \dots \dots \dots (51)$$

によつて与えられるので、これを用いて η をつぎのごとく表わすことにする。

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \gamma_n \xi, \quad a_n: \text{任意常数} \dots \dots \dots (52)$$

固有振動数方程式を Galerkin の方法により求めることにすれば

$$\int_0^1 \eta_m \left\{ \alpha_1 \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} + \alpha_2 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \alpha_3 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \alpha_4 \frac{d\eta}{d\xi} - \left(\alpha_5 \eta - \alpha_6 \frac{d\eta}{d\xi} - \alpha_7 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) \nu_0^2 + \alpha_8 \eta \nu_0^4 \right\} d\xi = 0 \dots \dots \dots (53)$$

8) 実在のランガー橋では近似的にはほぼ一定値であることが多いが、そうでない時は径間の全長に亘る平均値を採用しても大過を起さないと思う。

ここに $m=1, 2, \dots, \infty$ となる。

(53) 式を実際に計算すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{D}_{mn} - a_{mn} \nu_0^2 + \tau_{mn} \nu_0^4) = 0, \quad n=1, 2, \dots, \infty, m=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (54)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{mn} &= \int_0^1 (\alpha_1 \gamma_n^4 \sin \gamma_n \xi - \alpha_2 \gamma_n^3 \cos \gamma_n \xi + \alpha_3 \gamma_n^2 \sin \gamma_n \xi - \alpha_4 \gamma_n \cos \gamma_n \xi) \sin \gamma_m \xi d\xi \\ a_{mn} &= \int_0^1 (\alpha_5 \sin \gamma_n \xi - \alpha_6 \gamma_n \cos \gamma_n \xi + \alpha_7 \gamma_n^2 \sin \gamma_n \xi) \sin \gamma_m \xi d\xi \\ \tau_{mn} &= \int_0^1 \alpha_8 \sin \gamma_n \xi \sin \gamma_m \xi d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

なお φ が対称曲線と与えられる場合には m および n が共に奇数値または共に偶数値なる時のみ \mathcal{D}_{mn} , a_{mn} の値は存在し, m および n のいずれか一方が偶数値, 他の方が高数値の時には $\mathcal{D}_{mn} = a_{mn} = 0$ となり, また τ_{mn} は m と n とが同一値を取る時のみ存在し, 異なる値を取る時は $\tau_{mn} = 0$ となる。

(54) 式よりすべての任意常数を消去すれば, つぎのごとき固有円振動数方程式がえられる。

$$\left| \begin{array}{cccc} \mathcal{D}_{11} - a_{11} \nu_0^2 + \tau_{11} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{12} - a_{12} \nu_0^2 + \tau_{12} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{13} - a_{13} \nu_0^2 + \tau_{13} \nu_0^4, & \dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{21} - a_{21} \nu_0^2 + \tau_{21} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{22} - a_{22} \nu_0^2 + \tau_{22} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{23} - a_{23} \nu_0^2 + \tau_{23} \nu_0^4, & \dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{31} - a_{31} \nu_0^2 + \tau_{31} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{32} - a_{32} \nu_0^2 + \tau_{32} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{33} - a_{33} \nu_0^2 + \tau_{33} \nu_0^4, & \dots\dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right| = 0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

この方程式は φ が対称曲線と与えられる場合にはつぎの 2 つの方程式に分離される。

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{11} - a_{11} \nu_0^2 + \tau_{11} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{13} - a_{13} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{15} - a_{15} \nu_0^2, \dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{31} - a_{31} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{33} - a_{33} \nu_0^2 + \tau_{33} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{35} - a_{35} \nu_0^2, \dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{51} - a_{51} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{53} - a_{53} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{55} - a_{55} \nu_0^2 + \tau_{55} \nu_0^4, \dots\dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right| = 0 \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{22} - a_{22} \nu_0^2 + \tau_{22} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{24} - a_{24} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{26} - a_{26} \nu_0^2, \dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{42} - a_{42} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{44} - a_{44} \nu_0^2 + \tau_{44} \nu_0^4, & \mathcal{D}_{46} - a_{46} \nu_0^2, \dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{62} - a_{62} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{64} - a_{64} \nu_0^2, & \mathcal{D}_{66} - a_{66} \nu_0^2 + \tau_{66} \nu_0^4, \dots\dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right| = 0 \quad \dots\dots\dots (58)$$

なお (55) 式の \mathcal{D} , a , τ 等の値を実際に求めるには数値積分法によるのが便利である。

(56) 式よりえられる ν_0 の根のうち小なるものより並べて順次 $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n, \dots$ とすれば, これらは順次第 1 次, 第 2 次, 第 3 次 \dots 第 n 次 \dots の固有円振動数を表わすことになる。 ν_n に対応する第 n 次の固有振動周期 T_n は

$$T_n = \frac{2\pi}{\nu_n} \quad n=1, 2, \dots, \infty \quad \dots\dots\dots (59)$$

これらの ν_n を用いれば, 非減衰振動の一般解はつぎのごとく求められる。

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \gamma_n \xi \cdot \sin(\nu_n t + \delta_n) \quad \dots\dots\dots (60)$$

ここに $\gamma_n = n\pi$, $\xi = \frac{x}{l}$, a_n : 任意常数, δ_n : 任意常数, ν_n : 第 n 次の固有円振動数

(2) 減衰固有振動の解 この場合は腹材変形の影響を考慮に入れると一般には解をえにくいので, この影響を考慮に入れぬことにし, なお簡単のため I, I', A, A_d, a, ρ 等はすべて一定であると考えると, 固有振動の基礎微分方程式はつぎのごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{\rho I}{I'} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y - EI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \zeta_t \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + v \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_t \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial t} \right) y \\ &+ v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_t \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_t \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y \quad \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

いま変数を $\xi = \frac{x}{l}$ に変換して, 振動変位を

$$y = \eta(\xi) e^{\sigma_0 t}, \quad \sigma_0 = -\zeta + i\nu_0, \quad \zeta, \nu_0: \text{実数} \quad \dots\dots\dots (62)$$

と置いて固有振動の基礎微分方程式に代入すれば η に関するつぎの形の式がえられる。

$$\left(k_4 \eta - k_3 \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) \sigma_0^2 + \left\{ \zeta_0 \left(k_4 \eta - k_3 \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) + \zeta_1 \left(\frac{d^4 \eta}{dt^4} - k_1 \frac{d^2 \eta}{dt^2} - k_2 \frac{d \eta}{dt} \right) \right\} \sigma_0 + \left(\frac{d^4 \eta}{dt^4} - k_1 \frac{d^2 \eta}{dt^2} - k_2 \frac{d \eta}{dt} \right) = 0 \dots\dots\dots (63)$$

ここに $k_1 = \frac{(u-H_0)l^2}{EI}$, $k_2 = \frac{vl^3}{EI}$, $k_3 = \frac{\rho l^2}{EF}$, $k_4 = \frac{\rho l^4}{EI}$ (63)'

いま η に境界条件を満足する式

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \gamma_n \xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \pi \xi, \quad \xi = \frac{x}{l} \dots\dots\dots (64)$$

を代入して Galerkin の方法を適用すると、つぎの式がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mathcal{D}'_{mn} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{mn} \sigma_0 + \tau'_{mn}) = 0 \quad m=1, 2, \dots\dots\dots (65)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}'_{mn} &= \int_0^1 (k_4 + k_3 \gamma_n^2) \sin \gamma_n \xi \sin \gamma_m \xi d\xi \\ \mathcal{A}'_{mn} &= \int_0^1 [\zeta_0 (k_4 + k_3 \gamma_n^2) \sin \gamma_n \xi + \zeta_1 \{ (\gamma_n^4 + k_{11} \gamma_n^2) \sin \gamma_n \xi - k_2 \gamma_n \cos \gamma_n \xi \}] \sin \gamma_m \xi d\xi \\ \tau'_{mn} &= \int_0^1 \{ (\gamma_n^4 + k_{11} \gamma_n^2) \sin \gamma_n \xi - k_2 \gamma_n \cos \gamma_n \xi \} \sin \gamma_m \xi d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

(65) 式よりすべての任意常数を消去すれば σ に関するつぎの行列方程式がえられる。

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{11} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{11} \sigma_0 + \tau'_{11} & \mathcal{A}'_{13} \sigma_0 + \tau'_{13} & \mathcal{A}'_{15} \sigma_0 + \tau'_{15} \\ \mathcal{A}'_{21} \sigma_0 + \tau'_{21} & \mathcal{D}'_{22} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{22} \sigma_0 + \tau'_{22} & \mathcal{A}'_{23} \sigma_0 + \tau'_{23} \\ \mathcal{A}'_{31} \sigma_0 + \tau'_{31} & \mathcal{A}'_{32} \sigma_0 + \tau'_{32} & \mathcal{D}'_{33} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{33} \sigma_0 + \tau'_{33} \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots (67)$$

なお ϕ が対称曲線の場合には (67) 式は 2 つの行列方程式に分離される。

$$\left| \begin{array}{cc} \mathcal{D}'_{11} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{11} \sigma_0 + \tau'_{11} & \mathcal{A}'_{13} \sigma_0 + \tau'_{13} \\ \mathcal{A}'_{31} \sigma_0 + \tau'_{31} & \mathcal{D}'_{33} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{33} \sigma_0 + \tau'_{33} \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots (68)$$

$$\left| \begin{array}{cc} \mathcal{D}'_{22} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{22} \sigma_0 + \tau'_{22} & \mathcal{A}'_{24} \sigma_0 + \tau'_{24} \\ \mathcal{A}'_{42} \sigma_0 + \tau'_{42} & \mathcal{D}'_{44} \sigma_0^2 + \mathcal{A}'_{44} \sigma_0 + \tau'_{44} \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots (69)$$

いま例えば (68) 式の第 2 項までを取つて考えると、つぎのごとき σ_0 に関する方程式がえられる。

$$d_4 \sigma_0^4 + d_3 \sigma_0^3 + d_2 \sigma_0^2 + d_1 \sigma_0 + d_0 = 0 \dots\dots\dots (70)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} d_4 &= \mathcal{D}'_{11} \mathcal{D}'_{33}, \quad d_3 = \mathcal{D}'_{11} \mathcal{A}'_{33} + \mathcal{D}'_{33} \mathcal{A}'_{11}, \quad d_2 = \mathcal{D}'_{33} \tau'_{11} + \mathcal{D}'_{11} \tau'_{33} + \mathcal{A}'_{11} \mathcal{A}'_{33} - \mathcal{A}'_{13} \mathcal{A}'_{31} \\ d_1 &= \mathcal{A}'_{11} \tau'_{33} + \mathcal{A}'_{33} \tau'_{11} - \mathcal{A}'_{13} \tau'_{31} - \mathcal{A}'_{31} \tau'_{13}, \quad d_0 = \tau'_{11} \tau'_{33} - \tau'_{13} \tau'_{31} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

ここにおいて $\sigma_0 = -\zeta + i\nu_0$, ζ, ν_0 は共に実数 (72)

を (70) 式に代入して実部および虚部をそれぞれ零に等しくおくと、

$$d_4 (\zeta^4 - 6\zeta^2 \nu_0^2 + \nu_0^4) - d_3 \zeta (\zeta^2 - 3\nu_0^2) + d_2 (\zeta^2 - \nu_0^2) - d_1 \zeta + d_0 = 0 \dots\dots\dots (73)$$

$$4 d_4 \zeta (\zeta^2 - \nu_0^2) - d_3 (3\zeta^2 - \nu_0^2) + 2 d_2 \zeta - d_1 = 0 \dots\dots\dots (74)$$

がえられる。(74) 式より

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{4 d_4 \zeta^3 - 3 d_3 \zeta^2 + 2 d_2 \zeta - d_1}{4 d_4 \zeta - d_3}} \dots\dots\dots (75)$$

がえられるので、これを (73) 式に代入すると、 ζ に関するつぎの代数方程式がえられる。

$$A_6 \zeta^6 - A_5 \zeta^5 + A_4 \zeta^4 - A_3 \zeta^3 + A_2 \zeta^2 - A_1 \zeta + A_0 = 0 \dots\dots\dots (76)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_6 &= 64 d_4^3, & A_5 &= 96 d_2 d_4^2, & A_4 &= 16 d_4 (2 d_2 d_4 + 3 d_3^2) \\ A_3 &= 8 d_3 (4 d_2 d_4 + d_3^2), & A_2 &= 4 (d_2^2 d_4 + d_1 d_3 d_4 + 2 d_2 d_3^2 - 4 d_0 d_4^2) \\ A_1 &= 2 d_3 (d_2^2 + d_1 d_3 + 4 d_0 d_4), & A_0 &= d_1 d_2 d_4 - d_0 d_3^2 - d_1 d_4^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (77)$$

(76) 式よりえられる ζ の正の実根の小なるものより ζ_1, ζ_3 とすると、これに対応して (75) 式より第 1 次および第 3 次の固有円振動数 ν_1, ν_3 がえられる。

一般に (67) 式よりえられる第 1 次, 第 2 次……第 n 次……の固有円振動数および減衰係数をそれぞれ $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots$ および $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ とすれば, 減衰固有振動の一般解はつぎのごとく与えられる。

$$y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \gamma_n \xi \cdot e^{-\zeta_n \nu^t} \sin (\nu_n t + \delta_n) \dots\dots\dots (78)$$

ここに a_n, δ_n : 任意常数, $\gamma_n = n\pi, \xi = \frac{x}{l}$

なお第 n 次の固有振動周期 T_n はつぎのごとく与えられる。

$$T_n = \frac{2\pi}{\nu_n}$$

IV. 強制振動の解

(1) 非減衰強制振動の解 ここでは l, F, A, A_d, a, ρ が一定の場合につき解を求めることにする。いま強制力 Y が正弦的に

$$Y = Y_0(\xi) \sin(\nu t + \delta), \quad \nu: \text{作用円振動数}, \quad \delta: \text{位相角} \dots\dots\dots (79)$$

の形に作用するものとし, $Y_0(\xi)$ の径間 l 上のフーリエ級数展開を

$$Y_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi, \quad \gamma_n = n\pi \dots\dots\dots (80)$$

とすると, $Y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi \cdot \sin(\nu t + \delta) \dots\dots\dots (81)$

となる。ここに p_n は $Y_0(\xi)$ の正弦フーリエ係数である。

(81) 式によつて与えられる強制力が作用する場合, (39) 式を満足する強制振動の特解を

$$\bar{y} = \bar{\eta} \sin(\nu t + \delta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\nu t + \delta) \sin \gamma_n \xi, \quad B_n: \text{常数} \dots\dots\dots (82)$$

の形であるとし, この \bar{y} を (39) 式の y に代入して $\sin(\nu t + \delta)$ を分離すれば, つぎの形の $\bar{\eta}$ に関する方程式がえられる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{d^4 \bar{\eta}}{d\xi^4} + \alpha_2 \frac{d^3 \bar{\eta}}{d\xi^3} - \alpha^3 \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} - \alpha_4 \frac{d \bar{\eta}}{d\xi} - \left(\alpha_5 \bar{\eta} - \alpha_6 \frac{d \bar{\eta}}{d\xi} - \alpha_7 \frac{d^2 \bar{\eta}}{d\xi^2} \right) \nu^2 + \alpha_8 \bar{\eta} \nu^4 \\ = 2 \sum_{n=1}^{\infty} p_n (\alpha_9 + \alpha_{10} \gamma_n^2) \sin \gamma_n \xi \dots\dots\dots (83) \end{aligned}$$

ここに $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7, \alpha_8$ は (50) 式に与えられている係数であり, α_9, α_{10} はつぎのごとく与えられる係数である。

$$\alpha_9 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{EI} - \frac{\rho \nu^2}{E^2 F A_d \sin \theta} \right) l^4, \quad \alpha_{10} = \frac{l^2}{2 E A_d \sin \theta} \dots\dots\dots (84)$$

(83) 式の両辺に $\eta_m(\xi)$ を乗じて ξ に関して 0 より 1 まで積分すれば B_n に関するつぎの形の方程式がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n (\mathfrak{D}_{mn} - \alpha_{mn} \nu^2 + \tau_{mn} \nu^4) = \beta_m, \quad m=1, 2, \dots, \infty, \quad \beta_m = p_m (\alpha_9 + \alpha_{10} \gamma_m^2) \dots\dots\dots (85)$$

ここに $\mathfrak{D}_{mn}, \alpha_{mn}, \tau_{mn}$ は (55) 式によつて与えられている係数である。

(85) 式より係数 B_n を求めると,

$$B_n = \frac{D_{pn}}{D_{\nu}} = \frac{D_{pn}}{(\nu_n^2 - \nu^2) D_{\nu n}}, \quad D_{\nu n} = \frac{D_{\nu}}{\nu_n^2 - \nu^2} \dots\dots\dots (86)$$

の形に表現される。ここに

$$D_{\nu} = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{11} - a_{11}\nu^2 + \tau_{11}\nu^4, & \mathcal{D}_{12} - a_{12}\nu^2 + \tau_{12}\nu^4, & \dots, & \mathcal{D}_{1n} - a_{1n}\nu^2 + \tau_{1n}\nu^4, & \mathcal{D}_{1\bar{n}+1} - a_{1\bar{n}+1}\nu^2 + \tau_{1\bar{n}+1}\nu^4, & \dots \\ \mathcal{D}_{21} - a_{21}\nu^2 + \tau_{21}\nu^4, & \mathcal{D}_{22} - a_{22}\nu^2 + \tau_{22}\nu^4, & \dots, & \mathcal{D}_{2n} - a_{2n}\nu^2 + \tau_{2n}\nu^4, & \mathcal{D}_{2\bar{n}+1} - a_{2\bar{n}+1}\nu^2 + \tau_{2\bar{n}+1}\nu^4, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathcal{D}_{n1} - a_{n1}\nu^2 + \tau_{n1}\nu^4, & \mathcal{D}_{n2} - a_{n2}\nu^2 + \tau_{n2}\nu^4, & \dots, & \mathcal{D}_{nn} - a_{nn}\nu^2 + \tau_{nn}\nu^4, & \mathcal{D}_{n\bar{n}+1} - a_{n\bar{n}+1}\nu^2 + \tau_{n\bar{n}+1}\nu^4, & \dots \end{vmatrix} \dots (87)$$

$$D_{pn} = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{11} - a_{11}\nu^2 + \tau_{11}\nu^4, & \mathcal{D}_{12} - a_{12}\nu^2 + \tau_{12}\nu^4, & \dots, & \gamma_1(a_9 + a_{10}\gamma_1^2), & \mathcal{D}_{1\bar{n}+1} - a_{1\bar{n}+1}\nu^2 + \tau_{1\bar{n}+1}\nu^4, & \dots \\ \mathcal{D}_{21} - a_{21}\nu^2 + \tau_{21}\nu^4, & \mathcal{D}_{22} - a_{22}\nu^2 + \tau_{22}\nu^4, & \dots, & \gamma_2(a_9 + a_{10}\gamma_2^2), & \mathcal{D}_{2\bar{n}+1} - a_{2\bar{n}+1}\nu^2 + \tau_{2\bar{n}+1}\nu^4, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathcal{D}_{n1} - a_{n1}\nu^2 + \tau_{n1}\nu^4, & \mathcal{D}_{n2} - a_{n2}\nu^2 + \tau_{n2}\nu^4, & \dots, & \gamma_n(a_9 + a_{10}\gamma_n^2), & \mathcal{D}_{n\bar{n}+1} - a_{n\bar{n}+1}\nu^2 + \tau_{n\bar{n}+1}\nu^4, & \dots \end{vmatrix} \dots (88)$$

ここに $\gamma_n = n\pi$

いま拱肋の軸曲線 ϕ が対称曲線と与えられ、行列式の第4項までを考える場合を例にとつて D_{pn} , $D_{\nu n}$ の値を具体的に求めてみよう。

この場合は奇数添字行列式と偶数添字行列式とに分離して考えられる。従つて

$$\left. \begin{aligned} D_{p1} &= \begin{vmatrix} \gamma_1(a_9 + a_{10}\gamma_1^2), & \mathcal{D}_{13} - a_{13}\nu^2 \\ \gamma_3(a_9 + a_{10}\gamma_3^2), & \mathcal{D}_{33} - a_{33}\nu^2 + \tau_{33}\nu^4 \end{vmatrix} \\ D_{p2} &= \begin{vmatrix} \gamma_2(a_9 + a_{10}\gamma_2^2), & \mathcal{D}_{23} - a_{23}\nu^2 \\ \gamma_4(a_9 + a_{10}\gamma_4^2), & \mathcal{D}_{43} - a_{43}\nu^2 + \tau_{43}\nu^4 \end{vmatrix} \\ D_{p3} &= \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{11} - a_{11}\nu^2 + \tau_{11}\nu^4, & \gamma_1(a_9 + a_{10}\gamma_1^2) \\ \mathcal{D}_{31} - a_{31}\nu^2, & \gamma_3(a_9 + a_{10}\gamma_3^2) \end{vmatrix} \\ D_{p4} &= \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{22} - a_{22}\nu^2 + \tau_{22}\nu^4, & \gamma_2(a_9 + a_{10}\gamma_2^2) \\ \mathcal{D}_{42} - a_{42}\nu^2, & \gamma_4(a_9 + a_{10}\gamma_4^2) \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (89)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{\nu 1} &= (\mathcal{D}_{11}a_{33} + \mathcal{D}_{33}a_{11} - \mathcal{D}_{13}a_{31} - \mathcal{D}_{31}a_{13}) - (\mathcal{D}_{11}\tau_{33} + \mathcal{D}_{33}\tau_{11} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})(\nu_1^2 + \nu^2) \\ &\quad + (a_{11}\tau_{33} + a_{33}\tau_{11})(\nu_1^4 + \nu_1^2\nu^2 + \nu^4) - \tau_{11}\tau_{33}(\nu_1^2 + \nu^2)(\nu_1^4 + \nu^4) \\ D_{\nu 2} &= (\mathcal{D}_{22}a_{44} + \mathcal{D}_{44}a_{22} - \mathcal{D}_{24}a_{42} - \mathcal{D}_{42}a_{24}) - (\mathcal{D}_{22}\tau_{44} + \mathcal{D}_{44}\tau_{22} + a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42})(\nu_2^2 + \nu^2) \\ &\quad + (a_{22}\tau_{44} + a_{44}\tau_{22})(\nu_2^4 + \nu_2^2\nu^2 + \nu^4) - \tau_{22}\tau_{44}(\nu_2^2 + \nu^2)(\nu_2^4 + \nu^4) \\ D_{\nu 3} &= (\mathcal{D}_{11}a_{33} + \mathcal{D}_{33}a_{11} - \mathcal{D}_{13}a_{31} - \mathcal{D}_{31}a_{13}) - (\mathcal{D}_{11}\tau_{33} + \mathcal{D}_{33}\tau_{11} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})(\nu_3^2 + \nu^2) \\ &\quad + (a_{11}\tau_{33} + a_{33}\tau_{11})(\nu_3^4 + \nu_3^2\nu^2 + \nu^4) - \tau_{11}\tau_{33}(\nu_3^2 + \nu^2)(\nu_3^4 + \nu^4) \\ D_{\nu 4} &= (\mathcal{D}_{22}a_{44} + \mathcal{D}_{44}a_{22} - \mathcal{D}_{24}a_{42} - \mathcal{D}_{42}a_{24}) - (\mathcal{D}_{22}\tau_{44} + \mathcal{D}_{44}\tau_{22} + a_{22}a_{44} - a_{24}a_{42})(\nu_4^2 + \nu^2) \\ &\quad + (a_{22}\tau_{44} + a_{44}\tau_{22})(\nu_4^4 + \nu_4^2\nu^2 + \nu^4) - \tau_{22}\tau_{44}(\nu_4^2 + \nu^2)(\nu_4^4 + \nu^4) \end{aligned} \right\} \dots (90)$$

ここに $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ はそれぞれ第1次, 第2次, 第3次, 第4次の固有円振動数である。従つて強制振動の特解は一般につきのごとく与えられる。

$$\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{pn}}{(\nu_n^2 - \nu^2) D_{\nu n}} \sin \gamma_n \xi \cdot \sin(\nu t + \delta) \dots (91)$$

(81) 式によつて与えられる強制力を受けるランガー橋の強制振動の一般解はつきのごとく与えられる。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \gamma_n \xi \cdot \sin(\nu_n t + \delta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{pn}}{(\nu_n^2 - \nu^2) D_{\nu n}} \cdot \sin \gamma_n \xi \cdot \sin(\nu t + \delta) \dots (92)$$

ここに a_n, δ_n は任意常数である。

いま $\delta = 0$ にして $(y)_{t=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$ なる初期条件を満足する強制振動解を求めると,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{pn}}{(\nu_n^2 - \nu^2) D_{\nu n}} \left(\sin \nu t - \frac{\nu}{\nu_n} \sin \nu_n t \right) \sin \gamma_n \xi \dots (93)$$

となる。なお j 次の固有振動が強制動に共鳴する場合には,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{pn}}{(\nu_n^2 - \nu^2) D_{\nu n}} \left(\sin \nu t - \frac{\nu}{\nu_n} \sin \nu_n t \right) \sin \gamma_n \xi + \frac{D_{pj}}{2\nu^2 D_{\nu j}} (\sin \nu t - \nu t \cos \nu t) \sin \gamma_j \xi \dots (94)$$

となる。ここに $\sum'_{n=1}$ は $\sum_{n=1}$ の中の $n=j$ なる項を除いた和とする。

(2) 減衰強制振動の解 ここでは I, F, A, A_d, a, ρ がすべて一定であり、腹材変形の影響を考慮に入れない場合につき解を求めることにする。強制力は前項同様

$$Y = Y_0(\xi) \cdot \sin(\nu t + \delta), \quad \nu: \text{作用円振動数}, \quad \delta: \text{位相角}$$

の形に作用するものとする。これを径間 l 上のフーリエ級数に展開すると

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi \cdot \sin(\nu t + \delta), \quad \gamma_n = n\pi \dots \dots \dots (95)$$

となる。ここに p_n は $Y_0(\xi)$ の正弦フーリエ係数である。

この Y はまた次の形に表わされる。

$$Y = \text{Imaginary Part} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi e^{i(\nu t + \delta)} \right\} \dots \dots \dots (96)$$

複素強制力を Y_i とすると

$$Y_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi e^{i(\nu t + \delta)} \dots \dots \dots (97)$$

と表現される。

(96) 式にて示されている強制力が作用する場合の強制振動の方程式はつきのごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y - EI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \zeta_i \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} \right) y + u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_i \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y \\ &+ v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_i \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_i \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + \text{Imaginary Part} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi \cdot e^{i(\nu t + \delta)} \right\} \dots (98) \end{aligned}$$

この強制振動の方程式の特解はつきのごとき強制振動の方程式の特解の虚部によつて表現される。

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) y &= \frac{\rho I}{F} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \zeta_0 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y - EI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \zeta_i \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} \right) y + u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_i \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y \\ &+ v \left(\frac{\partial}{\partial x} + \zeta_i \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) y - H_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \zeta_i \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) y + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi \cdot e^{i(\nu t + \delta)} \dots \dots \dots (99) \end{aligned}$$

(99) 式の特解として想定されるところの

$$\bar{y}_i = \bar{\eta}_i \cdot e^{i(\nu t + \delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + iC_n) e^{i(\nu t + \delta)} \cdot \sin \gamma_n \xi \dots \dots \dots (100)$$

を (99) 式に代入して、 $e^{i(\nu t + \delta)}$ を分離すればつきの方程式がえられる。

$$\begin{aligned} - \left(k_4 \bar{\eta}_i - k_3 \frac{d^2 \bar{\eta}_i}{d\xi^2} \right) \nu^2 + i \left\{ \zeta_0 \left(k_4 \bar{\eta}_i - k_3 \frac{d^2 \bar{\eta}_i}{d\xi^2} \right) + \zeta_i \left(\frac{d^4 \bar{\eta}_i}{d\xi^4} - k_1 \frac{d^2 \bar{\eta}_i}{d\xi^2} - k_2 \frac{d \bar{\eta}_i}{d\xi} \right) \right\} \nu \\ + \left(\frac{d^4 \bar{\eta}_i}{d\xi^4} - k_1 \frac{d^2 \bar{\eta}_i}{d\xi^2} - k_2 \frac{d \bar{\eta}_i}{d\xi} \right) = 2 k_5 \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \gamma_n \xi \dots \dots \dots (101) \end{aligned}$$

ここに k_1, k_2, k_3, k_4 は (63)' 式にて示されたものであり、 k_5 はつきのごとく与えられるものである。

$$k_5 = \frac{l^4}{2EI} \dots \dots \dots (102)$$

(101) 式の両辺に $\sin \gamma_m \xi$ を乗じ、 ξ に関し 0 より 1 まで積分するとつきの方がえられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_n + iC_n) (-\mathcal{D}'_{mn} \nu^2 + i\alpha'_{mn} \nu + \tau'_{mn}) = k_5 p_m, \quad m=1, 2, \dots \dots \dots (103)$$

ここに $\mathcal{D}'_{mn}, \alpha'_{mn}, \tau'_{mn}$ は (66) 式に示されているものである。(103) 式を実部および虚部に分離すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ B_n (-\mathcal{D}'_{mn} \nu^2 + \tau'_{mn}) - C_n \alpha'_{mn} \nu \} = k_5 p_m \dots \dots \dots (104)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ B_n \alpha'_{mn} + C_n (-\mathcal{D}'_{mn} \nu^2 + \tau'_{mn}) \} = 0 \dots \dots \dots (105)$$

となる。この両式より任意の B_n, C_n はえられるのであるが、いま拱軸曲線が対称曲線として与えられる場合 $n=4$ すなわち第4項まで取つて B_n, C_n を求めることにする。この場合は $\mathcal{D}'_{mn} = 0 (m \neq n), \alpha'_{12} = \alpha'_{21} = \alpha'_{14} = \alpha'_{41} = \alpha'_{23} = \alpha'_{32} = \tau'_{12} = \tau'_{21} = \tau'_{14} = \tau'_{41} = \tau'_{23} = \tau'_{32} = 0$ となるので奇数添字方程式群と偶数添字方程式群は分離され各係数はつきのごとく求められる。

$$B_1 = \frac{D_{p1}}{D_{v1}}, \quad C_1 = \frac{D'_{p1}}{D_{v1}}, \quad B_2 = \frac{D_{p2}}{D_{v2}}, \quad C_2 = \frac{D'_{p2}}{D_{v2}}, \quad B_3 = \frac{D_{p3}}{D_{v3}}, \quad C_3 = \frac{D'_{p3}}{D_{v3}}, \quad B_4 = \frac{D_{p4}}{D_{v4}}, \quad C_4 = \frac{D'_{p4}}{D_{v4}} \dots (106)$$

9) Imaginary Part は虚部と云う意味であり、{ } 内の値の虚数 i の係数値のことである。

$$\begin{aligned}
D_{p1} &= k_5^2 \{ (\zeta_1^2 6 \nu_1^2 - \zeta_1^2 - \nu_1^4 - \nu^4) d_{11} - \zeta_1 (3 \nu_1^2 - \zeta_1^2) d_{13} + (\nu_1^2 - \nu^2 - \zeta_1^2) d_{12} + \zeta_1 d_{11} \} (-\mathcal{D}'_{33} \nu^2 p_1 \\
&\quad + \tau'_{33} p_1 - \tau'_{31} p_3) - \nu \{ 4 \zeta_1 \nu_1 (\nu_1^2 - \zeta_1^2) d_{14} - (\nu_1^3 - \nu^3 - 3 \nu_1 \zeta_1^2) d_{13} - 2 \zeta_1 \nu_1 d_{12} \\
&\quad + (\nu_1 - \nu) d_{11} \} (\mathcal{A}'_{33} p_1 - \mathcal{A}'_{31} \nu^2) \\
D'_{p1} &= k_5^2 \{ (\zeta_1^2 6 \nu_1^2 - \zeta_1^2 - \nu_1^4 - \nu^4) d_{11} - \zeta_1 (3 \nu_1^2 - \zeta_1^2) d_{13} + (\nu_1^2 - \nu^2 - \zeta_1^2) d_{12} + \zeta_1 d_{11} \} (\mathcal{A}'_{33} p_1 \\
&\quad - \mathcal{A}'_{31} \nu^2) + \nu \{ 4 \zeta_1 \nu_1 (\nu_1^2 - \zeta_1^2) d_{14} - (\nu_1^3 - \nu^3 - 3 \nu_1 \zeta_1^2) d_{13} - 2 \zeta_1 \nu_1 d_{12} + (\nu_1 - \nu) d_{11} \} (-\mathcal{D}'_{33} \nu^2 p_1 \\
&\quad + \tau'_{33} p_1 - \tau'_{31} p_3) \\
D_{p2} &= k_5^2 \{ (\zeta_2^2 6 \nu_2^2 - \zeta_2^2 - \nu_2^4 - \nu^4) d_{21} - \zeta_2 (3 \nu_2^2 - \zeta_2^2) d_{23} + (\nu_2^2 - \nu^2 - \zeta_2^2) d_{22} + \zeta_2 d_{21} \} (-\mathcal{D}'_{44} \nu^2 p_2 \\
&\quad + \tau'_{44} p_2 - \tau'_{42} p_4) - \nu \{ 4 \zeta_2 \nu_2 (\nu_2^2 - \zeta_2^2) d_{24} - (\nu_2^3 - \nu^3 - 3 \nu_2 \zeta_2^2) d_{23} - 2 \zeta_2 \nu_2 d_{22} \\
&\quad + (\nu_2 - \nu) d_{21} \} (\mathcal{A}'_{44} p_2 - \mathcal{A}'_{42} \nu^2) \\
D'_{p2} &= k_5^2 \{ (\zeta_2^2 6 \nu_2^2 - \zeta_2^2 - \nu_2^4 - \nu^4) d_{21} - \zeta_2 (3 \nu_2^2 - \zeta_2^2) d_{23} + (\nu_2^2 - \nu^2 - \zeta_2^2) d_{22} + \zeta_2 d_{21} \} (\mathcal{A}'_{44} p_2 \\
&\quad - \mathcal{A}'_{42} \nu^2) + \nu \{ 4 \zeta_2 \nu_2 (\nu_2^2 - \zeta_2^2) d_{24} - (\nu_2^3 - \nu^3 - 3 \nu_2 \zeta_2^2) d_{23} - 2 \zeta_2 \nu_2 d_{22} + (\nu_2 - \nu) d_{21} \} (-\mathcal{D}'_{44} \nu^2 p_2 \\
&\quad + \tau'_{44} p_2 - \tau'_{42} p_4) \\
D_{p3} &= k_5^2 \{ (\zeta_3^2 6 \nu_3^2 - \zeta_3^2 - \nu_3^4 - \nu^4) d_{31} - \zeta_3 (3 \nu_3^2 - \zeta_3^2) d_{33} + (\nu_3^2 - \nu^2 - \zeta_3^2) d_{32} + \zeta_3 d_{31} \} (-\mathcal{D}'_{11} p_3 \\
&\quad + \tau'_{11} p_3 - \tau'_{13} p_1) - \nu \{ 4 \zeta_3 \nu_3 (\nu_3^2 - \zeta_3^2) d_{34} - (\nu_3^3 - \nu^3 - 3 \nu_3 \zeta_3^2) d_{33} - 2 \zeta_3 \nu_3 d_{32} \\
&\quad + (\nu_3 - \nu) d_{31} \} (\mathcal{A}'_{11} p_3 - \mathcal{A}'_{13} \nu^2) \\
D'_{p3} &= k_5^2 \{ (\zeta_3^2 6 \nu_3^2 - \zeta_3^2 - \nu_3^4 - \nu^4) d_{31} - \zeta_3 (3 \nu_3^2 - \zeta_3^2) d_{33} + (\nu_3^2 - \nu^2 - \zeta_3^2) d_{32} + \zeta_3 d_{31} \} (\mathcal{A}'_{11} p_3 \\
&\quad - \mathcal{A}'_{13} \nu^2) + \nu \{ 4 \zeta_3 \nu_3 (\nu_3^2 - \zeta_3^2) d_{34} - (\nu_3^3 - \nu^3 - 3 \nu_3 \zeta_3^2) d_{33} - 2 \zeta_3 \nu_3 d_{32} + (\nu_3 - \nu) d_{31} \} (-\mathcal{D}'_{11} p_3 \\
&\quad + \tau'_{11} p_3 - \tau'_{13} p_1) \\
D_{p4} &= k_5^2 \{ (\zeta_4^2 6 \nu_4^2 - \zeta_4^2 - \nu_4^4 - \nu^4) d_{41} - \zeta_4 (3 \nu_4^2 - \zeta_4^2) d_{43} + (\nu_4^2 - \nu^2 - \zeta_4^2) d_{42} + \zeta_4 d_{41} \} (-\mathcal{D}'_{22} p_4 \\
&\quad + \tau'_{22} p_4 - \tau'_{24} p_2) - \nu \{ 4 \zeta_4 \nu_4 (\nu_4^2 - \zeta_4^2) d_{44} - (\nu_4^3 - \nu^3 - 3 \nu_4 \zeta_4^2) d_{43} - 2 \zeta_4 \nu_4 d_{42} + (\nu_4 - \nu) d_{41} \} \\
&\quad (\mathcal{A}'_{22} p_4 - \mathcal{A}'_{24} \nu^2) \\
D'_{p4} &= k_5^2 \{ (\zeta_4^2 6 \nu_4^2 - \zeta_4^2 - \nu_4^4 - \nu^4) d_{41} - \zeta_4 (3 \nu_4^2 - \zeta_4^2) d_{43} + (\nu_4^2 - \nu^2 - \zeta_4^2) d_{42} + \zeta_4 d_{41} \} (\mathcal{A}'_{22} p_4 \\
&\quad - \mathcal{A}'_{24} \nu^2) + \nu \{ 4 \zeta_4 \nu_4 (\nu_4^2 - \zeta_4^2) d_{44} - (\nu_4^3 - \nu^3 - 3 \nu_4 \zeta_4^2) d_{43} - 2 \zeta_4 \nu_4 d_{42} + (\nu_4 - \nu) d_{41} \} (-\mathcal{D}'_{22} p_4 \\
&\quad + \tau'_{22} p_4 - \tau'_{24} p_2) \\
D_{\nu_1} &= \{ (\nu_1 - \nu)^2 + \zeta_1^2 \} [\zeta_1 (3 \nu_1^2 + 2 \nu_1 \nu + \nu^2 - \zeta_1^2) d_{14} - (\nu_1^2 + \nu_1 \nu + \nu^2 - \zeta_1^2) d_{13} - \zeta_1 d_{12} + d_{11}]^2 \\
&\quad + [(\nu_1 + \nu \nu_1^2 + \nu^2 - \zeta_1^2) 3 (\nu_1 + \nu) d_{14} + \zeta_1 (2 \nu_1 + \nu) d_{13} - (\nu_1 + \nu) d_{12}]^2 \\
D_{\nu_2} &= \{ (\nu_2 - \nu)^2 + \zeta_2^2 \} [\zeta_2 (3 \nu_2^2 + 2 \nu_2 \nu + \nu^2 - \zeta_2^2) d_{24} - (\nu_2^2 + \nu_2 \nu + \nu^2 - \zeta_2^2) d_{23} - \zeta_2 d_{22} + d_{21}]^2 \\
&\quad + [(\nu_2 + \nu \nu_2^2 + \nu^2 - \zeta_2^2) 3 (\nu_2 + \nu) d_{24} + \zeta_2 (2 \nu_2 + \nu) d_{23} - (\nu_2 + \nu) d_{22}]^2 \\
D_{\nu_3} &= \{ (\nu_3 - \nu)^2 + \zeta_3^2 \} [\zeta_3 (3 \nu_3^2 + 2 \nu_3 \nu + \nu^2 - \zeta_3^2) d_{34} - (\nu_3^2 + \nu_3 \nu + \nu^2 - \zeta_3^2) d_{33} - \zeta_3 d_{32} + d_{31}]^2 \\
&\quad + [(\nu_3 + \nu \nu_3^2 + \nu^2 - \zeta_3^2) 3 (\nu_3 + \nu) d_{34} + \zeta_3 (2 \nu_3 + \nu) d_{33} - (\nu_3 + \nu) d_{32}]^2 \\
D_{\nu_4} &= \{ (\nu_4 - \nu)^2 + \zeta_4^2 \} [\zeta_4 (3 \nu_4^2 + 2 \nu_4 \nu + \nu^2 - \zeta_4^2) d_{44} - (\nu_4^2 + \nu_4 \nu + \nu^2 - \zeta_4^2) d_{43} - \zeta_4 d_{42} + d_{41}]^2 \\
&\quad + [(\nu_4 + \nu \nu_4^2 + \nu^2 - \zeta_4^2) 3 (\nu_4 + \nu) d_{44} + \zeta_4 (2 \nu_4 + \nu) d_{43} - (\nu_4 + \nu) d_{42}]^2
\end{aligned}
\tag{107}$$

ここに $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ はそれぞれ第1次第2次第3次第4次の固有円振動数であつて、 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ はそれぞれ第1次第2次第3次第4次の減衰係数であり、

$$\begin{aligned}
d_{11} &= d_{31} = \mathcal{D}'_{11} \mathcal{D}'_{33}, \quad d_{13} = d_{33} = \mathcal{D}'_{11} \mathcal{A}'_{33} + \mathcal{D}'_{33} \mathcal{A}'_{11}, \quad d_{12} = d_{32} = \mathcal{D}'_{33} \tau'_{11} + \mathcal{D}'_{11} \tau'_{33} + \mathcal{A}'_{11} \mathcal{A}'_{33}, \\
&\quad - \mathcal{A}'_{13} \mathcal{A}'_{31}, \quad d_{11} = d_{31} = \mathcal{A}'_{11} \tau'_{33} + \mathcal{A}'_{33} \tau'_{11} - \mathcal{A}'_{13} \tau'_{31} - \mathcal{A}'_{31} \tau'_{13} \\
d_{21} &= d_{41} = \mathcal{D}'_{22} \mathcal{D}'_{44}, \quad d_{23} = d_{43} = \mathcal{D}'_{22} \mathcal{A}'_{44} + \mathcal{D}'_{44} \mathcal{A}'_{22}, \quad d_{22} = d_{42} = \mathcal{D}'_{44} \tau'_{22} + \mathcal{D}'_{22} \tau'_{44} + \mathcal{A}'_{22} \mathcal{A}'_{44} \\
&\quad - \mathcal{A}'_{24} \mathcal{A}'_{42}, \quad d_{21} = d_{41} = \mathcal{A}'_{22} \tau'_{44} + \mathcal{A}'_{44} \tau'_{22} - \mathcal{A}'_{24} \tau'_{42} - \mathcal{A}'_{42} \tau'_{24}
\end{aligned}
\tag{109}$$

である。なお上記の各 $\mathcal{D}'_{mn}, \mathcal{A}'_{mn}, \tau'_{mn}$ は (66) 式に示されているものである。

同様にして一般に $(B_n + iC_n)$ はつぎの形に求められる。

$$B_n + iC_n = \frac{D_{pn} + iD'_{pn}}{D_{\nu n}} \tag{110}$$

従つて一般に \bar{y}_i はつぎの形に求められる。

$$\bar{y}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{pn} + iD'_{pn}}{D_{\nu n}} e^{i(\nu t + \delta)} \sin \gamma_n t \tag{111}$$

これよりして (98) 式によつて表わされている実際の強制振動の方程式の特解 \bar{y} はつぎのごとく与えられる。

$$\bar{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D_{\nu n}} \{ D_{pn} \sin(\nu t + \delta) + D'_{pn} \cos(\nu t + \delta) \} \sin \gamma_n t \tag{112}$$

従つて (98) 式の一般解はつぎの形に与えられる事がわかる。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\zeta_n t} \sin(\nu_n t + \delta_n) \sin \gamma_n \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D \nu_n} \{ D_{pn} \sin(\nu t + \delta) + D'_{pn} \cos(\nu t + \delta) \} \sin \gamma_n \xi \dots (113)$$

ここに a_n, δ_n は任意常数である。

いま $\delta=0$ にして、 $(y)_{t=0} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$ なる初期条件を満足する解を求めるとつぎのごとくなる。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{D \nu_n} \left[D_{pn} \left\{ \sin \nu t - \frac{\nu e^{-\zeta_n t}}{\nu_n \cos \delta_n} \sin(\nu_n t + \delta_n) \right\} + D'_{pn} \left\{ \cos \nu t - \frac{\zeta_n e^{-\zeta_n t}}{\nu_n \cos \delta_n} \times \sin(\nu_n t + \delta_n) \right\} \right] \sin \gamma_n \xi \dots (114)$$

$$\text{ここに } \delta_n = \tan^{-1} \left(\frac{\nu_n D'_{pn}}{\nu D_{pn} + \zeta_n D'_{pn}} \right) \dots (115)$$

さていままで述べたところにより、移動せざる任意の正弦的強制力が作用する場合の強制振動解は求めたのであるが、実際の具体的問題においては、それらの場合に対応する強制力の正弦フーリエ係数 p_n を求めなければならない。例えば、

$$u = b \cdot \sin(\nu t + \delta), \quad b: \text{半振巾} \dots (116)$$

なる正弦的地震動がランガー橋に作用する場合には、ランガー橋の単位長当りに作用する強制力 Y は

$$Y = \rho b \nu^2 \sin(\nu t + \delta), \quad 0 \leq \xi = x/l \leq 1 \dots (117)$$

によつて与えられ、従つて $Y_0(\xi)$ は

$$Y_0(\xi) = \rho b \nu^2, \quad 0 \leq \xi = x/l \leq 1 \dots (118)$$

となる。この場合の $Y_0(\xi)$ の正弦フーリエ係数 p_n は

$$p_n = 2 \rho b \nu^2 [1 - (-1)^n] / \gamma_n, \quad \gamma_n = n\pi \dots (119)$$

によつて与えられる事がわかる。

従つて (116) 式にて示されるごとき正弦的地震動が作用する場合のランガー橋の強制振動の解は、前述の一一般解における p_n の代りに (119) 式の値を用いる事によつて容易に求められる。

V 固有振動周期の数値計算例

ここでは長野県犀川に円弧拱肋軸をもつランガートラス橋として昭和 10 年に架設された犀川橋と福井県九頭龍川に抛物線拱肋軸をもつランガートラス橋として昭和 24 年に架設された舟橋について数値計算を行つた結果を示す事にする。紙数の関係上計算の詳細は記述できないが、これについては別記論文を参照される事を望む¹⁰⁾。なおここでは非減衰振動の場合を取扱う事にする。

(1) 犀川橋の固有振動周期の計算値 計算に必要な基本的数値はつぎのごとくである¹¹⁾。

$$\begin{aligned} l &= 6020 \text{ cm}, \quad h = 185 \text{ cm}, \quad f = 700 \text{ cm}, \quad A = 240.80 \text{ cm}^2, \quad A_u = 115.6457 \text{ cm}^2, \quad A_l = 195.4801 \text{ cm}^2, \\ A_a &= 66.9260 \text{ cm}^2, \quad a = 0.121276 \text{ cm}, \quad P' = 311.1258 \text{ cm}^2, \quad J = 17796 \text{ cm}^4, \quad I = 2494588 \text{ cm}^4, \\ \sin \theta &= 0.918592, \quad H = -118453 \text{ kg}, \quad H_0 = -148302 \text{ kg}, \quad \rho = 0.02561204 \text{ kg-sec}^2/\text{cm}^2, \\ E &= 2100000 \text{ kg/cm}^2, \quad R = 6821.5 \text{ cm}, \quad k = \frac{2R}{l} = 2.26628, \quad \lambda = \frac{H}{EA} = -0.234245 \times 10^{-5} \\ \mu &= \frac{A}{a} = 1985.554 \text{ cm}, \quad \text{格間長 } \lambda_0 = 430 \text{ cm} \end{aligned}$$

基本曲線数値は表一のごとくであり、固有振動周期の算定に必要な正弦および余弦の値は表二のごとくである。

以上の諸資料を用いて固有振動周期の計算値を示すとつぎのごとくである。

腹材変形の影響をも考慮に入れた場合

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 18.22 \text{ sec}^{-1}, \quad \nu_2 = 37.64 \text{ sec}^{-1}, \quad \nu_3 = 63.03 \text{ sec}^{-1}, \quad T_1 = 0.345 \text{ sec}, \quad T_2 = 0.167 \text{ sec}, \\ T_3 &= 0.0997 \text{ sec} \end{aligned}$$

腹材変形の影響を無視した場合

$$\nu_1' = 18.89 \text{ sec}^{-1}, \quad T_1' = 0.333 \text{ sec}$$

10) 建設省土木研究所報告 83 号, 84 号: ランガー橋の振動に関する研究

11) l, P, A, A_a, a, ρ は橋長方向の値の変化が僅少であるから、橋長方向の平均値を採用した。なお拱肋軸曲線は対称円弧曲線である。

表-1

ξ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	単位	備考
φ	0	-0.086 671	-0.128 587	-0.196 978	-0.223 716	-0.232 558	3010 cm	対称
φ'	-0.491 709	-0.377 290	-0.277 481	-0.179 316	-0.038 596	0	1	逆対称
φ''	2.028 550	1.783 854	1.652 252	1.537 223	1.483 246	1.465 953	10 ⁻⁴ cm ⁻¹	対称
φ'''	-0.483 229	-0.317 419	-0.206 879	-0.123 160	-0.053 018	0	10 ⁻⁷ cm ⁻²	逆対称
φ''''	3.587 274	2.256 392	1.577 228	1.187 378	1.001 636	0.945 107	10 ⁻¹¹ cm ⁻³	対称
ψ	0.174 723	0.116 588	0.070 357	0.030 663	0.007 758	0	1	対称
ψ'	-1.020 606	-0.903 726	-0.746 111	-0.504 241	-0.256 721	0	10 ⁻⁴ cm ⁻¹	逆対称
ψ''	1.412 912	2.549 537	3.387 676	3.892 565	4.200 234	4.298 032	10 ⁻⁸ cm ⁻²	対称
ψ'''	-2.223 110	-1.585 818	-1.109 693	-0.694 406	-0.332 400	0	10 ⁻¹¹ cm ⁻³	逆対称
u	7.542 0004	5.305 2467	3.332 8170	1.497 9385	0.378 5290	-0.011 8422	10 ⁷ kg	対称
u'	-3.664 8127	-3.686 8339	-3.320 6185	-2.416 3370	-1.281 3395	0	10 ⁴ kgcm ⁻¹	逆対称
u''	-0.622 7047	0.261 8180	1.010 0682	1.643 4309	2.038 2370	2.173 7257	10 kgcm ⁻²	対称
v	-4.411 4016	-4.120 6055	-3.545 6175	-2.482 2275	-1.289 8374	0	10 ⁴ kgcm ⁻¹	逆対称
v'	0.184 8247	0.825 6144	1.374 9652	1.856 2303	2.081 3811	2.173 4288	10 kgcm ⁻²	対称
v''	-6.157 5710	-3.567 3840	-1.758 3390	-0.800 8320	-0.239 1090	0	10 ⁻³ kgcm ⁻³	逆対称

表-2

ξ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	備考
sin γ ₁ ξ	0	0.309 02	0.587 79	0.809 02	0.951 06	1	対称
cos γ ₁ ξ	1	0.951 06	0.809 02	0.587 79	0.309 02	0	逆対称
sin γ ₂ ξ	0	0.587 79	0.951 06	0.951 06	0.587 79	0	逆対称
cos γ ₂ ξ	1	0.809 02	0.309 02	-0.309 02	-0.809 02	-1	対称
sin γ ₃ ξ	0	0.809 02	0.951 06	0.309 02	-0.587 79	-1	対称
cos γ ₃ ξ	1	0.587 79	-0.309 02	-0.951 06	-0.809 02	0	逆対称

腹材変形および垂直吊材の変形を無視した場合、

$$\nu_1'' = 19.39 \text{ sec}^{-1}, \quad T_1'' = 0.324 \text{ sec}$$

ここに ν は固有円振動数を表わし、T は固有振動周期を表わし、これらの文字の横の添字は振動型の次数を示すものであつて、例えば T₃ は第 3 次の固有振動周期を表わす記号である。

いま T₁' および T₁'' の T₁ に対する誤差の百分率を示すとつぎのごとくである。

$$\frac{T_1 - T_1'}{T_1} \times 100 = 3.5\%, \quad \frac{T_1 - T_1''}{T_1} \times 100 = 6.0\%$$

これよりして、この橋では腹材変形の影響と垂直吊材の伸縮の影響は共に約 3% の固有振動周期の誤差となつて表われて来ている事がわかる。

(2) 舟橋の固有振動周期の計算値 この橋は前述のごとく対称抛物線拱肋軸をもつランガートラス橋であつて、計算に必要な、基本的数値はつぎのごとくである¹²⁾。

$$l = 5810 \text{ cm}, \quad h = 200 \text{ cm}, \quad f = 750 \text{ cm}, \quad A = 286.4 \text{ cm}^2, \quad A_u = 132.36 \text{ cm}^2, \quad A_l = 213.14 \text{ cm}^2,$$

$$A_d = 91.66 \text{ cm}^2, \quad F = 345.76 \text{ cm}^2, \quad a = 0.213287 \text{ cm}, \quad \sin \theta = 0.900861, \quad I = 3266132 \text{ cm}^4,$$

$$H = -165897 \text{ kg}, \quad H_0 = H + \frac{AE}{l} \left(\frac{\psi}{\phi'} \right)_{x=0} = -203394 \text{ kg}, \quad \rho = 0.03817415 \text{ kg-sec}^2/\text{cm}^2,$$

$$E = 2100000 \text{ kg/cm}^2, \quad k = \frac{Af}{l} = 0.516351, \quad \text{格間長 } \lambda_0 = 415 \text{ cm}, \quad \lambda = \frac{H}{EA} = -0.275833 \times 10^{-3},$$

$$\mu = \frac{A}{a} = 1.342792 \times 10^3 \text{ cm}$$

基本曲線数値は表-3 に示すごとくである。

12) I, F, A_d, a, ρ は橋長方向の平均値を近似的に採用する事にした。

表-3

ξ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	単 位	備 考
φ	0	-270	-480	-630	-720	-750	cm	対 称
φ'	-0.516 351 11	-0.413 080 90	-0.309 810 67	-0.206 540 44	-0.103 270 22	0	1	逆対称
φ''	0.177 745 65	0.177 745 65	0.177 745 65	0.177 745 65	0.177 745 65	0.177 745 65	10^{-6}cm^{-1}	対 称
ψ	0.187 034 50	0.134 721 72	0.083 654 17	0.040 071 41	0.010 496 38	0	1	対 称
ψ'	-0.881 097 29	-0.903 713 20	-0.833 791 46	-0.647 370 18	-0.355 603 10	0	10^{-4}cm^{-1}	逆対称
ψ''	-0.109 225 90	0.032 989 59	0.220 667 63	0.418 864 77	0.573 197 06	0.631 870 32	10^{-7}cm^{-2}	対 称
ψ'''	0.196 462 61	0.290 264 37	0.345 636 44	0.320 294 10	0.195 330 05	0	10^{-10}cm^{-3}	逆対称
u	10.157 782 39	7.470 900 63	4.754 544 39	2.329 216 03	0.610 127 46	-0.016 588 61	10^7kg	対 称
u'	-3.944 886 80	-4.245 272 25	-4.220 464 09	-3.601 856 85	-2.086 662 18	0	10^4kgcm^{-1}	逆対称
u''	-0.638 184 20	-0.113 295 60	0.653 488 90	1.999 021 30	3.264 892 50	3.796 820 40	10kgcm^{-2}	対 称
v	-4.792 264 35	-5.021 761 24	-4.754 590 36	-3.789 026 33	-2.122 813 51	0	10^4kgcm^{-1}	逆対称
v'	-0.743 396 80	-0.025 323 60	1.037 526 00	2.294 814 10	3.369 251 60	3.794 320 50	10kgcm^{-2}	対 称
v''	0.949 376 00	1.539 477 00	2.026 582 00	2.069 822 00	1.355 704 00	0	10^{-2}kgcm^{-3}	逆対称

以上の諸資料を用いて固有振動周期の計算値を示すとつぎのごとくである。

腹材変形の影響をも考慮に入れた場合、

$$\nu_1 = 18.87 \text{ sec}^{-1}, \quad T_1 = 0.333 \text{ sec}$$

腹材変形の影響を無視した場合、

$$\nu_1' = 19.38 \text{ sec}^{-1}, \quad T_1' = 0.324 \text{ sec}$$

腹材変形および垂直吊材の変形を無視した場合、

$$\nu_1'' = 19.59 \text{ sec}^{-1}, \quad T_1'' = 0.321 \text{ sec}$$

T_1' および T_1'' の T_1 に対する誤差の百分率は、

$$\frac{T_1 - T_1'}{T_1} \times 100 = 2.6\%, \quad \frac{T_1 - T_1''}{T_1} \times 100 = 3.7\%$$

である。

VI 振動実測結果よりえられた犀川橋の固有振動周期

この犀川橋は長野県道池田明科停車場線の犀川横過点に昭和 10 年に架設されたランガートラス橋であつて、径間長 60.20 m, 拱矢 7.00 m, 補剛トラス高 1.85 m, 有効巾員 5.5 m, 径間数 5, 全長 305 m のものである。

橋の 5 径間に対し右岸側より番号を附けて No. 1 $S_p(S_{p1})$, No. 2 $S_p(S_{p2})$, No. 3 $S_p(S_{p3})$, No. 4 $S_p(S_{p4})$, No. 5 $S_p(S_{p5})$ と呼ぶ事にすれば, S_{p1} は起震機およびトラック走行により, S_{p2}, S_{p3}, S_{p4} はトラック走行により起震して振動状態を測定した。起震機は 3HP の整流子モーターによつて 150~2500 rev/min の回転数に連続可変なるように当研究所で試作したもので、約 1000 回転の時 1.5 ton の出力を持つものである。走行トラックは前軸重 2.23 ton, 後軸重 7.17 ton, 全重 9.40 ton のもので、これを予定速度 5~20 km/hr で走行させた。

S_{p1} と S_{p5} の振動測定には田辺式撓度振動計を用い、 S_{p2} と S_{p4} の振動測定には携帯用橋梁振動計を用いた。

田辺式撓度振動計: 0.1~1.0 sec (周期), 0.1~10 mm (振巾), 携帯用橋振動計: 0.2~1.0 sec (周期), 0.1~1 mm (振巾)

振動実測結果よりえられた最大衝撃撓度, 最大静的撓度, 最大振巾, 衝撃率, 減衰比, 減衰係数, 固有振動周期 etc に対する一般的説明は紙数の関係上ここでは省略するが、これに対しては別に発表する予定である¹³⁾。

実測固有振動周期はつぎのごとくである。

S_{p1} に対しては

トラック走行の場合

$$\begin{cases} \text{上流構} & T_{a1} = 0.367 \sim 0.374 \text{ sec} \\ \text{下流構} & T_{a1} = 0.368 \sim 0.372 \text{ sec} \\ \text{平均値} & T_{n1} = 0.3705 \text{ sec}^{14)} \end{cases}$$

13) 前註 10) 参照

14) 平均値は全実測回数に対する平均値である。

起震機の場合

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{上流構 } T_{a1}=0.367\sim 0.372 \text{ sec, } T_{a2}=0.165\sim 0.175 \text{ sec, } T_{a3}=0.098\sim 0.104 \text{ sec} \\ \text{下流構 } T_{a1}=0.365\sim 0.375 \text{ sec, } T_{a2}=0.160\sim 0.174 \text{ sec, } T_{a3}=0.093\sim 0.100 \text{ sec} \\ \text{平均値 } T_{a1}=0.3698 \text{ sec, } T_{a2}=0.168 \text{ sec, } T_{a3}=0.1017 \text{ sec} \end{array} \right.$$

$$S_{p1} \text{ の全体の平均値 } T_{a1}=0.370 \text{ sec, } T_{a2}=0.168 \text{ sec, } T_{a3}=0.102 \text{ sec}$$

$$S_{p2} \text{ に対しては } T_{a1}=0.362\sim 0.376 \text{ sec, 平均値 } T_{a1}=0.372 \text{ sec}$$

$$S_{p3} \text{ に対しては } T_{a1}=0.368\sim 0.375 \text{ sec, 平均値 } T_{a1}=0.371 \text{ sec}$$

$$S_{p4} \text{ に対しては } T_{a1}=0.360\sim 0.375 \text{ sec, 平均値 } T_{a1}=0.368 \text{ sec}$$

$$\text{ここに } \left\{ \begin{array}{l} T_{a1}: \text{第1次の固有振動周期の実測値} \\ T_{a2}: \text{第2次の固有振動周期の実測値} \\ T_{a3}: \text{第3次の固有振動周期の実測値} \end{array} \right.$$

VII 固有振動周期の実測値と計算値との比較検討

犀川橋については筆者の行った実験結果に基づき比較検討を行う事にし舟橋については京都大学土木教室の行われた実験結果に基づき比較検討を行う事にする。

前述の諸数値を用いて、犀川橋の実測周期の計算周期に対する差の百分率を求めるとつぎのごとくである。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{p1} \text{ に対しては, } \frac{T_{a1}-T_1}{T_1} \times 100 = 7.3\%, \quad \frac{T_{a2}-T_2}{T_2} \times 100 = 0.6\%, \quad \frac{T_{a3}-T_3}{T_3} \times 100 = 2.0\% \\ S_{p2} \text{ に対しては, } \frac{T_{a1}-T_1}{T_1} \times 100 = 7.8\% \\ S_{p3} \text{ に対しては, } \frac{T_{a1}-T_1}{T_1} \times 100 = 7.5\% \\ S_{p4} \text{ に対しては, } \frac{T_{a1}-T_1}{T_1} \times 100 = 6.7\% \end{array} \right.$$

なお参考までに T_1 の T_2 および T_3 に対する比を求めると、 $T_1/T_2=2.066$, $T_1/T_3=3.460$

となつている。これよりして実在程度のランガー橋の低次の振動はほとんど拱肋の伸縮振動によつて決定されている事がわかる¹⁵⁾。

つぎに福井震災後昭和24年に新設された舟橋の実測については京都大学土木教室で行われたので、その結果を参考にさせて頂くと、舟橋の固有振動周期の実測値はつぎのごとくである。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{p1} \quad T_{a1}=0.323\sim 0.377 \text{ sec} \quad \text{平均値 } T_{a1}=0.350 \text{ sec} \\ S_{p2} \quad T_{a1}=0.326\sim 0.388 \text{ sec} \quad \text{平均値 } T_{a1}=0.357 \text{ sec} \\ S_{p3} \quad T_{a1}=0.321\sim 0.377 \text{ sec} \quad \text{平均値 } T_{a1}=0.349 \text{ sec} \\ S_{p4} \quad T_{a1}=0.326\sim 0.374 \text{ sec} \quad \text{平均値 } T_{a1}=0.350 \text{ sec} \\ S_{p5} \quad T_{a1}=0.326\sim 0.370 \text{ sec} \quad \text{平均値 } T_{a1}=0.348 \text{ sec} \end{array} \right.$$

$$\text{全平均値 } T_{a1}=0.3508 \text{ sec}$$

腹材変形の影響を考慮に入れた場合の舟橋の第1次の固有振動周期の計算値は $T_1=0.333 \text{ sec}$ となつている。この T_{a1} の T_1 に対する差の百分率を求めると、

$$\frac{T_{a1}-T_1}{T_1} \times 100 = 5.5\%$$

となつている。

以上のごとき実測値と計算値との比較検討によつて筆者の理論的取扱いにおける幾つかの仮定の妥当な事が一応確認された。これは非減衰固有振動周期に対する検討のみであるが、減衰の項を取入れて計算すれば、その計算周期は前述の非減衰計算周期より幾分延びて、実測周期の計算周期に対する差の百分率がより一層小さくなるであろう事が想定される。

この筆者の理論的取扱いの妥当であろう事はエネルギー法による計算結果と実測結果との比較検討によつても一応確認されている¹⁶⁾。

例えば舟橋につき、エネルギー法により腹材変形の影響を無視した場合の非減衰固有振動周期 T_{e1} および腹

15) 補剛桁の曲げ振動により決定されるとすると、 $T_1/T_2=4$, $T_1/T_3=9$ となる筈である。

16) 前註10) 参照。

材変形と垂直材の伸縮の双方の影響を無視した場合の非減衰固有振動周期 T''_{e1} を求めると

$$T'_{e1}=0.327 \text{ sec}, \quad T''_{e1}=0.322 \text{ sec}$$

となるので、これらの値の基礎微分方程式による算定結果に対する差の百分率を求めると

$$\frac{T'_{e1}-T_1'}{T_1'} \times 100 = 0.9\%, \quad \frac{T''_{e1}-T_1''}{T_1''} \times 100 = 0.3\%$$

となつている。これよりしてエネルギー法による結果は基礎微分方程式による結果にほとんど一致する事が認められると同時に、エネルギー法による結果も実測結果に割合よく一致する事が認められ、その結果として筆者の理論的取扱いにおける仮定の妥当な事は再び確認された。

VIII 結 語

本文はとかく振動の多いと云われているランガー橋の非減衰並びに減衰の固有振動および強制振動に関する理論的取扱いをなすと同時に、犀川橋の実測結果につき説明し、なお非減衰固有振動周期について実測値と計算値との比較検討を行つたものである。この計算周期と実測周期との比較検討によつて理論的取扱いにおける仮定の妥当であろう事が確認されたので、目下減衰固有振動における計算結果と実測結果との比較検討並びに強制振動における計算結果と実測結果との比較検討を行つているが、この結果がまとまれば別の機会に発表する予定である。

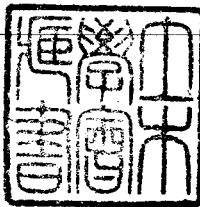
本研究がランガー橋の振動に関する幾分の参考資料ともなれば幸甚である。

終りに舟橋の測定結果を引用させて頂いた京都大学土木教室当局並びにこの研究に多大の支援を与えて下さつた谷藤正三博士に厚く謝意を表明して筆を置く。

参 考 文 献

- 1) Duncan ; Principle of the Galerkin Method, R & M. No. 1848
- 2) Duncan ; Galerkin's Method in Mechanics and Differential Equations, R & M. No. 1798.
- 3) W.Ritz ; Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik, Crelles Journal, 135(1909)
- 4) Lord Rayleigh ; Theory of Sound. vol.1.
- 5) S. Timoshenko ; Vibration Problems in Engineering.
- 6) Love ; Mathematical Theory of Elasticity.
- 7) 安部清孝；腹材変形の影響を考慮に入れた桁としての等断面平行弦単純トラス橋の強制振動について。土木学会誌 36 卷 9 号
- 8) 谷藤正三，安部清孝；ランガー橋の振動に関する研究（I） 建設省土木研究所報告 83 号
- 9) 安部清孝；ランガー橋の振動に関する研究（II） 建設省土木研究所報告 84 号

(昭.27.6.23)



昭和 27 年 9 月 25 日 印刷 土木学会論文集 定價 120 円
昭和 27 年 9 月 30 日 発行 第 14 号

編集兼発行者 東京都千代田区大手町 2 丁目 4 番地 中 川 一 美
印刷所 東京都港区赤坂溜池 5 番地 大 沼 正 吉
印刷者 東京都港区赤坂溜池 5 番地 株式会社 技 報 堂

東京中央局区内 千代田区大手町 2 丁目 4 番地 電話 和田倉 (20) 3945 番
発行所 社 団 法 人 土 木 学 会 振替東京 16828 番

土木学会刊行物一覽

土木工学論文抄録 第3集	A 4判 230頁	実費 500円 (送料 60円)
〃 第4集	A 4判 173頁	〃 450円 (〃 60円)
土木学会論文集 第3号	B 5判 183頁	〃 160円 (〃 30円)
〃 第4号	B 5判 134頁	〃 200円 (〃 30円)
〃 第5号	B 5判 140頁	〃 250円 (〃 30円)
〃 第6号	B 5判 140頁	〃 250円 (〃 30円)
〃 第7号(仁杉博士)	B 5判 33頁	〃 60円 (〃 10円)
〃 第8号(国分博士)	B 5判 24頁	〃 50円 (〃 10円)
〃 第9号(小西博士)	B 5判 9頁	〃 20円 (〃 10円)
〃 第10号(岡本博士 久保慶三郎)	B 5判 18頁	〃 40円 (〃 10円)
〃 第11号(林 泰造)	B 5判 ^委 文 11頁	〃 50円 (〃 10円)
〃 第12号(沼田・丸安・黒崎)	B 5判 26頁	〃 60円 (〃 10円)
コンクリート標準示方書(昭和26年度)	B 6判 266頁	〃 180円 (〃 20円)
コンクリート標準示方書解説	B 5判 167頁	〃 300円 会員特価240円 (〃 30円)
水 理 公 式 集	A 5判 167頁	〃 200円 (〃 20円)
最新土質工学	B 5判 118頁	〃 150円 (〃 30円)
第6回年次学術講演会講演概要	B 5判 100頁	〃 150円 会員特価100円 (〃 20円)
第7回 〃	B 5判 120頁	〃 200円 会員特価150円 (〃 20円)
第8回 〃	B 5判 103頁	〃 150円 (〃 20円)
昭和26年 夏季講習会パンフレット Ⅰ コンクリートとダム	B 5判 66頁	〃 150円 (送料共) 会員特価120円
Ⅱ 橋 梁	B 5判 92頁	〃 200円 会員特価150円 (〃)
昭和26年土木学会名簿	A 5判 397頁	会員特価100円 (〃 35円)
昭和27年 夏季講習会パンフレット 建設機械化	B 5判 176頁	〃 300円 (〃 30円)

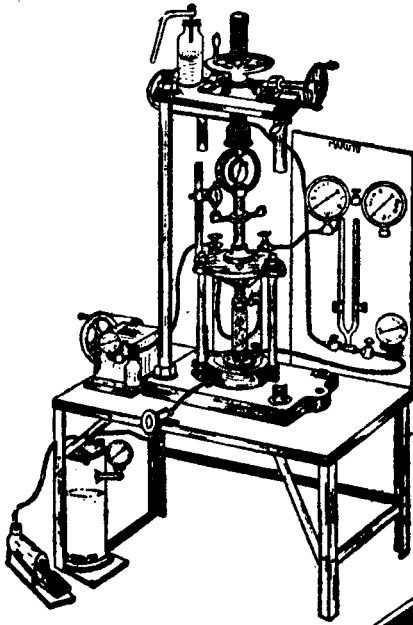
土 木 工 学 叢 書

	品	切	
(1) 杉戸 清著 下水道学(前編)	B 5判 243頁	定価 460円 (送料 45円)	
(2) 福田 武雄著 木構造学(再版)	B 5判 177頁	〃 450円 (〃 45円)	
(3) 広瀬孝六郎著 上水道学(前編)	B 5判 168頁	〃 350円 (〃 45円)	
(4) 岡田信次著 鉄道線路	B 5判 530頁	〃 900円 (〃 80円)	
(5) 平井 教著 鋼橋(1)(再版)	B 5判 469頁	〃 1300円 (〃 80円)	
(6) 横道英雄著 鉄筋コンクリート橋			

CONCRETE, SOIL



丸東の試験機



S 18 型

土質三軸圧縮試験機

営業品目
セメントコンクリート
試験機及器具
AEコンクリート測定器
ディスペンサー
土質試験器及器具
ループ荷重計

株式
会社

丸東製作所

東京都江東区深川白河町2の7

Tel. 深川 (74) 2661

TRANSACTIONS
OF THE
JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
NO. 14

C O N T E N T S

	Page
On the Critical Tractive Velocity of a River-Flow <i>By Tamotsu Kuboo, C.E. Member</i>	1
A Mathematico-Physical Investigation of the Subsidence of Freshly Placed Concrete <i>By Dr. Eng., Yashichi Yoshida, C.E. Member</i>	6
Difference Method for Partial Differential Equations (Part 1) <i>By Bennosuke Tanimoto, C.E. Member</i>	14
On the Effect of the Impulse Load Acting on the Rail <i>By Sachio Mogami, C.E. Member</i>	18
A Solution on the Consolidation Settlement <i>By Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member, Toshihiko Yamanouchi, C.E. Assoc. Member</i>	24
On the Method of Flood Prediction Using the Rainfall Data <i>By Reiji Itō, C.E. Member</i>	29
Study on the Vibration of Langer's Bridge <i>By Kiyotaka Abe, C.E. Member</i>	37

Sept. 1952

DOBOKU-GAKKAI

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

No. 4 2-CHOME OTE-MACHI CHIYODA-KU TOKYO, JAPAN